

El último

TEOREMA

de Fermat:

¿el último del milenio?

Carlos Prieto

Hace más de 300 años el genial matemático francés Pierre de Fermat, refiriéndose a un teorema que registró en su ejemplar de la *Aritmética de Diofanto*, escribió: “Poseo una demostración en verdad maravillosa para esta afirmación que no cabe en este estrecho margen”. Un teorema es una afirmación matemática que ha sido demostrada, fuera de toda duda, de modo que los matemáticos reconozcan la validez de la demostración (antes de que esto suceda, se trata sólo de una conjetura).

La aseveración de Fermat sobre una atractiva afirmación matemática significó, por siglos, uno de los más grandes enigmas para los matemáticos. Tratando de “redescubrir” esa demostración del que ha sido conocido como el último teorema de Fermat, los matemáticos han recorrido muchos caminos, creando novedosas teorías, descubriendo nuevos teoremas, planteando interesantes conjeturas y, también, enfrentándose con grandes decepciones. Finalmente, en 1995, el enigma fue descifrado. El matemático inglés Andrew Wiles, después de años de trabajo, logró encontrar una complicada, pero elegante demostración para este resultado. Por cierto, hoy en día nadie cree que Fermat haya tenido una demostración; por tanto, el último teorema de Fermat no lo fue sino hasta que Wiles lo demostró.

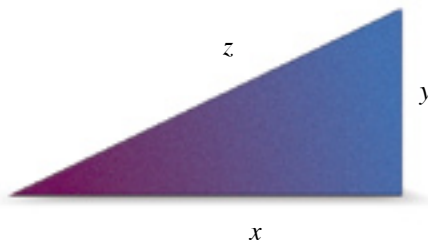
El misterio de una ecuación

¿Qué asevera el último teorema de Fer-

mat? Para responder a esta pregunta, regresemos, en primer lugar, a uno de los más famosos teoremas de la geometría: el teorema de Pitágoras. Este se trata de un resultado referente a los triángulos rectángulos, que relaciona los *catetos*, es decir, los lados adyacentes al ángulo recto del triángulo, con la *hipotenusa*, esto es, el lado opuesto al ángulo recto. El teorema afirma lo siguiente: en un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. Es decir, si los catetos del triángulo miden x y y respectivamente, y la hipotenusa mide z , entonces el teorema de Pitágoras en símbolos afirma

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Su inverso es igualmente válido: si en un triángulo de lados con longitud x , y , z respectivamente se cumple la ecuación anterior, entonces el ángulo formado por



los lados x y y es recto.

El teorema de Pitágoras es un teorema matemático. Su validez es absoluta: es cierto para *todos* los triángulos rectángulos, se cumple hoy por hoy y para siempre. Como todos los teoremas en la matemática, una vez que han sido correctamente demostrados, su veracidad queda establecida

Ilustración: Rapi

EN UNO de los cuentos del libro *Pactos con el Diablo* de Arthur Poges, “El Diablo y Simón Flagg”, el diablo invita a Flagg a hacerle una pregunta difícil. Si el diablo la responde en 24 horas, el alma de Flagg será suya; si no, le regalará 100 mil dólares. La pregunta que Simón le hace es: “¿Es cierto el último teorema de Fermat?”. El diablo desaparece y al día siguiente reconoce su derrota: “Tú ganas, Simón —dijo casi en un susurro, mirándolo con un respeto absoluto—. Ni siquiera yo puedo aprender en tan poco tiempo las matemáticas requeridas para un problema tan difícil. Cuanto más indago sobre él, más difícil se torna”. Flagg sin duda fue astuto, veamos por qué.

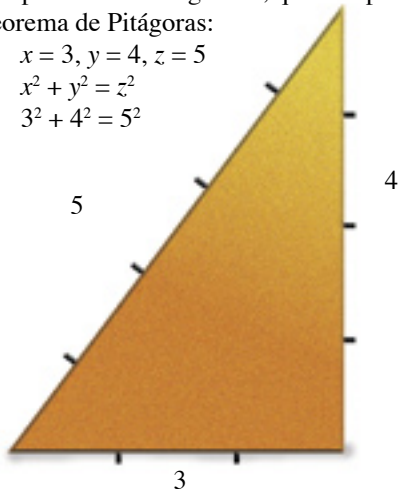
para siempre.

Uno de los más típicos ejemplos de un triángulo rectángulo es el que llamaremos *triángulo 3-4-5*, es decir, el que tiene catetos de longitudes 3 y 4 respectivamente, e hipotenusa de longitud 5, que cumple el teorema de Pitágoras:

$$x = 3, y = 4, z = 5$$

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$



$$9 + 16 = 25$$

Este caso particular del teorema de Pitágoras, en el que los tres lados del triángulo rectángulo tienen longitud dada por números enteros, y otros del mismo estilo, eran ya bien conocidos por egipcios, babilonios y chinos cerca de mil años antes de que Pitágoras demostrara su afirmación en el siglo VI antes de nuestra era.

A la terna de números enteros 3, 4, 5 se le puede llamar *terna pitagórica*, pues satisface la ecuación del teorema de Pitágoras; como ésta hay muchas otras. Por ejemplo 5, 12, 13 es otra terna pitagórica, puesto que se cumple la igualdad

$$5^2 + 12^2 = 13^2$$

$$25 + 144 = 169.$$

Con una calculadora de mano, el lector puede verificar que, por ejemplo, también la terna 99, 4900, 4901 es pitagórica. Si bien estas ternas son más escasas conforme los números considerados son mayores, ya los pitagóricos inventaron un método para determinarlas y demostraron que hay una infinidad de ellas.

Pero, ¿todo esto qué tiene que ver con el último teorema de Fermat? Pues bien, la ecuación de Pitágoras $x^2 + y^2 = z^2$ que, como acabamos de ver, tiene soluciones con números enteros (distintos de cero), por ejemplo, $x=3, y=4, z=5$, o $x=5, y=12, z=13$, encierra el enigma del teorema de Fermat.

En esta ecuación aparecen las potencias llamadas cuadrados, es decir $x^2 = x \times x$, etc., pero, ¿habrá soluciones enteras para la ecuación si en vez de tomar cuadrados, tomamos cubos, es decir, $x^3 = x \times x \times x$,



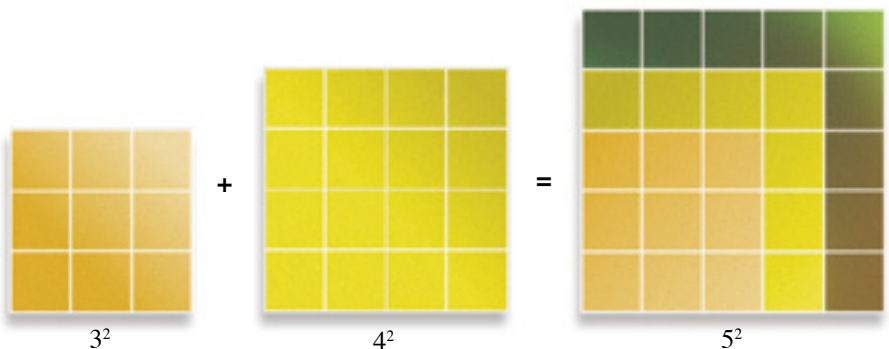
Pierre de Fermat.

etcétera?

La pregunta que Fermat se planteó fue la de encontrar soluciones enteras (distintas de cero) para la ecuación

$$x^3 + y^3 = z^3$$

a la que llamaremos ecuación de Fermat. Al intentar resolver esta cuestión, encontró solamente dos cubos cuya suma es otro cubo menos uno u otro cubo más



El problema de las ternas pitagóricas es encontrar dos cuadrados formados por mosaicos, a su vez, cuadrados, de modo que al juntarlos puedan formar otro cuadrado.

uno. Es decir, tal que la ecuación que se cumple es

$$x^3 + y^3 = z^3 - 1, \text{ o } x^3 + y^3 = z^3 + 1.$$

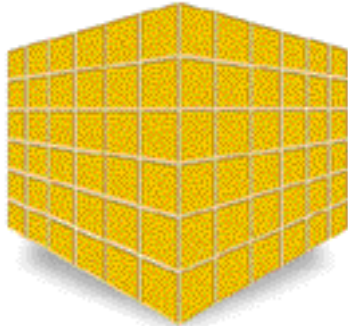
Por ejemplo,

$$6^3 + 8^3 = 9^3 - 1$$

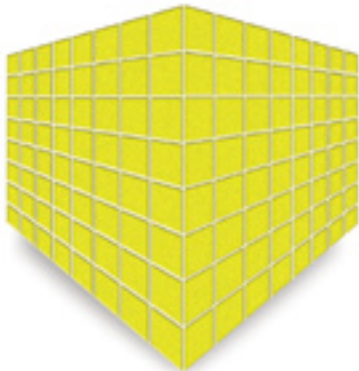
$$216 + 512 = 729 - 1 = 728$$

El propio Fermat, haciendo uso de un método descubierto por él mismo, llamado el método de descenso infinito, demostró que no existen ternas de números enteros distintos de cero x, y, z que satisfagan la ecuación

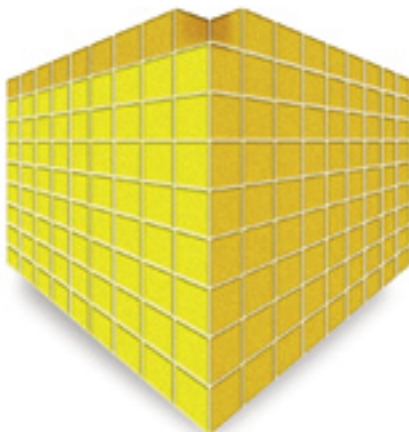
$$6^3$$



$$8^3$$



$$9^3 - 1$$



Un cubo formado por $6^3=216$ bloques cúbicos junto con otro formado por $8^3=512$ bloques cúbicos da un cubo de $9^3=729$ bloques cúbicos, al que le falta uno.

$$x^4 + y^4 = z^4.$$

En su ejemplar del libro *Aritmética de Diofanto* anotó: “No es posible expresar un cubo como la suma de dos cubos o expresar una cuarta potencia como la suma de dos cuartas potencias o expresar, en general, cualquier potencia mayor de dos como la suma de dos potencias iguales”.

Es decir, en el conocido como el último teorema de Fermat, éste asegura que no sólo la que llamamos ecuación de Fermat, o ecuación de los cubos, que ya introdujimos, sino la ecuación generalizada de Fermat

$$x^n + y^n = z^n$$

en la que n ahora representa cualquier valor mayor que 2, como 3, 4, 5, etc., no tiene ninguna solución con valores enteros de x, y, z , como sí era el caso para la ecuación de Pitágoras, es decir, para $n=2$.

Como ya dijimos, Fermat afirmó haber encontrado una prueba para su teorema. Esta afirmación la hizo alrededor de 1637, a la edad de 36 años. Fue, sin embargo, hasta después de su muerte, en 1670, que su hijo, Clément-Samuel, publicó el volumen *Aritmética de Diofanto con observaciones de P. de Fermat* donde aparece el célebre teorema.

Teorema de Fermat

Si $n > 3$, no existen números enteros distintos de cero x, y, z , tales que se cumpla la ecuación

$$x^n + y^n = z^n$$

El enigma del milenio

La lista de matemáticos que se ocuparon de la demostración del último teorema de Fermat es interminable. Sólo mencionaremos a quienes contribuyeron de manera significativa a resolver el problema. Después del logro del propio Fermat en el caso $n = 4$, la primera contribución digna de señalarse es la del gran matemático suizo Leonhard Euler, quien en 1747 dio una prueba (incompleta) del caso $n = 3$.

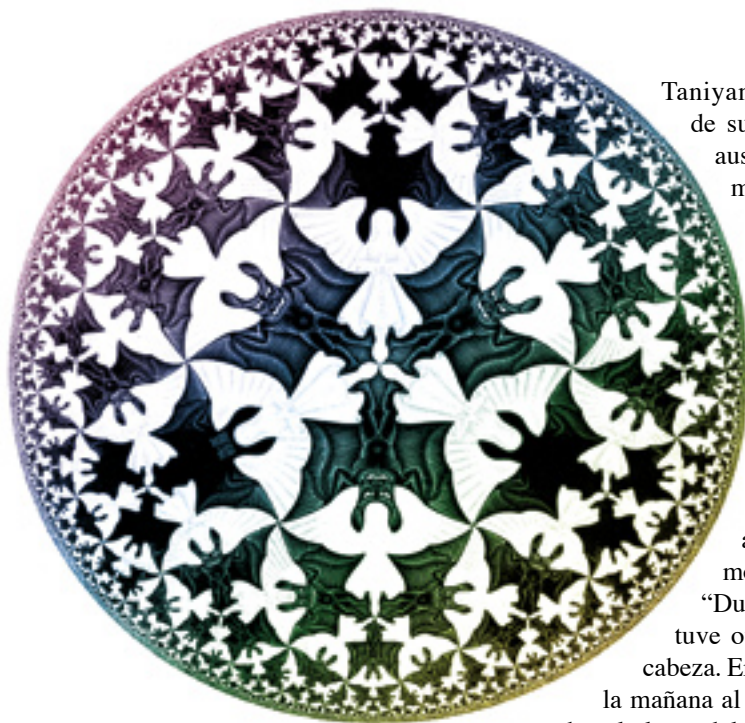
Otra contribución importante se debe a una extraordinaria mujer, cuya historia por sí misma es digna de otro artículo. Se trata de Sophie Germain, una joven que tenía una verdadera pasión por las matemáticas, ciencia que hasta no hace mucho era considerada “poco femenina”. El padre de Sophie intentó por varios medios disua-

dirla de seguir sus inclinaciones, y llegó al extremo de encerrarla sin ropas, sin velas y sin calefacción. No obstante, ella logró esconder algunas velas y resguardarse del frío envolviéndose con sábanas, y así dedicarse a las matemáticas. Cuando conoció el enigma de Fermat, se empeñó en resolverlo. Logró establecer vínculos académicos con el gran matemático Carl-Friedrich Gauss, y hacerse discípula de Joseph-Louis Lagrange. Más de 75 años después de Euler, en 1825, Gustav Lejeune-Dirichlet y Adrien-Marie Legendre produjeron sendas pruebas del último teorema en el caso $n = 5$, basadas en un poderoso método de Sophie Germain.

El servicio más grande prestado a las matemáticas por el último teorema de Fermat ha sido, sin duda, su motivación para la creación de la teoría de los números algebraicos, por Ernst Eduard Kummer en sus intentos por probarlo. Ésta es ahora una rama de las matemáticas que tiene un fuerte impacto.

Antes de Wiles, los matemáticos vinculados con el último teorema durante el siglo XX contribuyeron a engrandecer la teoría de números algebraicos, pero no lograron demostrar el teorema. El historiador de las matemáticas, Eric Temple Bell, en su libro de 1957, titulado *The Last Problem* (El último problema), conjetura la extinción de la civilización humana antes de que el teorema llegara a probarse.

Sin embargo, hubo importantes avances antes de Wiles. Vale la pena mencionar a Gerd Faltings, cuyo trabajo, si bien vinculado a nuestro enigma, no lo resolvió, pero tuvo por sí mismo gran influencia en la geometría algebraica. Fue otra conjetura, debida a dos matemáticos japoneses, Yutaka Taniyama y Goro Shimura, la que dio la pauta a Wiles. Esta conjetura, de alguna forma sugerida a Shimura por su trabajo conjunto previo con Taniyama (quien se suicidó en 1957), vincula dos complicados conceptos de la matemática: las ecuaciones elípticas, que son ecuaciones cuyas variables toman valores en los números reales, y las formas modulares, que, dicho vagamente, son funciones cuyas variables toman valores en los números complejos y describen formas de alto grado de simetría. La conjetura de Taniyama-Shimura afirma que a cada forma modular se le puede asociar una ecuación elíptica; relaciona dos formas distintas del pensamiento ma-



Circle Limit IV de Mauritz Escher, una imagen del plano hiperbólico, da una idea de la simetría de las formas modulares.

temático.

En el otoño de 1984, en el Instituto Matemático de un pueblito de la Selva Negra, Oberwolfach, donde semanalmente se reúnen matemáticos a discutir, en una sesión dedicada a la teoría de los números, el alemán Gerhard Frey demostró, transformando la ecuación de Fermat en una ecuación elíptica (al hacer que sus variables en vez de tomar valores en los enteros tomaran valores en los números reales) que si el último teorema de Fermat fuese falso, entonces la conjetura de Taniyama-Shimura también lo sería. Así, estableció el puente entre ambos problemas. Restaba, pues, demostrar la conjetura de los nipones, para resolver el enigma del milenio.

El final de la historia

Andrew Wiles recuerda: “Desde que en mi infancia me encontré por vez primera con el último teorema de Fermat, éste se convirtió en una gran pasión. Me topé con un problema que había permanecido sin resolverse por 300 años”. Cuando era niño, gracias a un libro sobre teoría de los números que le recomendó un maestro, que se había dedicado a la investigación comenzó a aprender la teoría y a buscar la solución del problema.

A lo largo de años de trabajo dedicado casi exclusivamente al último teorema de Fermat, Wiles conoció la conjetura de

Taniyama-Shimura, a través de su maestro, el profesor australiano John Coates, mientras estudiaba el doctorado en Cambridge, Inglaterra. Supo que para probar el último teorema de Fermat, tenía que demostrar la conjetura de Taniyama-Shimura, es decir, que toda ecuación elíptica tiene que estar asociada a una forma modular. Continúa Wiles: “Durante todo el tiempo no tuve otro pensamiento en la cabeza. Era en lo que pensaba en la mañana al despertar; lo que pensaba a lo largo del día; y seguía pensando en ello al irme a la cama”.

El trabajo sistemático y, sin duda, su genialidad, condujeron a Wiles, después de siete años de solitarios esfuerzos, a demostrar la conjetura de Taniyama-Shimura. Relata: “En mayo de 1993, estaba convencido de tener en mis manos el último teorema de Fermat; aún quería asegurarme de que la demostración estuviera correcta, pero se acercaba una conferencia a finales de junio en Cambridge. Pensé que sería un bello lugar para anunciar mi prueba: la ciudad donde viví y fui estudiante de doctorado.” Presentó en el Instituto Isaac Newton, en el taller de teoría de los números, una serie de tres conferencias titulada “Formas modulares, curvas elípticas y representaciones de Galois”, ante expertos de todo el mundo.

Entre tanto corría el rumor de que Wiles había probado el último teorema de Fermat, pero había escepticismo. El 23 de junio comenzó la última plática de la serie. En la audiencia estaban casi todos los matemáticos que habían contribuido a la demostración de lo que se iba a presentar (Mazur, Ribet, Kolyvagin, etc.). Al terminar la plática, Wiles escribió el enunciado del último teorema de Fermat y dijo: “Creo que aquí terminamos”... Hubo un prolongado aplauso.

Wiles había probado un caso especial de la conjetura de Taniyama-Shimura,¹ suficiente para obtener el último teorema de Fermat. A partir de entonces, los periódicos anunciaron con bombo y platillos

¹Hace unos meses se probó la conjetura de Taniyama-Shimura en toda su generalidad.

la noticia: *The Guardian* de Londres, *Le Monde* de París, *The New York Times*; incluso, aunque tardíamente, el *Excelsior* de México registró la noticia. La famosa revista *People* incluyó a Wiles, junto con personalidades como la princesa Diana y Oprah Winfrey, entre las 25 personas más fascinantes del año.

¿Era correcta la prueba?

El último teorema de Fermat es un resultado complicado, de otra manera no hubiera estado sin resolverse tanto tiempo. Pues resultó que había un error en el capítulo 3 del artículo original de Wiles, lo que generó un fuerte sentimiento de frustración en la comunidad matemática, pero, particularmente, en el propio Andrew. Éste necesitaba un experto en el tema. Decidió invitar a Richard Taylor quien había sido su discípulo y evaluador de su trabajo al Instituto de Estudios Avanzados de Princeton. Les tomó más de un año corregir el error y, finalmente, publicaron el resultado definitivo en un artículo que con el primero de Wiles sumaba 130 páginas de matemáticas de primera línea, y apareció en una de las más prestigiadas revistas matemáticas, *Annals of Mathematics*, en mayo de 1995.

El más importante galardón al que puede aspirar un matemático es la Medalla Fields, que a diferencia del Premio Nobel, se entrega cada cuatro años y a matemáticos menores de 40 años que hayan alcanzado logros extraordinarios en la materia. La fecha límite para que Wiles lo obtuviera era el Congreso Internacional de Matemáticos realizado en Zurich, Suiza, en 1994, cuando aún no cumplía los 40, pero tampoco tenía la prueba completa. En el Congreso de Berlín, de 1998, la prueba ya estaba terminada, pero Wiles rebasaba los 40. Se le hizo un reconocimiento especial por ese logro, seguramente no el último teorema que se pruebe en los días que le restan al milenio, pero tal vez sí el más impresionante en cuanto a las matemáticas se refiere.



Carlos Prieto es investigador titular en el Instituto de Matemáticas de la UNAM. Es autor de varios libros y miembro de la Academia Mexicana de Ciencias y de las Sociedades Matemáticas Americana, Alemana, Londinense y de la Mexicana, de la cual fue presidente.