La conjetura de Poincaré

Por Carlos Prieto de Castro

Una de las conjeturas que intrigaron a los matemáticos durante todo el siglo veinte es la conjetura de Poincaré. Es una muestra más del tipo de cosas que se investigan en matemáticas puras, disciplina tan activa como las más activas de las ciencias actuales.

Grandes problemas de las matemáticas

Los últimos veinticinco años se han visto coronados por una serie de éxitos de las matemáticas. Muchos problemas clásicos, algunos de ellos tras siglos de haber sido planteados, han encontrado finalmente su solución. El problema de los cuatro colores, el último teorema de Fermat, la conjetura de Kepler y ahora la conjetura de Poincaré son quizá los más sonados de esos problemas clásicos. Deseamos hablar aquí del último de estos problemas resueltos. Apenas en junio de este año apareció la prueba de la conjetura de Poincaré, en un artículo de 334 páginas[2], muy probablemente con la prueba matemática más larga de la historia.

Variedades

Trataremos de explicar de qué trata esta conjetura. Comencemos diciendo que trata sobre ciertos objetos topológicos llamados variedades. Éstos se caracterizan porque en el entorno de los puntos que los constituyen se ven como espacios euclidianos. Por ejemplo, podemos considerar la esfera, que como aprendimos en la escuela, consta de todos los puntos en el espacio que equidistan de un punto fijo llamado centro. La superficie de una esfera –como lo es la de la tierra– es una de estas variedades, pues sin ser globalmente un plano euclidiano, en la vecindad de cada uno de sus puntos sí se ve como un plano, no es gratuito que los antiguos pensaran que la tierra era plana, toda vez que la porción que de ella veían era sólo un pequeño entorno. Se dice que una variedad es cerrada si no es infinita. Así, la esfera y el toro (o sea, la superficie de una dona) son ejemplos

Figura 1 Toro.

de variedades cerradas, mientras que el propio plano euclidiano no lo es, pues es infinito. Son éstos, ejemplos de variedades de dimensión dos, o más brevemente, 2-variedades o superficies. Desde el punto de vista matemático, o más precisamente, topológico, han sido éstas bien entendidas desde la segunda mitad del siglo diecinueve.

La conjetura de Poincaré versa sobre variedades cerradas de dimensión tres, o 3-variedades, es decir, objetos finitos que en el entorno de cada uno de sus puntos se ven como el espacio euclidiano tridimensional, es decir, como el espacio en el que vivimos, del cual, por cierto, sólo vemos –aun en términos astronómicos– sólo un entorno nuestro. De estos objetos tridimensionales, al igual que de los bidimensionales, pueden encontrarse muchos ejemplos en el universo matemático.

Superficies

Antes de pasar a formular lo que Henri Poincaré planteó allá en el año de 1904, durante el congreso internacional de matemáticos realizado en Heidelberg,[3] volvamos al caso bidimensional con el fin de entender mejor lo que, en el caso tridimensional, conjeturó Henri.

Las 2-variedades cerradas, como lo mostró a mediados del siglo diecinueve el matemático alemán August Ferdinand Möbius, se pueden enlistar como sigue: Está, en primer lugar, la esfera, luego le sigue el toro, después tenemos al que podríamos llamar toro doble, o en términos más técnicos, superficie orientable de género 2, que resulta de pegar dos toros (como se aprecia en la figura 2); luego viene la de género 3, de género 4 etcétera. Hay otras superficies cerradas, llamadas no orientables, entre las que están el plano proyectivo y la botella de Klein, asimismo una de ellas por cada número natural 1, 2, 3, etc. Todas ellas, salvo la esfera, tienen una característica común, y ésta es que podemos imaginar en ellas un lazo, es decir, una curva cerrada, que no es posible jalar hasta contraerla totalmente. Éste, sin embargo, no es el caso en la superficie esférica, en la que no encontramos obstáculos, es decir, huecos que impidan contraer cualquier lazo que podamos dibujar sobre ella. Por esta propiedad, se dice de la esfera que es simplemente conexa.

Figura 2 Dos toros.

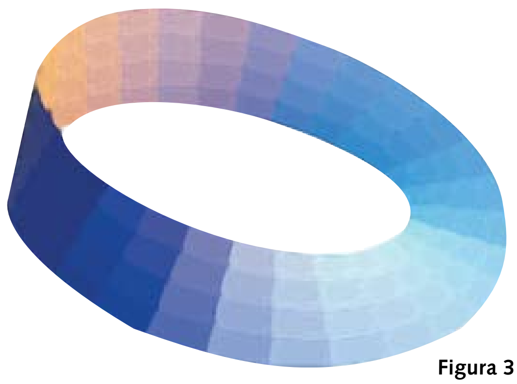

Figura 3 Lazo

La 3-esfera

Bien, para tener todos los elementos para formular la conjetura de Poincaré, tenemos ahora que imaginar lo que es la que se llama esfera tridimensional. Hay varias formas de describirla. Una de ellas es imaginándola como parte del espacio euclidiano 4-dimensional,[4] precisamente como todos aquellos puntos de él que equidistan de un cierto punto llamado centro. Otra manera como podemos imaginar la 3-esfera es como el espacio euclidiano tridimensional en el que vivimos (con su largo, su ancho y su alto) al que se le agrega un punto imaginario en el infinito, de tal modo que cualquier línea recta que tomemos y que recorramos en cualquiera de sus dos direcciones, nos conduzca indefectiblemente a ese punto en el infinito. Resulta que en el entorno del punto al infinito, donde se unen los "extremos" de cada recta, la esfera también se ve como un espacio tridimensional. Es ésta, pues, una 3-variedad cerrada, pues al agregarle el punto al infinito, traemos el infinito hacia nosotros y la hacemos finita. No es difícil, tampoco, ver que es simplemente conexa, pues cualquier lazo en ella puede evidentemente contraerse a un punto, pues no hay huecos que lo impidan.

Enunciado de la conjetura de Poincaré

Dicho lo anterior, la conjetura de Poincaré resulta muy fácil de enunciar ahora. Afirma ésta que la única variedad cerrada de dimensión 3 que es simplemente conexa, es precisamente la 3-esfera. Es decir, cualquier otra 3-variedad cerrada tiene lazos que no es posible contraer a un punto.

La prueba de la conjetura

Como ya dijimos, y por lo que tardó en obtenerse, la prueba de la conjetura es muy complicada. Se obtiene como un caso especial de otra conjetura muy famosa entre los matemáticos, llamada la conjetura de geometrización, formulada por W. Thurston a finales de los setentas. Dicho de una manera muy superficial, esta conjetura de Thurston afirma que en las variedades tridimensionales se puede hacer geometría. Más precisamente, esto significa que las 3-variedades cerradas pueden descomponerse en porciones, en cada una de las cuales puede definirse una forma de medir distancias, por lo que es posible verlas como objetos geométricos. Esto ocurre, en particular, en la 3-variedad cerrada simplemente conexa de la que habla la hipótesis de la conjetura de Poincaré.

Técnicas sumamente complicadas de geometría diferencial, que incluyen al que se conoce como flujo de Ricci, desarrolladas básicamente por el matemático ruso Grigory (Grisha) Perelman[5], que echan mano a su vez de técnicas de Richard Hamilton, aparentemente permitieron armar la prueba a dos matemáticos chinos Xi-Ping Cao[6] y Huai-Dong Zhu.[7]

Haciendo una simplificación al extremo, probaron que si la 3-variedad es cerrada y simplemente conexa, entonces admite una geometría que le da curvatura constante. Cabe aquí mencionar que la curvatura de una variedad geométrica en un cierto punto es el inverso del radio de la esfera que más la aproxima en ese punto. Así, si la curvatura de la 3-variedad es constante, la misma esfera la aproxima en todos sus puntos y por ende debe coincidir con ella, es decir, la 3-variedad debe ser la 3-esfera.

La última semana de agosto de 2006, en Madrid, tendrá lugar el Congreso Internacional de Matemáticos. Ciertamente un tema central de éste, el más importante congreso de la comunidad matemática que se realiza cada cuatro años, será la discusión de la prueba de la conjetura de Poincaré.

¿Qué se gana con la prueba de la conjetura?

Aparte de la satisfacción que significa haber logrado romper una nuez tan dura, la prueba implica el conocimiento de nuevas técnicas que vinculan la topología con la geometría diferencial. La física moderna, digamos a partir de Einstein y Poincaré,[8] echa mano de profundos resultados en ambas áreas de las matemáticas, por lo que estas nuevas técnicas pueden representar mejores herramientas para el conocimiento del universo.

El máximo galardón, hoy por hoy, al que puede aspirar un matemático es la medalla Fields, que cada cuatro años se entrega en el ICM a uno o varios matemáticos que, habiendo alcanzado grandes logros en las matemáticas, no hayan cumplido los 40 años. La comunidad matemática está expectante de quiénes serán los premiados de 2006. Por otro lado, hace unos diez años, el Instituto Clay de Matemáticas[9] puso un premio de un millón de dólares para quien resolviera cada uno de 7 famosos problemas matemáticos, llamados problemas del milenio, uno de ellos, la conjetura de Poincaré. Ahora la discusión en el seno de ese instituto será quién o quiénes de los cuatro (¿o más?) personajes de esta historia recibirán los codiciados reconocimientos.

Henri Poincaré, Foto de "The frontispiece of the 1913 edition of "Last Thoughts" www.en.wikipedia.org"

Bibliografía

Pérez, J. A., *"A un siglo de la conjetura de Poincaré", CIENCIA, Revista de la Academia Mexicana de Ciencias, vol. 57 núm. 2, pp 62-73, abril-junio 2006*

Prieto, C. *Aventuras de un Duende en el Mundo de las Matemáticas, Col. La Ciencia para Todos 206, FCE México 2005*

Referencias

2 *Cao & Zhu, Asian J. Math. 10 (2006) 165-398*

3 *En esta bella ciudad de Alemania obtuvo el autor su doctorado en 1979.*

4 *El espacio-tiempo, es decir, las tres coordenadas espaciales y el tiempo constituyen un espacio 4-dimensional, que es precisamente nuestro universo, en el que interactúan el espacio y el tiempo.*

5 *Del Instituto Steklov en San Petersburgo, Rusia*

6 *De la Universidad Lehigh, de Pennsylvania, EUA*

7 *De la Universidad de Zhongshan, en la provincia de Cantón, al sur de China*

8 *Poincaré sentó las bases para que Einstein pudiera formular su teoría de la relatividad. Ésta es una aplicación de la geometría diferencial a la física del universo.*

9 *En Cambridge, Massachussets, EUA*

Sobre el autor

1 *Matemático, Investigador titular del Instituto de Matemáticas de la UNAM,*
e-mail: *cprieto@math.unam.mx*