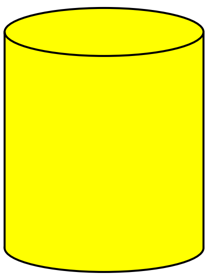
El mágico número del círculo

Carlos Prieto de Castro

Comencemos haciendo algunas preguntas:

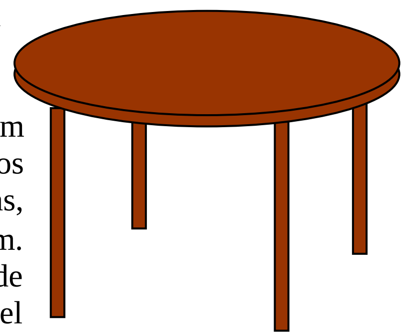
1. Inventamos un contador de vueltas para la rueda delantera de la bicicleta, de modo que para un paseo que hicimos contamos 2,457 vueltas. ¿Cuántos kilómetros recorrimos si la bicicleta es de rodada 20?

2. Supón que das un paseo en bicicleta de tu casa al parque. Ya tu papá te ha dicho que la distancia es de 1.5km, es decir, de 1,500m. Tú deseas saber cuántas vueltas dio cada rueda de tu bicicleta. Si la rueda mide 60cm de diámetro, ¿cómo calculamos el número de vueltas?

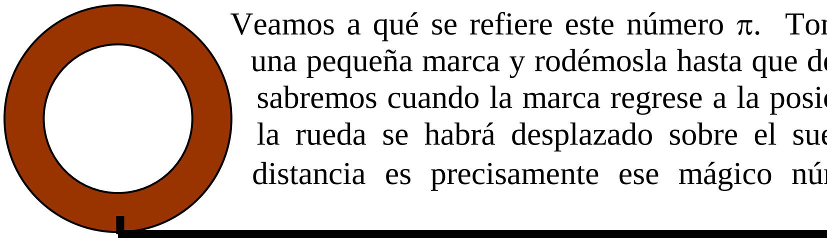


3. La compañía del papá de Tomás se dedica a pintar tanques de petróleo. Firman un contrato para pintar un tanque de almacenamiento cilíndrico de 12m de diámetro y 15m de altura. Si la pintura que utilizan cubre 4.5m^2 por litro, ¿cuántos litros de pintura necesitan utilizar?

4. En una visita de los Gutiérrez a los Ramírez, se sientan muy cómodamente a comer las cinco personas en una mesa redonda. El platillo que se sirve es un fondue de queso, que se coloca en el centro de la mesa. Se dan cuenta de que ésta facilita el acceso al platillo y propicia más la cercanía para platicar. Deciden los Gutiérrez comprarse también una mesa redonda. Miden el perímetro de la mesa de los Ramírez, que es de 3.50m, de modo que 70cm es el espacio ideal para una persona. Como ellos quisieran poder sentar cómodamente a ocho personas, necesitan un perímetro de 8·70cm = 560cm = 5.60m. Pero resulta que en el catálogo de la tienda donde quieren ordenar la mesa dan el diámetro, mas no el perímetro de la mesa. ¿De qué diámetro deben comprar su mesa?



Para responder a las preguntas anteriores necesitamos precisamente el **número mágico del círculo**. Ese número mágico, llamado *pi*, que es el nombre de la letra griega π (que equivale a nuestra p en el abecedario), es el que nos va a permitir contestar las preguntas planteadas.



Veamos a qué se refiere este número π. Tomemos una rueda, hagámosle una pequeña marca y rodémosla hasta que dé una vuelta completa, lo cual sabremos cuando la marca regrese a la posición de salida. Al hacer esto, la rueda se habrá desplazado sobre el suelo una cierta distancia, esta distancia es precisamente ese mágico número π multiplicado por el diámetro de la rueda, es decir, si la rueda tiene un diámetro de un metro, entonces el recorrido fue de π metros. Si el diámetro fuera de 30cm, entonces el recorrido sería de π multiplicado por 30cm. Por lo tanto, para poder responder a nuestras preguntas iniciales, debemos conocer el valor de π.

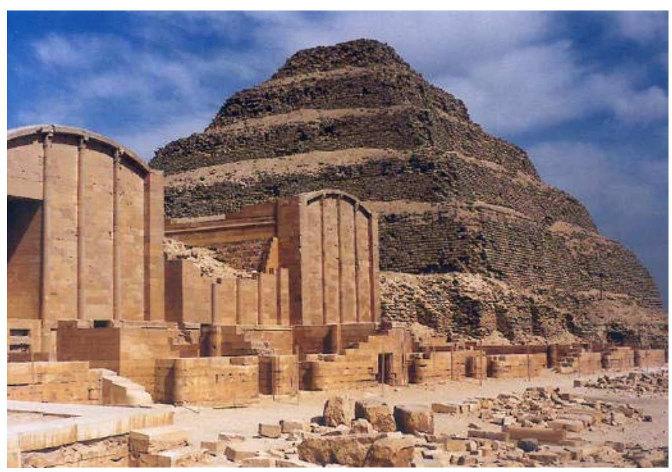
Antes de comenzar, hagamos un experimento. Busquemos objetos redondos, midamos su diámetro y midamos su perímetro. Con los resultados, elaboremos una tabla. En la tabla vemos que ese número mágico que andamos buscando es más o menos tres, puesto que 3·111 = 333, 3·24 = 72, 3·12 = 36, 60·3 = 180. Más precisamente, si dividimos cada perímetro entre el diámetro correspondiente, obtenemos los siguientes números: 350÷111 = 3.15, 75÷24 = 3.125, 38÷12 = 3.17, 189÷60 = 3.15. Esto nos indica que ese numerito que buscamos, el número π, debe de ser un número cercano a 3.15.

	Perímetro	**Diámetro**
Mesa	350cm	111cm
Plato grande	75cm	24cm
Plato pequeño	38cm	12cm
Rueda de bicicleta	189cm	60cm

perímetro = un poco más de tres por diámetro

La historia de π

Se sabe que en épocas del emperador del Antiguo Egipto, Zoser, hace unos 5000 años, ya se manejaba la idea de π, al cual le daban un valor de 19÷6 = 3.16666... . Zoser mandó construir en Saqqara su pirámide que hubo de ser su monumento funerario. La relación entre el perímetro de la base de la pirámide y su altura es precisamente este número.



Pirámide de Zoser, en Saqqara, Egipto

Más adelante, el sabio griego Arquímedes, alrededor de 250 antes de nuestra era, aseguraba que el número π estaba entre $3\frac{10}{71}$ y $3\frac{10}{70}$, es decir, entre los números decimales 3.14084507042253521126760563380282... y 3.14285714285714285714285714285714... . Un poco después, Ptolomeo, el sabio de Alejandría, allá por el año 150 de nuestra era, estimaba el número π como $\frac{377}{120}$, es decir 3.141666666666... .Ésta ya era una buena aproximación. Podemos observar, no obstante, que los antiguos matemáticos buscaban expresar el número π como una fracción, es decir, como el resultado de dividir un número entero entre otro número entero.

Arquímedes

Matemáticos del siglo dieciséis utilizaban como aproximación del número π a la fracción $\frac{355}{113}$ que corresponde en forma decimal a 3.14159292035398230088495575221239..., una magnífica aproximación. Sin embargo, métodos de aproximación diseñados por los matemáticos un poco después permitieron no sólo poder encontrar del número π tantas cifras de su expresión decimal como se deseara, sino también demostrar que se trata de un número llamado trascendente, es decir, que no es posible encontrarlo como el resultado de una fracción, pero tampoco como la solución de una ecuación polinomial. La mejor aproximación decimal del número π se debe a un matemático japonés de nombre Kaneda, que haciendo uso de una computadora en el año de 1988 imprimió en 40,266 páginas 201’326,000 cifras decimales de π. Algunas de esas cifras son 3.14159265358979323846264338327 95...

Para el uso práctico, se suele tomar π simplemente como 3.1416; en muchas de las modernas calculadoras de mano hay ya una tecla marcada con el número π, que utiliza aproximaciones más exactas, como la última dada en el párrafo anterior.

El símbolo π para la razón de la circunferencia de un círculo a su diámetro lo introdujo William Jones en 1707. El famoso matemático suizo Leonhard Euler lo adoptó en 1737 y gracias a él se popularizó.

¿Para qué sirve el número π?

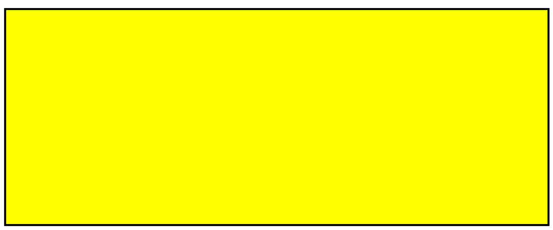
Como ya explicamos, π nos dice cuántas veces cabe el diámetro de un círculo en su circunferencia. De este modo, podemos conocer qué distancia recorre una rueda cada vez que da una vuelta completa si conocemos su diámetro o, inversamente, podemos calcular el número de vueltas que da la rueda de un vehículo si conocemos la distancia recorrida. De este modo, podemos de inmediato contestar las primeras dos preguntas planteadas en la introducción.

Para resolver el primer problema, debemos, en primer lugar, saber que una bicicleta de rodada 20 tiene ruedas de 50cm de diámetro, es decir, de 0.5m. Así, por cada vuelta que da la rueda recorre aproximadamente 0.5·π = 0.5·3.1416 = 1.5708 metros. Como la rueda dio 2457 vueltas, la distancia que recorrimos fue 1.5708·2,457 = 3,859.4466 metros, es decir, aproximadamente recorrimos 3.859km.

El segundo problema se resuelve de modo parecido. En este caso el diámetro de la rueda de la bicicleta es de 60cm, es decir, de 0.6m. De este modo, la rueda recorre 0.6·π = 0.6·3.1416 = 1.88496 metros. Ya que el recorrido es de 1,500m, el número de vueltas de la rueda es el número de veces que 1.88496 cabe en 1,500, es decir, es $1{,}500 \div 1.88496 \approx 795.8$, es decir, nuestra rueda dio aproximadamente 796 vueltas.

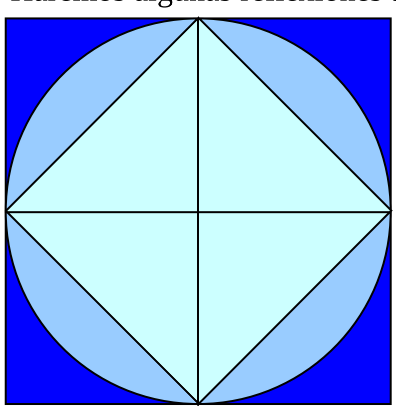
Dejemos pendiente la tercera pregunta para abordar la cuarta, la de la mesa. Queremos acomodar 8 personas alrededor de ella y necesitamos aproximadamente 70cm para que estén cómodas. De este modo, nuestra mesa debe tener una circunferencia de unos $70 \cdot 8 = 560$ centímetros. Ya que el diámetro cabe π veces en el perímetro, el diámetro debe ser de más o menos $560 \div \pi \approx 178$ centímetros. De este modo una mesa ideal para ocho personas puede ser una mesa de 180cm, que es una medida de mesa que ofrece el catálogo que se tiene.

Ya respondimos a tres de las cuatro preguntas. Pasemos a la restante. Queremos pintar un tanque cilíndrico de 12m de diámetro y 15m de altura. Necesitamos calcular el área. Ésta tiene dos partes, la lateral y la tapa de arriba. Para calcular el área lateral, podemos imaginarnos que desenvolvemos la pared del tanque y obtenemos un rectángulo de 15m de altura y de $12 \cdot \pi \approx 37.7$ metros de base, pues la longitud de la base es precisamente el perímetro de la base circular del tanque. De este modo el área lateral del tanque es de $37.7 \cdot 15 = 565.5$ metros cuadrados. Para poder calcular la cantidad de pintura requerida, nos falta saber el área de la tapa del cilindro. En la siguiente sección abordaremos el problema de calcular el área de un círculo si conocemos su diámetro o su radio.



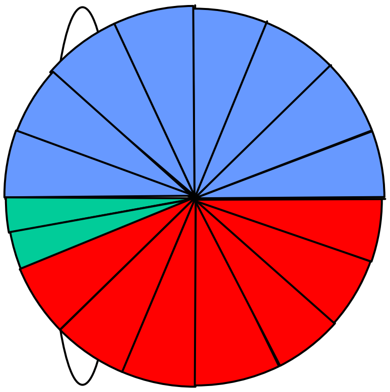
El área de un círculo – la prueba del tiburón

Haremos algunas reflexiones acerca del cálculo del área de un círculo de radio r. Pero antes busquemos una aproximación gruesa. Si dibujamos un cuadrado fuera del círculo, de modo que éste quede **inscrito** en el cuadrado, tendremos que el lado del cuadrado es $2r$. De este modo, el área del cuadrado es $2r \cdot 2r = 4r^2$, es decir, la de cuatro cuadrados de lado r. Como el cuadrado es más grande que el círculo, esta área debe ser mayor que el área del círculo. Si observamos ahora el cuadrado inscrito dentro del círculo, vemos que está formado por triángulos rectángulos de base r y altura r, por lo que el área de cada uno de ellos es $r \cdot r/2 = r^2/2$. Así, el área de este cuadrado, que es más pequeño que el círculo, es $2r^2$ que debe ser menor que el área del círculo. Tenemos así que, si llamamos A al área del círculo, $2r^2 < A < 4r^2$, y esto ocurre independientemente del valor del radio r, sea éste pequeño o grande. De este modo, el área del círculo debe ser r^2 multiplicada por algún número entre 2 y 4. El candidato es π.

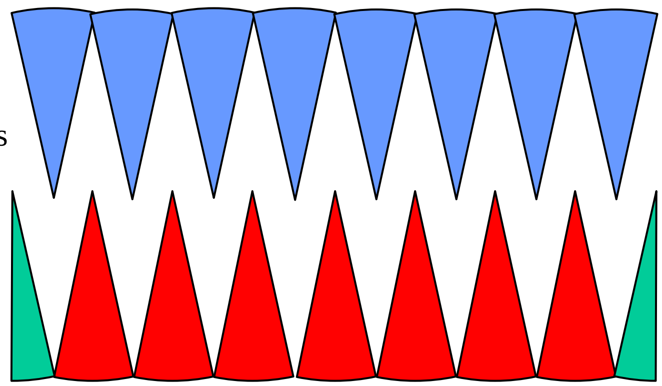


Reflexionemos sobre el cálculo del área del círculo, a través de una revisión de una muy ingeniosa forma de hacerlo. Se basa en el postulado de Euclides que afirma que “el todo es la suma de sus partes” y se parte de áreas que ya conocemos para obtener la del círculo.

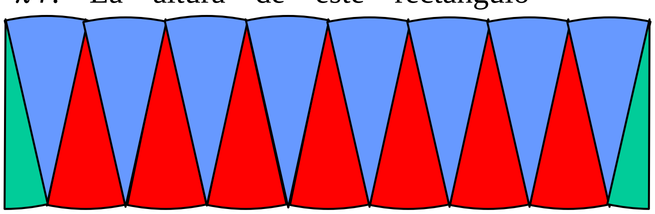
Podemos llamar a ésta, **la prueba del tiburón**. Supongamos que tenemos un círculo de radio r, es decir, tal que su diámetro es $2r$.



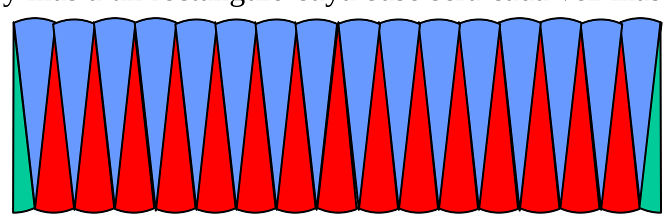
Vamos a descomponer el círculo en muchos sectores iguales, como lo ilustra la figura de la izquierda. La mitad de ellos los iluminamos con azul –éstos son los dientes superiores de un tiburón. La otra mitad de ellos, con rojo, salvo uno que dividimos en dos verdes –éstos son los dientes inferiores del escualo. Después, cómo cuando se abren los gajos de una mandarina, los abrimos y formamos ambas mandíbulas, como se ve en la figura de abajo.



Si ahora hacemos que nuestro tiburón cierre las mandíbulas, se acomodan estos sectores para formar aproximadamente un rectángulo. Su base tiene aproximadamente la mitad de la longitud de la circunferencia. Ya que el diámetro es $2r$, la circunferencia es $2\pi\cdot r$, de modo que la mitad de ella es $\pi\cdot r$. La altura de este rectángulo



aproximado es r. De este modo, el área aproximada de esta figura es de πr^2. Si hacemos una subdivisión cada vez con más sectores del círculo que sean cada vez más angostos –digamos, dientes más filosos del tiburón—, nuestra figura se parecerá cada vez más y más a un rectángulo cuya base será cada vez más y más cercana a un segmento de longitud $\pi\cdot r$, y cuya altura es r. De este modo, podemos asegurar que el área de un círculo de radio r es la misma que la de un rectángulo de base $\pi\cdot r$ y altura r. Por lo tanto, ya que el área de un rectángulo es base por altura, el área del círculo debe ser $\pi\cdot r$ por r, es decir, $\pi\cdot r^2$.

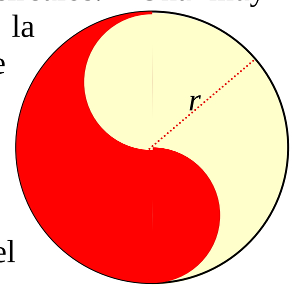


Con todo lo dicho anteriormente y ahora, ya tenemos las fórmulas que nos permiten calcular el perímetro y el área de un círculo.

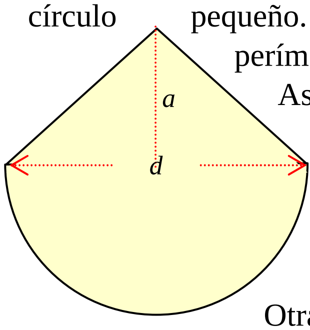
Perímetro de un círculo	El perímetro de un círculo de radio r es $\mathbf{P = 2\pi r}$	***Área de un círculo***	El área de un círculo de radio r es $\mathbf{A = \pi r^2}$

Ahora sí podemos acabar de resolver el tercer problema. Ya habíamos calculado que el área lateral del tanque es de 565.5 metros cuadrados. Ya que la tapa del cilindro es un círculo de 12 metros de diámetro, tenemos que su radio r es de 6m. Así, su área es $\pi \cdot 6^2 = 3.1416 \cdot 36 \approx 113.1$ metros cuadrados. De este modo el área total que hay que pintar es de $565.5 + 113.1 = 678.6$ metros cuadrados. Ya que un litro de pintura cubre aproximadamente 4.5 metros cuadrados, necesitamos $678.6 \div 4.5 \approx 150$ litros de pintura.

Perímetros y áreas de figuras relacionadas con el círculo

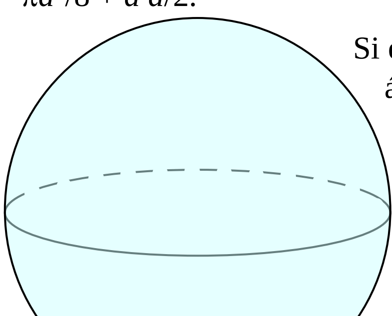


Podemos divertirnos fabricando bonitas figuras haciendo uso de círculos. Una muy conocida es la **coma**, que se ve en la parte roja (o en la amarilla) de la figura. Para hacerla podemos tomar un semicírculo de radio r, quitarle en la parte superior un semicírculo de radio $r/2$ y agregarle otro semicírculo igual en la parte inferior. Claramente nos da una figura cuya área es la misma del semicírculo, es decir, $\pi r^2/2$. Para calcular su perímetro, debemos tomar la mitad del perímetro del círculo grande, es decir πr, y sumarle dos veces la mitad del perímetro del círculo pequeño. Ya que cada círculo pequeño tiene radio $r/2$, la mitad de su perímetro es $\pi r/2$. Pero como son dos los semicírculos, debemos sumar πr. Así, el perímetro de la coma, es $\pi r + \pi r = 2\pi r$. Éste es exactamente igual al perímetro del círculo grande. Sorprendente, ¿no?



Si nuestro círculo tiene 3.6cm de diámetro, entonces el radio es $r = 1.8$cm, por lo que su área es $3.1416 \cdot 1.8^2/2 = 5.0894$ centímetros cuadrados. Su perímetro es $2 \cdot 3.1416 \cdot 1.8 = 11.30976$ centímetros.

Otra figura bonita es la de la izquierda, formada por un semicírculo de diámetro d y un triángulo de base d y altura a. Ya que el radio del semicírculo es $d/2$, su área es $\pi(d/2)^2/2 = \pi d^2/8$. El área del triángulo es $d \cdot a/2$. Así, el área de toda la figura es $\pi d^2/8 + d \cdot a/2$.



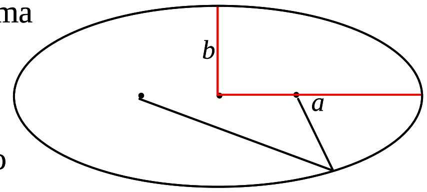
Si en nuestra figura, por ejemplo, $d = 4$cm y $a = 2$cm, entonces el área es $2\pi + 4 = 10.2832$ centímetros cuadrados.

Otros usos de π

El número π aparece en las fórmulas que nos permiten calcular perímetros, áreas y volúmenes de figuras relacionadas con círculos o esferas. La **esfera** es la versión en tres dimensiones del círculo. Recordemos aquí que el **círculo** es el *lugar geométrico* de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado **centro** del círculo. La distancia que guarda cada uno de los puntos del círculo al centro es el llamado **radio** del círculo. De manera similar, la **esfera** es el *lugar geométrico* de todos los puntos del espacio que equidistan de un punto fijo llamado **centro** de la esfera. La distancia que guarda cada uno de los puntos de la esfera al centro es el llamado **radio** de la esfera. Podemos calcular el área y el volumen de la esfera con las fórmulas indicadas abajo, que como vemos, involucran de nuevo al número del círculo.

Área de una esfera	El área de una esfera de radio r es **$A = 4\pi r^2$**	***Volumen de una esfera***	El volumen de una esfera de radio r es **$V = 4\pi r^3/3$**

La **elipse** es una figura geométrica oval determinada por dos puntos llamados **focos**. Es el *lugar geométrico* de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a cada uno de los focos se mantiene constante. Una elipse tiene, por supuesto, su centro, y en vez de un radio tiene dos semiejes, el **semieje mayor**, denotado por *a* en la figura, y el **semieje menor**, denotado por *b* en la figura. La fórmula para su área se da usando π.



Área de una elipse

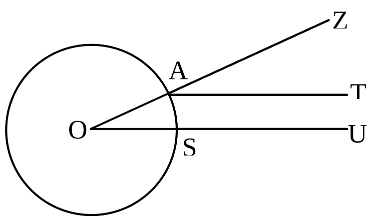
El área de una elipse con semiejes *a* y *b es*

$$\mathbf{A} = \pi ab$$

Por ejemplo, en la elipse de nuestra figura el eje mayor mide 2.7cm y el menor 1.2. De ese modo, el área de esa elipse es 3.1416·2.7·1.2 = 10.178784 centímetros cuadrados.

Un poco más de historia

Hay un relato muy interesante relacionado con mediciones en círculos, cuyo protagonista es el matemático griego Eratóstenes de Cirene, que fue el primero que hizo una medición precisa del radio de la tierra alrededor del año 240 antes de nuestra era –hace más de 2240 años. En primer lugar debemos recordar que los griegos entonces sabían perfectamente que la tierra era redonda, de hecho, sabían que se trataba de una esfera. Eratóstenes vivía en una ciudad llamada Siena, cerca de Asuán, en el Alto Egipto, muy al sur del río Nilo. Ahí había un pozo vertical dentro del cual penetraban los rayos solares verticalmente al mediodía del solsticio de verano. En la misma fecha y a la misma hora, sin embargo, los rayos solares incidían en Alejandría formando un ángulo correspondiente a la cincuentava parte de una circunferencia, es decir, en términos modernos, formando un ángulo de 7.2º. Esto lo midieron con la sombra de un gnomon, es decir, la sombra de un poste vertical. En el esquema se dibuja este fenómeno, en el cual el ángulo SOA es igual al ángulo TAZ. Tanto Alejandría como Siena estaban sobre el mismo meridiano, por lo que bastaba saber la distancia entre ambas ciudades para conocer la longitud de la circunferencia. Se sabía que esta distancia era de 5,000 estadios. El estadio era la medida de longitud que usaban los griegos y correspondía a aproximadamente 160m. Así, la circunferencia de la tierra era de 50·5,000 = 250,000 estadios, es decir, 160·250,000 = 40’000,000 metros, o 40,000km. Así, el radio de la tierra era este número dividido entre 2π, o sea, 40,000÷6.2832 ≈ 6,366 kilómetros, que es un valor muy aproximado al valor medido con los métodos modernos. La forma como medían la distancia entre dos ciudades entonces era usando una rueda y contando cuántas vueltas daba al hacerla recorrer el camino entre ambas, como ya explicamos al resolver nuestro primer problema.



Por cierto, como ya sabemos cómo calcular el área y el volumen de una esfera, podemos calcularlos para la tierra. Así, su área es $4 \cdot 3.1416 \cdot 6{,}366^2 \approx$ 509’264,183 kilómetros cuadrados. Su volumen es $4 \cdot 3.1416 \cdot 6{,}366^3/ \approx$ 1”080,658’595,471 kilómetros cúbicos.

La más bella fórmula de las matemáticas

Quizás, en primera instancia, los jóvenes lectores de este trabajo no lleguen a comprender completamente la fórmula, debida al matemático suizo Leonhard Euler, que un poco más adelante plantearemos. No obstante, tratándose ésta de una fórmula que combina los que de alguna manera podemos considerar como los números más importantes de las matemáticas, siendo uno de ellos precisamente el número π, vamos a anotarla. Antes de hacerlo, hagamos una breve presentación de los números, que además de π están involucrados en la fórmula de Euler.

El primer número que mencionaremos es el **número uno**, 1, es decir, la unidad, ese primer número con el que podemos construir todos los demás números naturales:

$$1,\ 1+1 = 2,\ 2+1 = 3,\ 3+1 = 4,\ 4+1 = 5,\ \ldots$$

El segundo número es el **número cero**, 0, ese maravilloso descubrimiento de los mayas y de los hindúes que permitió enriquecer las matemáticas durante el primer milenio de nuestra era para introducir con su uso el sistema numérico posicional, en el que los guarismos en una cifra tienen un valor que depende de la posición en la expresión de la cifra.

El tercer número es el **número de Euler** e. Éste, al igual que π, es un número irracional, de hecho trascendente, cuya importancia se basa en que proporciona la base natural para los llamados **logaritmos naturales**. Una aproximación es

$$e = 2.71828182845904523536028747135266\ldots$$

El cuarto número es el **número imaginario** i. Éste es un número, que no es uno de los números llamados **reales**, y que fue introducido por los matemáticos para que la ecuación

$$x^2 + 1 = 0$$

tuviera solución; dicho en otras palabras, $i = \sqrt{-1}$. Tiene la propiedad de que su cuadrado es –1, es decir, $i \cdot i = -1$. Esta fórmula nos dice cómo multiplicar a i consigo mismo. De este modo, podemos combinar los números reales y los imaginarios, y usando las reglas de las operaciones de los números reales podemos hacer las mismas operaciones con estos números combinados, que se llaman **números complejos**. Tenemos así que los podemos sumar, multiplicar, hacer potencias y muchas cosas más.

La fórmula de Euler vincula a todos estos números y a π y se ve como sigue:

La fórmula de Euler

$$\boxed{e^{\pi i} + 1 = 0}$$