Armand Borel

Las matemáticas: Arte y ciencia

Traducción: Carlos Prieto de Castro

Título del original en alemán:
Mathematik: Kunst und Wissenschaft
Carl-Friedrich von Siemens Stiftung, Themen XXXIII
München, 1982

Prólogo a la traducción original

Al caer en mis manos el ensayo de Armand Borel, *Mathematik: Kunst und Wissenschaft*, me encontraba yo en un estado de intenso deseo creativo. Cuando así me encuentro, acuden a mi mente todas esas dudas respecto al sentido o a la aplicabilidad de lo que creo o intento crear. Mi sentimiento al poder contestar mis preguntas –al crear algo en matemáticas– es de una gran satisfacción, que deseo llamar "estética": Me gustan mis resultados. Este ensayo me hizo encontrar muchas respuestas a mis dudas, respuestas, ninguna de ellas nueva, respuestas, sin embargo, que retroalimentan las mías, las que me doy al caer en duda. Fue para mí un tanto cuanto sorprenedente encontrar en un matemático de la talla de Borel esas tres concepciones de la matemática que yo, de alguna manera más bien difusa, poseía: la matemática como un arte, gobernada por criterios estéticos, la poesía de las ideas; la matemática como la estructura última en los fenómenos de la naturaleza; y la matemática como ciencia experimental, que busca descubrir y explicar todos esos fenómenos que ocurren en el universo de los conceptos matemáticos.

Al ir avanzando en la lectura fui topando cada vez más con la necesidad de comentar estas ideas con mis amigos artistas, con mis amigos matemáticos, con todos mis amigos que, de una forma u otra, se interesan por lo que yo hago, por lo que hace o siente un matemático. Esto me llevó a tratar de poner estas ideas en mi propia lengua, a tratar de buscar una confrontación más intensa con ellas. En unos cuantos días de hacerlo me encontré con que ya había yo traducido una gran parte del ensayo, y es ahora que busco ponerlo en su totalidad en las manos de mis amigos. Satisfacción ya me produjo su estudio, ésta se redoblará si al leerlo, los que estimo encuentran alguna identificación con él.

Heidelberg, Alemania, agosto de 1984

Carlos Prieto de Castro

Prólogo a la versión en la red

Han pasado veinticinco años de que encontré el texto en alemán de Armand Borel (21 de mayo de 1923 - 11 de agosto de 2003) y de que lo traduje al español. Poco tiempo después tuve oportunidad de tener un intercambio de correspondencia con Borel y gustoso aprobó la posible publicación formal de esta traducción.* Le quedo sumamente agradecido por ello. Después de hacer varios intentos fallidos de publicarla en revistas de divulgación matemática en México, el Dr. Eli de Gortari (28 de abril de 1918 - 29 de julio de 1991) leyó el ensayo y me invitó a publicarlo en la serie de Problemas científicos y filosóficos, que él editaba. Desafortunadamente, su pronto fallecimiento impidió hacer tal publicación.

En este texto se han incluido traducciones al español de todas las citas en alemán, francés e inglés que aparecen en la versión alemana, pero dejo también, para quien comprende estas lenguas, los textos originales.

Advierto, eso sí, que, como me decía el Dr. de Gortari, *traduttore, traditore* (el traductor es un traidor), por lo que esta "traducción" debe verse, en cierta medida, como una "interpretación" en español del escrito original en alemán.

Ahora he decidido poner esta traducción revisada a disposición del público a través de mi página en la red. En la traducción he puesto en nuestro idioma también el prólogo del Prof. Friedrich L. Bauer, quien fue anfitrión de Borel en su plática en la fundación Siemens y quien es mentor de ésta. Asimismo, para contar con un trabajo más completo, he agregado los nombres de pila de todas y cada una de las personalidades citadas en el texto, así como sus años de nacimiento y muerte. Todas las notas al calce son también bajo mi responsabilidad.

México, D.F., abril de 2009

Carlos Prieto de Castro

*Hay una versión en inglés disponible como: *Mathematics: Art and Science*, en traducción de Kevin M. Lenzer, Math. Intelligencer Vol. 5, No. 4 / diciembre de 1983.

Prólogo de Friedrich L. Bauer[†]

"De matemáticas no entiendo ni jota" –Esta afirmación podemos escucharla a cada momento. Penosas experiencias en la escuela resuenan, conllevando rechazo, aunque a veces también secreta admiración. De lo que no se entiende, tampoco se puede hablar, y así, las matemáticas llevan a la conciencia pública a un estado de cierta marginalidad.[‡] Se puede coquetear incluso con la ignorancia matemática ("La expresión 'valor posicional'[§] no la entiendo; proviene de las matemáticas", dijo hace poco Helmut Schmidt[¶] a la prensa.)

Con razón hay quejas de que los matemáticos no contribuían suficientemente a tener más presencia, no se abrían lo necesario a la discusión con sus contemporáneos. En las secciones culturales de importantes diarios es raro encontrar contribuciones de matemáticos, lo que puede explicarse por una cierta resignación: Tanto matemáticos, como redactores opinan que lo que ocurre dentro del mundo de las matemáticas es muy difícil de "transmitir" a los lectores. Así, la demostración del teorema de los cuatro colores y la clasificación completa de todos los grupos simples finitos, por sólo mencionar dos recientes avances, no son menos importantes que el descubrimiento de una nueva partícula elemental o el esclarecimiento de la estructura de una biomolécula.

La Fundación Siemens logró traer a Múnich a un extraordinario matemático a impartir una equilibrada conferencia de naturaleza filosófica sobre las matemáticas. Emulando a su querido maestro, Heinz Hopf, Armand Borel, como lo mostró la cálida discusión al final de la plática, no valora la matemática vacía, puramente formal aun siendo él un hombre de la matemática pura. Opina él que las matemáticas no se hacen poniendo un sistema de axiomas arbitrario y deduciendo teoremas de él.

Las matemáticas las vive el matemático, el cual, impulsado por la pasión, atribulado vaga por las tinieblas –frecuentemente golpeándose la cabeza– hasta que finalmente brilla la luz y después de grandes esfuerzos, encuentra un pedazo de una nueva verdad. Cuando Armand Borel habla de la "ciencia

[†] Anfitrión de Borel en la Fundación Siemens y editor de la versión original en alemán.

[‡] *Ein Mauerblümchendasein* reza la versión original, expresión que se refiere al estado de una chica a la que nadie invita a bailar.

[§] El valor que tiene una cifra según su posición.

[¶] Canciller Federal de Alemania, de 1974 a 1982.

natural intelectual”, de la “poesía de las ideas”, le da también al no matemático, que mantiene un corazón abierto y un poco de su robado amor por las matemáticas, algo en qué pensar.

Cada vez más, las matemáticas deben luchar contra recriminaciones, cuando rozan con otras ciencias, especialmente en la formación de científicos e ingenieros. Hace poco pudimos leer que “las matemáticas se han desviado en las últimas décadas hacia una conceptualización y una formalización altamente abstractas. La elegancia formal de las matemáticas modernas atrae a unos cuantos, pero el alto nivel de abstracción y su distanciamiento de las aplicaciones hacen que muchos las rechacen. Con ello, se pierde cada vez más la relación entre los profundos teoremas generales y las aplicaciones importantes. ... Nadie le querrá quitar a las modernas matemáticas puras su ‘rango de la orquídea de las ciencias, de altísimo encanto estético’. No obstante, la formación matemática de los científicos naturales y de los ingenieros habrá de hacerse más sólida, y en cierto sentido, más anticuada. Si los matemáticos no están dispuestos a ello, o no pueden, poco a poco se les irá quitando la posibilidad de enseñar, y los que estén más cerca de la práctica se irán haciendo cargo de estas materias.”

Viendo lo que está ocurriendo en casos aislados, puede uno empezar a preocuparse. Ya se han puesto en marcha correcciones de rumbo en la dirección adecuada, por parte de la matemática pura –la aplicada, de todos modos, no es la aludida–. Los efectos, en todo caso, se reconocen con retraso. En la plática de Armand Borel nada se opone a la exigencia de solidez; por el contrario, la discusión mostró que el matemático creativo, cuando se recluye en su torre de marfil, ya no se atiene al juego de los abalorios. Quien está familiarizado con el vocabulario del medio educativo, reconocerá en la expresión ‘orquídea de las ciencias’ una amenaza apenas oculta contra las matemáticas puras. Pero la charla de Borel –como lo demuestra la selección de sus citas– parte de una unidad entre las matemáticas puras y las aplicadas. Nadie podrá tener éxito en separarlas y con ello transferir la enseñanza de las matemáticas a ‘docentes aplicados’, si remite su progreso a Gauss y Jacobi, Dirichlet y Hamilton, Hilbert y Poincaré. Este proceso, “en cierto sentido, de pasar de moda” está completamente en voga; hay que confesar aquí que las “*Disquisitiones Arithmeticae*” de Gauss forman parte de la lectura nocturna favorita de algunos matemáticos. Y la ‘matemática experimental’, de la que habla Armand Borel, es, a su vez, un antídoto.

En el fondo, el futuro de las matemáticas no se ve mal: La ‘ciencia de la computación’, la informática, mencionada por Borel, es una ciencia matemática, que con su rico y nutritivo campo profesional proporciona al fin a las matemáticas un terreno tal, que las carreras al salir del bachillerato ya no se restringen al angosto y pedregoso camino hacia la docencia y la investigación en la universidad. Reforzada por una interrelación cada vez más fructífera con la informática, la matemática continuará manteniendo su fama como la servicial reina durante el próximo siglo.

Las matemáticas: Arte y ciencia

Armand Borel
Traducción: Carlos Prieto de Castro

El hecho de poder sustentar una conferencia en este marco es un gran honor que conlleva para mí muchas dificultades. En primer lugar, la dificultad del idioma, ya que desde hace muchos años ha sido el inglés el que ha atraído mi preferencia entre las lenguas extranjeras. Temo así que el francés, mi lengua materna, y el inglés interfieran involuntariamente, por lo que de antemano pido disculpas y paciencia.[0] En segundo lugar, veo aquí a muchos matemáticos y estoy consciente, casi dolorosamente consciente, de que prácticamente ya todo se ha dicho acerca de este tema, así como de que se han suscitado ya todas las disputas: que las matemáticas sólo sean arte, o sólo ciencia –la reina de las ciencias–, o sólo una servidora de la ciencia. Mi tema, en ropaje latino: *Mathesis et Ars et Scientia Dicenda*, apareció como tercer tema en la defensa de una tesis doctoral en el año de 1855. El oponenente consideraba que sólo eran arte.[1] En ocasiones se ha aseverado que las matemáticas son triviales, casi tautológicas, y por ende ciertamente indignas de ser consideradas como arte o como ciencia.[2] Cada aseveración puede fundamentarse con citas a matemáticos sobresalientes. A veces también es posible, buscando las citas adecuadas, adjudicarle al mismo matemático opiniones completamente distintas. Quiero así hacer hincapié desde el principio en que los matemáticos aquí presentes no van a escuchar nada nuevo.

Pero si me dirijo a los que no son matemáticos, me encuentro con una dificultad mayor y, por así decirlo, opuesta. Mi tarea consiste en decir algo acerca de la esencia, de la naturaleza de las matemáticas; sin embargo, para hacerlo, no debo suponer como conocido el objeto sobre el que me manifiesto. Seguramente puedo esperar cierta familiaridad con las matemáticas griegas, digamos con la geometría euclidiana, tal vez con la teoría de las secciones cónicas o incluso con los rudimentos del álgebra o la geometría analítica. Pero esto tiene poco que ver con el objeto del cual se ocupa actualmente la investigación matemática. Partiendo de estas bases más o menos bien conocidas los matemáticos han desarrollado teorías cada vez más abstractas, que cada vez tienen menos que ver con la experiencia cotidiana, incluso cuando posteriormente encuentran aplicaciones en otras ciencias. La transición de un nivel de abstracción al siguiente ha sido muy difícil, aun para los mejores matemáticos, y ha representado un paso sumamente audaz. No me es posible en unos cuantos minutos dar una visión razonablemente amplia de este cúmulo de abstracciones y sus aplicaciones. Sin embargo, me resulta muy poco satisfactorio filosofar sobre las matemáticas sin decir algo sobre su contenido. Por ello, deseo disponer de algunos pocos ejemplos para poder ilustrar mis afirmaciones generales sobre las matemáticas o sobre su posición frente a otras ciencias humanas o naturales. Por ello trataré de describir o al menos indicar algunos ejemplos de tales pasos. Para esto no puedo definir ni introducir todo de manera precisa, y por tanto no espero una comprensión completa. Pero esto no es esencial. Lo que en realidad deseo comunicar es un sentimiento acerca de la naturaleza de estos procesos de transición, tal vez por su audacia y por su significado desde el punto de vista de una historia del pensamiento. Prometo no ocupar más de veinte minutos en este propósito.

A menudo un matemático busca soluciones generales. Es agradable resolver varios problemas especiales de un solo golpe con una fórmula general. A esto se le puede llamar economía del pensamiento, o sólo pereza. Un antiquísimo ejemplo es la solución de la ecuación de segundo grado, digamos

$$x^2 + 2bx + c = 0\,,^*$$

donde b y c son números reales. Lo que se busca es un número real x que satisfaga esta ecuación. Desde hace varios siglos se expresa a x en términos de b y c por medio de la fórmula

$$x = -b \pm \sqrt{b^2 - c}\,.$$

Si $b^2 > c$, puede extraerse la raíz cuadrada y se obtienen dos soluciones. Si $b^2 = c$, se dice que $x = -b$ es una solución doble. Pero si $b^2 < c$, entonces no puede extraerse la raíz y se dice, al menos en la escuela secundaria, que no hay solución. Durante el siglo dieciséis se establecieron fórmulas tales para ecuaciones de tercero o incluso de cuarto grado, por ejemplo, para una

*En México es más usual poner la ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y su solución darla por $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ecuación como

$$x^3 + ax + b = 0\,.$$

No voy a dar una tal fórmula. Contiene raíces cuadradas y cúbicas llamadas radicales. Pero en este contexto se descubrió un fenómeno muy notable al que se le llamó *casus irreducibilis*. Cuando una tal ecuación tiene tres soluciones reales distintas, por ejemplo

$$x^3 - 3x + 1 = 0\,,$$

y si se aplica la fórmula que en principio permite calcular las soluciones a partir de los coeficientes, se encuentra uno con raíces cuadradas de números negativos que, en primera instancia, no tienen sentido. Pero olvidándose de que éstas no existen y no asustándose de calcular con ellas, se eliminan al final del cálculo y se obtienen las soluciones, en el supuesto, claro, de que se sigan cuidadosamente ciertas reglas formales. Tales raíces de números negativos fueron llamadas entonces *números imaginarios*, a diferencia de los números reales, y hubo fuertes disputas respecto a si era válido utilizar tales números no reales; René Descartes (1596-1650), por ejemplo, no quería tener nada que ver con ellos. Fue por primera vez alrededor del año 1800 que esta cuestión se aclaró de manera satisfactoria, al menos para algunos. Se considera la totalidad de los puntos del plano, o sea, parejas de números reales, y se introducen ciertas operaciones entre ellos que constituyen una generalización natural de las cuatro operaciones básicas. Se habla entonces de los números complejos o imaginarios. Formalmente es posible calcular con estos objetos matemáticos de manera casi igual de sencilla que con los números ordinarios, y se obtienen soluciones que a veces resultan reales y a veces complejas. En el caso de la ecuación de segundo grado, anterior diremos ahora que hay dos soluciones complejas si $b^2 < c$.

Esto, naturalmente, es en parte una convención; pero no fue nada fácil darles a estos números complejos el mismo derecho a existir que a los números reales y no sólo considerarlos como mera herramienta para calcular números reales. De hecho, no se tenía entoces una definición rigurosa de los números reales, pero su estrecha relación con medidas o cálculos prácticos les dio una cierta realidad a pesar de las dificultades con los números irracionales o con los negativos. Sin embargo, con los números complejos no fue éste el caso. Fue, de principio, un nuevo paso para poner en primer plano esta creación puramente intelectual. Conforme algunos matemáticos se fueron familiarizando con esto, observaron que muchas operaciones con funciones, como polinomios, funciones trigonométricas, etcétera, seguían teniendo sentido al admitir números complejos como argumento. Éste fue el principio del análisis complejo o teoría de funciones. Ya en 1811, el matemático CARL-FRIEDRICH GAUSS (1777-1855) señaló la necesidad de desarrollar una tal teoría en sí misma:

> *Es ist hier nicht von praktischem Nutzen die Rede, sondern die Analyse ist mir eine selbstständige Wissenschaft, die durch Zurücksetzung jener fingierten Größen (der komplexen Zahlen) außerordentlich an Schönheit und Rundung verlieren würde.*[3]

Aparentemente no previó que posteriormente este análisis complejo iba a encontrar muchas aplicaciones prácticas, por ejemplo en la teoría eléctrica o en la aerodinámica.

Pero éste no es el final. Permítanme mencionar dos pasos más hacia una mayor abstracción. Regresemos a nuestra ecuación de segundo grado. Ahora se puede decir que, en general, tiene dos soluciones que quizá sean números complejos. De forma análoga, una ecuación de grado n tiene siempre n soluciones, si se admiten números complejos.[†] Desde el siglo dieciséis se ha preguntado si hay también una fórmula general que de una regla fija para expresar por medio de radicales las soluciones de una ecuación de quinto grado o mayor en términos de los coeficientes. Finalmente se demostró que esto es imposible. Una demostración (cronológicamente en realidad la tercera) la dio el matemático francés ÉVARISTE GALOIS (1811-1832) en el marco de una teoría más general que, en su tiempo, nadie entendió y la cual fue olvidada entonces. Unos quince años después se redescubrieron sus trabajos y sólo con el mayor esfuerzo unos pocos los entendieron; así de novel era el punto de vista. GALOIS consideraba de una ecuación el conjunto de aquellas permutaciones de las raíces que mantenían ciertas relaciones entre ellas y probó que ciertas propiedades de este conjunto son decisivas. Ése fue entonces el principio de un estudio independiente de tales conjuntos de permutaciones a los que GALOIS llamó grupos. Probó que una ecuación puede resolverse por radicales si y sólo si el grupo asociado pertenece a una clase especial, a saber, a aquélla de los grupos solubles, como se les llamó después. El teorema sobre ecuaciones cuyo grado es al menos cinco, que se mencionó anteriormente, se obtiene del hecho de que el grupo de una ecuación general de grado n sólo

[†]Éste es el famoso 'teorema fundamental del álgebra'.

es soluble para $n = 1, 2, 3, 4$.[4] Las propiedades importantes de tales grupos son, en realidad, independientes de la naturaleza de los objetos que se permutan y esto condujo al concepto de *grupo abstracto* y a teoremas de gran trascendencia que son aplicables en muchas partes de las matemáticas. Pero durante mucho tiempo esto no pareció ser más que matemática pura y muy abstracta. Cuando un matemático y un físico, alrededor del año 1910 discutían el plan de estudios de Física en la Universidad de Princeton, dijo el físico que ciertamente podían prescindir de la teoría de grupos ya que ésta nunca iba a tener aplicaciones en la física.[5] Poco menos de veinte años después aparecieron tres libros sobre teoría de grupos y mecánica cuántica, y desde entonces los grupos son fundamentales para la física.

Un último ejemplo sería el siguiente. Ya dije que podemos ver a los números complejos como puntos del plano. Un matemático irlandés, WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805-1865), se preguntó si sería posible definir entre los puntos del espacio tridimensional un análogo a las cuatro operaciones básicas y poder así formar un sistema numérico aún más amplio. Después de diez años de reflexiones constantes halló la respuesta: no es posible en el tridimensional, pero sí en el de dimensión cuatro. No necesitamos imaginarnos geométricamente al espacio de cuatro dimensiones. Se trata simplemente de una forma de hablar de cuartetas de números reales, en vez de ternas o de parejas. A estos nuevos números los llamó *cuaterniones*. Pero tuvo que renunciar a una propiedad de los números reales y los complejos, que hasta entonces no se consideraba sujeta a discusión, la conmutatividad –o sea, que $a \times b = b \times a$. También probó que este cálculo tenía aplicaciones en el tratamiento matemático de cuestiones de la física o la mecánica. Después se definieron muchos otros sitemas algebraicos con un producto no conmutativo, en particular, las álgebras de matrices. Nuevamente parecía ser esto matemáticas muy abstractas, sin relación con el mundo exterior. Pero MAX BORN (1872-1970), al meditar en 1925 acerca de ciertos planteamientos de WERNER HEISENBERG (1901-1976), descubrió repentinamente que el formalismo adecuado para expresarlos era precisamente el cálculo matricial y que se tienen que representar magnitudes físicas por objetos algebraicos que no siempre conmutan entre sí. Esto condujo a las relaciones de incertidumbre y fue el comienzo de la mecánica cuántica matricial y de la asignación de operadores a magnitudes físicas, lo que es la base de la mecánica cuántica.[6]

Con este ejemplo concluyo las consideraciones respecto del objeto de la matemática. Por supuesto, son muy incompletas y de ningún modo representativas de todas las partes de las matemáticas. No obstante, los ejemplos dados tienen dos aspectos que deseo hacer resaltar y que tienen amplia validez. En primer lugar, este desarrollo conduce hacia una mayor abstracción, cada vez más alejada de la naturaleza. En segundo lugar, hay teorías abstractas, creadas de manera independiente, que han hallado, a veces de modo inesperado, importantes aplicaciones a las ciencias naturales. De hecho, la adaptabilidad de las matemáticas a las necesidades de las ciencias naturales es asombrosamente grande (alguna vez cierto físico hablaba de la "irracional efectividad de las matemáticas"[7]), y sería digna de una discusión detallada, la cual, desgraciadamente, tengo que omitir.

El paso a una mayor abstracción no era evidente, como ya ustedes pudieron ver en la cita a Gauss. Las matemáticas se desarrollaron en primer lugar para fines prácticos como contabilidad, medición, mecánica; e incluso los grandes inventos del siglo diecisiete, como el cálculo infinitesimal e integral, fueron en principio básicamente herramientas para resolver problemas de la mecánica, la astronomía y la física. El matemático Leonhard Euler (1707-1783), quien tuvo influencia en todos los ámbitos de las matemáticas y de sus aplicaciones, incluyendo la construcción de barcos, también escribió trabajos sobre teoría de números pura y varias veces sintió la necesidad de explicar que esto era tan justificado e importante como los trabajos orientados más hacia la práctica.[8] Naturalmente fueron las matemáticas, desde un principio, una cierta idealización, pero por mucho tiempo no estuvieron tan alejadas de la realidad o, mejor dicho, de nuestra concepción de la realidad, como es el caso de los conceptos mencionados anteriormente. Al seguir los matemáticos este camino fueron haciéndose cada vez más conscientes de que un concepto matemático tiene derecho a existir por el solo hecho de haber sido definido consecuentemente, sin necesidad de que deba tener conexión con el mundo físico, y tiene derecho a ser estudiado aun cuando parezca no tener aplicaciones prácticas. En pocas palabras, se fue yendo cada vez más hacia las "matemáticas puras" o "matemáticas por las matemáticas". Pero al querer ejercer un control sobre la aplicabilidad práctica, surge inmediatamente la pregunta: ¿Cómo juzgar el valor relativo? Seguramente no todos los conceptos ni todos los teoremas tienen los mismos derechos. Como en el *Animal Farm* [Rebelión en la granja] de George Orwell (1903-1950), deben de ser algunos "más iguales" que otros. ¿Habrá pues criterios intrínsecos que conduzcan hacia una jerarquización, hasta cierto punto, objetiva? Como ustedes observarán, la misma pregunta puede formularse para la pintura, la música, el arte; es pues una cuestión estética. De hecho, una respuesta usual es que las matemáticas son, en gran parte, un arte cuyo desarrollo se orienta y se juzga básicamente por ciertos criterios estéticos. A los legos puede resultarles sorprendente que en un tema tan inaccesible, como lo son las matemáticas, pueda hablarse de criterios de belleza. Sin embargo, para el matemático, es éste un sentimiento muy fuerte, aunque no fácil de explicar. ¿Cuáles son las reglas de esta estética? ¿En qué consiste la belleza de un teorema, de una teoría? Desde luego, no hay una respuesta que satisfaga a todos los matemáticos; sin embargo, hay un sorprendente grado de coincidencia que me parece mucho mayor que el que hay en la música o en la pintura. Sin querer decir que puedo explicarlo completamente, trataré de decir ahora algo más preciso. Por lo pronto me contentaré con afirmar que muchos matemáticos coinciden en aceptar la analogía con el arte. Por ejemplo, el matemático inglés Godfrey Harold Hardy (1877-1947) opinaba que el derecho a existir de las matemáticas, si lo tienen, sólo es posible como un arte.[9] Nuestra actividad tiene mucho más en común con la de un artista: Un pintor combina colores y formas; un músico, sonidos; un poeta, palabras; y nosotros, un cierto tipo de ideas. El pintor Edgar Dégas (1834-1917) también escribió ocasionalmente sonetos. Alguna vez al conversar con el poeta Stéphane Mallarmé (1842-1898), se quejaba de que esto le resultaba muy difícil, aun cuando tenía muchas ideas, de hecho, un exceso de ideas. Mallarmé le contestó que los poemas se hacen con palabras, no con ideas.[10] Por el contrario, nosotros trabajamos con ideas. Este sentimiento de arte se refuerza aún más al pensar cómo trabaja y progresa un investigador: No hay que imaginarse que el matemático procede de manera completamente lógica y sistemática. A veces tentalea en la completa oscuridad, no tiene idea de si una cierta afirmación debe probarse o refutarse, y a veces se le ocurren ideas esenciales de modo totalmente inesperado, aunque incluso después no pueda ver un claro camino lógico hacia las consideraciones previas. Como en el caso de un compositor o de un artista, podría hablarse de inspiración.[11] Lo que encuentra el matemático es a veces tan inesperado que casi podría decir, como Auguste Rodin (1840-1917), que apenas supo lo que buscaba una vez que ya lo había encontrado.

Otros matemáticos, sin embargo, se oponen a tal opinión y afirman que ocuparse de las matemáticas sin conducirse por las necesidades de las ciencias naturales es peligroso y lleva casi con seguridad a teorías que quizá sean sutiles y le produzcan al espíritu un placer especial, pero que representan una especie de juego mental, que desde el punto de vista de la ciencia o de la epistemología carecen completamente de valor. Por ejemplo, el matemático John von Neumann (1903-1957) escribió en 1947[12]:

As a mathematical discipline travels far from its empirical sources, or still more, if it is second or third generation only indirectly inspired by ideas coming from 'reality', it is beset with very grave dangers. It becomes more and more purely aestheticizing, more and more purely l'art pour l'art*... there is a great danger that the subject will develop along the line of least resistance..., will separate into a multitude of insignificant branches...*
... In any event..., the only remedy seems to me to be the rejuvenating return to the source: reinjection of more or less directly empirical ideas.

Igualmente, otros toman una posición intermedia: reconocen completamente la importancia de este lado estético de las matemáticas, sin embargo, sienten que es peligroso dejarse llevar demasiado lejos por las matemáticas en sí mismas. Por ejemplo, Henri Poincaré (1854-1912) escribió[13]:

Et surtout leurs adeptes y trouvent des jouissances analogues à celles que donnent le peinture et la musique. Ils admirent la délicate harmonie des nombres et des formes; ils s'émerveillent quand une découverte nouvelle leur ouvre une perspective inattendue; el la joie qu'ils épreuvent ainsi n'a-t-elle pas le caractère esthétique, bien que les sens n'y prennent aucune part?...
C'est pourquoi je n'hésite pas à dire que les mathématiques méritent d'être cultivées pour elles-mêmes et que les théories qui ne peuvent être apliquées à la physique divevent être comme les autres

Pero algunas páginas más adelante regresa a este símil y añade[14]:

Si l'on veut me permettre de porsuivre ma comparaison avec les beaux-arts, le mathématicien pur qui oublierait l'existence du monde extérieur serait semblable à un peintre qui saurait harmonieusement combiner les couleurs et les formes, mais a qui les modèles feraient défaut. Sa puissance créatrice serait bientôt tarie.

Esta negación de la posible existencia de la pintura abstracta me parece especialmente digna de mención, dado que nos encontramos en Múnich, donde más o menos en la misma época un artista se ocupara muy profundamente de la misma pregunta: Vasili Kandinski (1866-1944). Fue alrededor de 1903 cuando, contemplando una de sus propias pinturas, concluyó repentinamente que el objeto puede resultarle perjudicial a una pintura, digamos que porque resulta ser un obstáculo al acceso directo a las formas y colores, es decir, porque representa un obstáculo a las propias cualidades pictóricas de la obra. Pero como él después escribiera,[15] se le planteó un "aterrorizante abismo", una gran cantidad de preguntas; la más importante: "¿Qué es lo que debe sustituir al objeto faltante?" KANDINSKI estaba completamente consciente del peligro de una pintura puramente decorativa, de adorno, y quería evitarla a toda costa. A diferencia de POINCARÉ, no concluyó que una pintura sin objeto real pudiese resultar estéril. Como ustedes saben, desarrolló una teoría de la "necesidad interior" y del "contenido espiritual". Y desde 1910, tanto él como como otros pintores, se dedicaron en número creciente a la llamada pintura abstracta o pura, que tenía poca o ninguna relación con la naturaleza.

Si no se desea admitir la posibilidad análoga dentro de las matemáticas, se llega a una concepción de éstas que deseo describir ahora sucintamente: Por un lado, que sean éstas una ciencia, pues uno de sus fines principales es servir a la investigación de la naturaleza o a la técnica. Que este fin esté en el origen de las matemáticas y sea siempre una de las principales fuentes de problemas. Por otro lado, que sean un arte, pues en realidad son una creación del espíritu que se fomenta con medios espirituales o intelectuales, muchos de los cuales vienen de lo más profundo del espíritu humano, donde, en cierta forma, son los criterios estéticos los que dictan la pauta. Pero esta libertad intelectual de moverse en un mundo de pensamiento puro debería estar limitada hasta cierta medida, o ser controlada por eventuales posibilidades de aplicación en las ciencias naturales.

Una tal imagen es, sin embargo, demasiado limitada; la última cláusula es demasiado restrictiva y muchos matemáticos han pugnado por una completa libertad en su actividad. En primer lugar, como ya se dijo antes, muchas partes de las matemáticas que han resultado importantes en las aplicaciones, no se habrían desarrollado, si desde un principio se hubiera insistido en la aplicabilidad. A pesar de la cita anterior, VON NEUMANN señaló esto expresamente en una conferencia posterior, en la que declaró que en toda la ciencia es cierto que a menudo se tiene éxito al dejarse llevar exclusivamente por criterios de elegancia intelectual, y al oponerse a estudiar cosas con el fin único de ganar algo.[16]

> *But still a large part of mathematics which became useful developed with absolutely no desire to be useful, and in a situation where nobody could pos-*

sibly know in what area it would become useful: and there were no general indications that it even would be so... This is true of all science. Successes were largely due to forgetting completely about what one ultimately wanted, or whether one wanted anything ultimately; in refusing to investigate things which profit, and on relying solely on guidance by criteria of intellectual ellegance; ... And I think it extremely instructive to watch the role of science in everyday life, and to note how in this area the principle of laissez faire *has led to strange and wonderful results.*

En segundo lugar y para mí más importante, es que hay partes de las matemáticas puras que hasta ahora no han tenido aplicaciones, o han tenido pocas, fuera de las matemáticas, las cuales, no obstante, son de apreciarse como grandes logros. Pienso, por ejemplo, en la teoría de los números algebraicos, en la teoría de los campos de clase, en las funciones automorfas, en los números transfinitos, etcétera.

Regresemos al símil con la pintura y tomemos como objeto los problemas que conciernen al mundo físico. Primero vemos que hay pintura según la naturaleza, pero también hay pintura pura o abstracta.

Sin embargo, esta comparación no es del todo satisfactoria, ya que una tal descripción de las matemáticas no abarca algunos de sus rasgos esenciales, por ejemplo, la coherencia y la unidad de las matemáticas. De hecho, las matemáticas presentan una coherencia que me parece mayor que la de las artes. Esto resulta claro al pensar que hay teoremas que son demostrados independientemente por matemáticos que residen en lugares muy distantes, o por el hecho de que hay un considerable número de trabajos que tienen dos y a veces más autores. También ocurre que hay partes de las matemáticas que, habiendo sido desarrolladas de manera totalmente independiente, de repente presentan profundas relaciones, bajo el efecto de nuevos puntos de vista. Las matemáticas son, en gran medida, un trabajo colectivo. Las simplificaciones, las unificaciones, mantienen el equilibrio frente al interminable desarrollo y entendimiento; cada vez más, muestran una notable unidad, aunque las matemáticas son demasiado grandes como para ser dominadas por un solo individuo. Me parece difícil poder rendir cuenta completa de estas características con sólo referirme a los criterios mencionados hasta ahora, es decir, a conceptos tan subjetivos, como elegancia y belleza intelectual, o a la consideración de las necesidades de las ciencias naturales y de la técnica. Es así que se llega a la pregunta de si hay otros criterios y lineamientos que los dados anteriormente. Según mi opinión, sí es éste el caso, y deseo ahora completar la descripción de las matemáticas con un componente esencial e iluminarla con un tercer punto de vista. Como preparación para esto, quiero desviarme o, al menos, aparentemente desviarme del tema y ocuparme de la pregunta: ¿Tienen las matemáticas una existencia propia? ¿Creamos matemáticas o sólo descubrimos, una tras otra, teorías que en alguna parte existen independientemente de nosotros? Si es así, ¿dónde está el lugar de esta realidad matemática? Por supuesto, no es claro si una tal pregunta realmente tiene sentido. Sin embargo, el sentimiento de que las matemáticas de alguna forma "preexisten" está ampliamente difundido. Por ejemplo, HARDY lo expresa de forma muy aguda[17]:

> *I believe that mathematical reality lies outside us, that our function is to discover or* observe *it, and that the theorems which we prove, and which we describe grandiloquently as our 'creations', are simply our notes of our observations. This view has been held, in one form or another, by many philosophers of high reputation, from Plato onwards, ...*

Si se es creyente, puede verse esta realidad matemática preexistente en Dios. En realidad ésta era la opinión de CHARLES HERMITE (1822-1901), quien alguna vez dijera[18]:

> *Il existe, si je ne me trompe, tout un monde qui est l'ensamble de vérités mathématiques, dans lequel nous n'avons accès que par l'intelligence, comme il existe un monde des réalités physiques, l'un et l'autre indépendent de nous, tous deux de création divine.*

No hace mucho que un colega declarara en una clase introductoria, que durante mucho tiempo lo había ocupado la siguiente pregunta: *"Why has God created the exceptional series?"* ["¿Por qué creó Dios la serie excepcional?"].

Referir a un origen divino no va a satisfacer a un no creyente. Pero habrá no creyentes que oscuramente sienten que las matemáticas existen en alguna parte, aunque si lo meditan, no podrán evitar concluir que son éstas una creación humana.

Tales preguntas pueden formularse para muchos otros conceptos, como estado, valores morales, religión, etcétera, y serían dignas de una conferencia especial. Por falta de tiempo y de competencia, tendré que conformarme con una respuesta corta, quizá demasiado simple, a este dilema aparente, y tendré que adherirme a la tesis que sostiene que tendemos a darle una existencia a todo aquello que pertenece a una cultura, en el sentido de que lo compartimos con otra gente y podemos intercambiar opiniones al respecto. Algo se vuelve objetivo (en contraposición a lo "subjetivo") cuando estamos convencidos de que existe dentro del cúmulo de ideas de otras personas, en la misma forma que en el nuestro, y de que podemos reflexionar y discutir juntos al respecto.[19] Siendo el lenguaje matemático tan preciso, es ideal para describir conceptos sobre los cuales existe un tal consenso. Según mi opinión, esto basta para darnos la sensación de una existencia objetiva de una realidad de las matemáticas, como se lee en las referencias anteriores a Hardy y Hermite, pero esto es irrelevante para la continuación de esta discusión.

Antes de continuar, deseo observar de pasada que pensamientos semejantes sobre nuestra concepción ya han sido expresados. Por ejemplo, Poincaré escribió[20]:

> *Ce qui nous garantit l'objectivité du monde dans lequel nous vivons, c'est que ce monde nous est commun avec d'autres êtres pensants...*
> *Telle est donc la première condition de l'objectivité: ce qui est objectif doit être commun à plusieurs esprits et par conséquent pouvoir être transmis de l'un à l'autre...*

y Albert Einstein (1879-1955)[21]:

> *Verschiedene Menschen können mit Hilfe der Sprache ihre Erlebnisse bis zu einem gewissen Grade miteinander vergleichen. Dabei zeigt sich, daß gewisse sinnliche Erlebnisse verschiedener Menschen einander entsprechen, während bei anderen ein solches Entsprechen nicht festgestellt werden kann. Jenen sinnlichen Erlebnissen verschiedener Individuen, welche einander entsprechen und demnach in gewissem Sinne überpersönlich sind, wird eine Realität bedanklich zugeordnet.*

Volvamos a las matemáticas. Los matemáticos tienen pues una realidad intelectual común, un gran acervo de conceptos y objetos matemáticos, en parte conocidos y en parte desconocidos, teorías, teoremas, problemas resueltos y no resueltos, todos ellos estudiados con herramientas intelectuales. Estos problemas y conceptos fueron parcialmente sugeridos por el mundo físico, pero también, en gran parte, por consideraciones puramente matemáticas, como por ejemplo, el concepto de los cuaterniones. Este acervo, aunque proveniente del intelecto humano, obra en nosotros como una ciencia en el sentido usual, digamos, como la física y la biología, y para nosotros es tan concreto como estas ciencias. Incluso, quiero afirmar que no sólo tiene un aspecto teórico, sino también uno experimental. El primer aspecto es claro: buscamos teoremas, principios, demostraciones y métodos generales de solución. Ésta es la teoría. Pero a menudo no se tiene una idea, al principio, de lo que se debe esperar y cómo se debe proceder, y se empieza a adquirir intuición y comprensión al experimentar, es decir, al considerar casos especiales. Se espera así, primero, llegar a una conjetura razonable y, segundo, quizá topar con una idea que parezca ser generalizable. Por supuesto, también pasa que ciertos casos especiales son en sí de gran interés. Éste es el aspecto experimental. El que trabajemos con objetos intelectuales, en vez de con objetos y aparatos reales en un laboratorio, en realidad, resulta irrelevante. La sensación de que las matemáticas sean, en este sentido, una ciencia experimental, tampoco es tan nueva. Ya HERMITE le había escrito a LEO KÖNIGSBERGER (1837-1921) alrededor de 1880 que[22]:

> *Le sentiment exprimé dans ce passage de votre lettre où vous me dite "plus je réfléchis sur tous ces choses, plus je reconnais que les mathématiques forment une science expérimentale aussi bien que toutes les autres sciences..." ce sentiment, dis-je, est aussi le mien.*

Tradicionalmente estos experimentos se han realizado en la cabeza o con papel y lápiz, y por eso hablé de herramientas intelectuales. Debería, sin embargo, agregar que desde hace unos veinte años, aparatos auténticos comienzan a jugar un papel cada vez mayor en esta situación; me refiero a las computadoras. Éstas en realidad le han dado a este aspecto experimental de las matemáticas una nueva dimensión. Ha llegado esto tan lejos, que se puede hablar de importantes y fascinantes influencias mutuas entre ciencias de la computación y matemáticas puras. Esto no es esencial para mi discusión y ya no continuaré en esta línea.

Ahora adquiere la palabra "ciencia" en mi título una connotación más amplia. Ya no sólo se refiere, como antes, a las ciencias naturales, sino también, y en mucho mayor medida, a la concepción de las matemáticas mismas como ciencia experimental y teórica; tal vez querría decir, como una ciencia natural intelectual.

Esto me facilita hablar sobre motivación y estética. Aun si no se quieren considerar aplicaciones a las ciencias naturales, no se tiene que caer sólo en elegancia intelectual. Quedan aún criterios casi prácticos, a saber, la aplicabilidad de la ciencia matemática misma. La consideración de esta realidad matemática, de los problemas abiertos, de la estructura, necesidades y conexiones de diversas partes, ya nos indica posibles direcciones fértiles y valiosas, y le permite al matemático orientarse y darles a teorías y problemas valores relativos. A menudo se considera como piedra de toque para valorar una nueva teoría general, si ésta puede resolver viejos problemas. Esto, de hecho, limita la libertad del matemático comparablemente, digamos, con la de un físico, que no elige de manera totalmente arbitraria los fenómenos sobre los que ha de formular una teoría, o sobre los que desea realizar experimentos. Como muchos ejemplos muestran, se le ha permitido al matemático prever cómo se habrían de desarrollar ciertas partes de las matemáticas, qué problemas deberían considerarse y posiblemente ser pronto resueltos. Muchas opiniones acerca del futuro de las matemáticas han resultado frecuentemente atinadas. No es esto infalible, pero sí suficientemente exitoso como para indicar una diferencia con el arte. Consideraciones análogas y también relativamente exitosas sobre la pintura, por ejemplo, casi no las hay.

Pero no deseo continuar con esto. La concepción de las matemáticas como una "ciencia natural intelectual"[‡] la he propuesto como uno de tres componentes y no como un todo.

Por un lado, no quiero subestimar la importancia de la interacción de las matemáticas con las ciencias naturales. En primer lugar suele decirse, ya desde hace varios siglos, que todas las disciplinas de las ciencias naturales deben aspirar a tener una formulación y un tratamiento matemático, e incluso que una tal disciplina no es una ciencia propiamente dicha, si no ha logrado esto. Es así, pues, importante que los matemáticos se preocupen de contribuir a ello. En segundo lugar, no hay duda alguna de que formular y tratar matemáticamente fenómenos complicados, así como los nuevos problemas que de ello surgen, representa un gran enriquecimiento para las matemáticas. Piénsese, por ejemplo, en el cálculo de probabilidades. Yo afirmo que simplemente no es necesario concederle la primacía a esta idea de la aplicabilidad para realizar matemáticas. La historia de las matemáticas demuestra que muchos de los grandes logros provienen de matemáticos que jamás pensaron en aplicaciones externas, y sólo se dejaron llevar por consideraciones puramente matemáticas. Y como ya se mencionó e ilustró, muchas de las contribuciones han encontrado importantes aplicaciones en la ciencia o en la

[‡]En alemán: *geistige Naturwissenschaft.*

técnica, algunas veces, incluso, de manera completamente imprevista.

Por otro lado, no afirmo que todo pueda preverse de manera completamente racional. De hecho, en las ciencias naturales no es éste el caso, pues a veces ni siquiera se sabe de antemano qué experimentos serán interesantes. Excelentes matemáticos se han equivocado incluso en cuanto a la aplicabilidad dentro de las propias matemáticas; han calificado algunas veces ciertas ideas nuevas como estériles, nimias y hasta peligrosas, ideas que después han resultado fundamentales. La libertad de no pensar en aplicaciones prácticas, que exigiera von Neumann para toda la ciencia, debe también exigirse dentro de las matemáticas.

Contra esta analogía de las matemáticas con una ciencia natural, podría afirmarse que pasa por alto una diferencia esencial: en las ciencias naturales o en la técnica topa uno con problemas que deben resolverse a como dé lugar para poder seguir adelante. En este mundo de ideas matemáticas, sin embargo, se tiene *de jure* la libertad de relegar problemas difíciles, aparentemente insolubles, y pasar a otros más prometedores; es decir, en cierta forma, quizá seguir líneas de mínima resistencia, completamente como lo temiera von Neumann. ¿No sería esto una gran tentación para un matemático que defina las matemáticas como "el arte de encontrar problemas que se puedan resolver"? Curiosamente escuché esta definición de un matemático cuyos trabajos son excepcionalmente admirables, porque tratan tantos problemas que en su tiempo fueron completamente especiales, pero que después resultaron fundamentales, y cuyas soluciones abrieron nuevos caminos, me refiero a Heinz Hopf (1894-1971). Sin embargo, no puede negarse que a menudo líneas de poca resistencia conducen a trabajos completamente triviales o insignificantes. También sucede que una escuela exitosa después caiga en un periodo estéril e incluso en casos extremos tenga una influencia dañina. Pero curiosamente siempre aparece un antídoto, una reacción que la neutraliza y que elimina estos extravíos y estas direcciones estériles. Hasta ahora, las matemáticas siempre han podido superar estas enfermedades del crecimiento y estoy convencido de que mientras haya matemáticos talentosos, siempre será así. Sin embargo, es muy curioso: muchos de nosotros tenemos esta sensación de una unidad de las matemáticas, pero resulta peligroso prescribir, en nombre de esta unidad, lineamientos demasiado precisos. Es más importante que reine la libertad, a pesar del abuso ocasional. Por qué es esto tan conveniente, no se puede explicar completamente. Pensando, por ejemplo, en Hopf, puede hasta cierto punto justificarse, digamos, lógicamente, su selección de problemas: en muchos casos eran los primeros casos especiales de un problema general, al cual no se le podían aplicar los métodos conocidos. Naturalmente estaba consciente de esto. Pero esto no explica todo. Probablemente no siempre previó cuánta influencia iban a tener sus trabajos, y ciertamente, tampoco le preocupó. Simplemente es parte del talento en las matemáticas el resultar atraído a buenos problemas. El matemático es llevado a esto, en parte, por pura curiosidad, por instinto, por intuición o por puras consideraciones estéticas. Esto me lleva ahora a mi último objetivo, la sensación estética en las matemáticas.

Ya mencioné la concepción de las matemáticas como un arte, una poesía de ideas. De esto se concluye que para apreciar, para disfrutar de las matemáticas, se requiere de un singular sentido de elegancia intelectual y belleza de las ideas en un peculiar mundo de pensamientos. No es sorprendente que esto casi no pueda comunicárseles a los no matemáticos: nuestros poemas están escritos en un idioma especial, el lenguaje matemático; aunque éste se expresa en muchos de los idiomas usuales, es muy particular y en ningún otro traducible. Y desafortunadamente estos poemas pueden entenderse solamente en su idioma original. La similitud con un arte es clara: para poder apreciar la música o la pintura se requiere de una cierta preparación, es decir, aprender un cierto idioma.

Tales opiniones y analogías las he aceptado siempre. Sin que se haya alterado mi posición fundamental frente a las matemáticas, deseo modificarla un poco en la dirección de mis observaciones anteriores. Creo que nuestra estética no es siempre tan pura y esotérica, y posee también un poco de factores terrenales, como significado, trascendencia, aplicabilidad, utilidad, pero todo esto dentro de la propia ciencia matemática. Nuestro juicio sobre un teorema, una teoría, una demostración, también recibe una influencia de esto, pero frecuentemente se le equipara simplemente con lo estético. Quiero tratar de ilustrar con el ejemplo de la anteriormente mencionada teoría de Galois. Esta teoría es considerada como uno de los más hermosos capítulos de las matemáticas. ¿Por qué? En primer lugar, resuelve una cuestión muy antigua, y en su tiempo también la más importante, sobre ecuaciones. En segundo lugar, es una teoría sumamente vasta, que va mucho más allá de la cuestión original acerca de la solubilidad por radicales. En tercer lugar, descansa sobre pocos teoremas fundamentales de gran elegancia y simplicidad, que se formulan en nuevo marco, con nuevos conceptos, que gozan de gran originalidad. En cuarto lugar, estos conceptos y nuevos puntos de vista, en especial el concepto de grupo, han abierto nuevos caminos y han tenido profunda influencia en toda la matemática.

Observarán ustedes que entre estos cuatro puntos, sólo el tercero es un auténtico juicio estético, sobre el que sólo se puede tener una opinión al haber entendido los detalles técnicos de la teoría. Los otros puntos tienen un carácter distinto. Tales afirmaciones pueden también hacerse sobre teorías en cualquier ciencia natural. Tienen un mayor contenido objetivo y cualquier matemático puede tener su propia opinión al respecto, aun cuando técnicamente no domine toda la teoría. Para las finalidades de esta discusión quise separar estos cuatro componentes, pero normalmente no lo haría de manera explícita, y de hecho, los cuatro contribuyen a dar la impresión de belleza. Yo creo que en tal forma, este ejemplo es bastante típico: lo que designamos como estético es, en realidad, una amalgama de diversas consideraciones. Por ejemplo, claramente voy a considerar un método de investigación como más bello, si tiene nuevas aplicaciones inesperadas, aun cuando el método no se haya alterado. Se ha hecho más importante, pero considerado en sí, no más bello. Como todo sucede dentro de las matemáticas, esto casi no va a ayudar al no matemático a penetrar en nuestro mundo estético. Ojalá que, sin embargo, le haga plausible que nuestros juicios, llamados estéticos, cuenten con un consenso mayor que los del arte, un consenso que, en enorme medida, supera fornteras geográficas y cronológicas. En cualquier caso, considero este hecho como una razón fundamental. Igualmente, también tengo que cuidarme de ir demasiado lejos respecto a esto. Es una cuestión de hasta qué grado, y no de una diferencia absoluta. Un juicio estético sobre la obra de un compositor o de un pintor también toma en cuenta factores externos, como influencia, sus antecesores, o sea, pues, cómo se ubica la obra en el contexto general; esto, sin embargo, en escasa medida. Por otro lado, también hay diferencias de opinión y variaciones temporales en la apreciación de obras matemáticas, pero esto, quisiera añadir, tampoco en gran medida. Todos estos matices requerirían de muchas aclaraciones, de las cuales debo prescindir por la falta de tiempo.

En el escaso tiempo que me queda, sería ciertamente más cómodo sólo hacer agudas afirmaciones sobre las matemáticas. Pero desgraciada, o afortunadamente, al igual que otras empresas humanas, en las cuales muchas personas, durante muchos siglos, han colaborado, las matemáticas se resisten a ser descritas con unas cuantas fórmulas simples. Casi cualquier afirmación general acerca de las matemáticas debe delimitarse en alguna forma, sin embargo, una excepción, quizá la única, sería esta propia afirmación. Espero, al menos, haber despertado la impresión de que la matemática es una creación extremadamente compleja, que presenta tantos rasgos comunes con el arte y con las ciencias naturales experimentales y teóricas, que debe ser considerada como igual a ellas y también, por ello mismo, distinta de las tres.

Estoy consciente de que he formulado más preguntas que las que he respondido, y de que algunas apenas las he tocado, o ni siquiera eso, por ejemplo, respecto al valor de esta creación. Naturalmente se puede aludir a las innumerables aplicaciones en las ciencias naturales o en la técnica, de las cuales muchas han tenido incluso gran repercusión en nuestra vida diaria y, con ello, justifican socialmente la existencia y la presencia[§] de las matemáticas. Aunque tengo que confesar que como matemático puro me intereso más por la apreciación de las matemáticas en sí. Las contribuciones de los distintos matemáticos se combinan en una gigantesca construcción intelectual que, según mi opinión, representa un altamente imponente testimonio del poder del pensamiento humano. El matemático CARL JACOBI (1804-1851) escribió alguna vez que el único fin de la ciencia es la honra del espíritu humano.[23] Yo creo en el hecho de que esta creación ha honrado grandemente al espíritu humano.

[§]La palabra alemana *Dasein*, acuñada por el filósofo MARTIN HEIDEGGER (1889-1976), significa algo intermedio entre existencia y presencia. Es ésta la palabra utilizada en el texto original.

Notas

[0]En cuanto a esto, deseo agradecerle muy cordialmente al Dr. J. Schwermer por su ayuda en la redacción de este texto.

[1]Se trata aquí de la tesis doctoral de L. Kronecker, cf. *Werke* [Obras], 5 Vols., Teubner, Leipzig 1895-1930, vol. 1, p. 73. El opositor fue G. Eisenstein.

La fuente que yo conozco para el nombre y el juicio del opositor es una nota al calce de E. Lampe a un discurso de P. du Bois-Reymond, *Was will die Mathematik und was will der Mathematiker?* [¿Qué pretenden las matemáticas y qué pretende el matemático?] que como parte de las obras póstumas fue publicado por E. Lampe en el Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 19 (1919), pp. 190–198.

[2]Para una discusión acerca de tales opiniones, véase A. Pringsheim, *Über den Wert und angeblichen Unwert der Mathematik* [Sobre el valor y la presunta falta de valor de las matemáticas], Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 13 (1904), pp. 357–382.

[3]Carta a F. W. Bessel del 18 de octubre de 1811. Véase *Briefwechsel zwischen Gauß und Bessel* [Epistolario entre Gauss y Bessel], G.F. Auwers Verlag, Leipzig 1880, p. 156.

> *No se trata aquí de aplicaciones prácticas, sino de que el análisis es para mí una ciencia independiente que perdería extraordinariamente en belleza y orden con la postergación de aquellas magnitudes fingidas (los números complejos).*

[4]En realidad algunos antecesores de Galois habían ya puesto en marcha ciertas reflexiones que pueden ser consideradas como los albores de la teoría de grupos y que Galois conocía en parte. Pero su punto de vista era tan general y tan abstracto, y para colmo descrito de manera tan sucinta, que sólo pudo ser asimilado muy lentamente. Para información histórica sobre la teoría de ecuaciones y los inicios de la teoría de grupos véase, por ejemplo, N. Bourbaki, *Eléments d'histoire des mathématiques* [Elementos de historia de las matemáticas], Hermann Ed. París 1969, tercero y quinto artículos.

[5]F. J. Dyson, *Mathematics in the Physical Sciences* [Las matemáticas en las ciencias físicas], Scientific American 211, septiembre de 1964, pp. 129–146

[6]Véase la introducción histórica de B. L. van der Waerden en *Sources in Quantum Mechanics* [Fuentes en mecánica cuántica], Classics of Science, Vol. 5, Dover Publ. Nueva York 1967, en particular, pp. 36–38. Cf. también las observaciones de Dirac sobre la introducción de la no conmutatividad en la mecánica cuántica en *loc. cit.*[7]

[7]E. P. Wigner, *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences* [La irracional efectividad de las matemáticas en las ciencias naturales], Communications in Pure and Applied Mathematics 13 (1960) pp. 1–14.

Entre los muchos aspectos de esta reciprocidad me parece especialmente notable el que algunas veces el formalismo matemático conduzca a ideas puramente físicas, esencialmente nuevas. Un conocido ejemplo es el descubrimiento del positrón: En 1928, P. A. M. Dirac formuló las ecuaciones cuántico-relativistas para el movimiento del electrón. Estas ecuaciones admitían también una solución con la misma masa del electrón pero con carga eléctrica opuesta. Los intentos por explicar satisfactoriamente esta solución o por cambiar las ecuaciones para eliminarla fracasaron. Esto llevó a Dirac a conjeturar la existencia de una tal partícula, la cual fue comprobada posteriormente por Anderson. Véase P. A. M. Dirac, *The development of quantum theory* [El desarrollo de la teoría cuántica] (J. R. Oppenheimer's memorial prize acceptance speech), Gordon and Breach, New York 1971.

Un ejemplo nuevo y, de hecho, más amplio sería el uso de las representaciones irreducibles del grupo unitario especial SU(3) en tres variables complejas, que condujo al llamado *eightfold way*. Fue de llamar la atención uno de los primeros éxitos de esta teoría: el descubrimiento de la partícula Ω^-. De manera natural, observando tres de sus números cuánticos característicos, se les asoció a nueve bariones nueve puntos del plano de una configuración matemática muy específica, consistente en diez puntos [que corresponden a los diez pesos de una representación irreducible de SU(3) de dimensión diez]; esto hizo que M. Gell-Mann conjeturara que también al décimo punto debería corresponderle una partícula que habría de tener ciertas propiedades bien determinadas. Unos dos años después esta partícula fue observada. Un desarrollo posterior en este círculo de ideas llevó a la teoría de los "quarks". Para las bases de esta teoría véase J. Dyson, *loc. cit.*[5] y M. Gell-Mann e Y. Ne'eman, *The eightfold way*, W. A. Benjamin, Nueva York 1964.

[8]Véase una serie de trabajos de L. Euler, *Opera omnia* [Obras completas], en particular, I.2, 62–63, 295, 461, 576, I.3, 5.2. Agradezco aquí a A. Weil que haya llamado mi atención hacia ellos. Aquí tenemos un ejemplo, *loc. cit.* pp. 62–63, publicado en 1747:

Auch kümmert ihn [*den Verfasser*] *nicht die Meinung der größten Mathe-*

matiker, die zuweilen behaupten, daß Erkenntnisse dieser Art geradewegs fruchtlos und es nicht wert sind, daß man auf ihre Untersuchung Mühe verwendet. Jede Erkenntnis der Wahrheit ist an sich etwas Herausragendes, auch wenn sie weit vom allgemeinen Gebrauch entfernt zu sein scheint; so sind auch alle Aspekte der Wahrheit, die uns zugänglich sind, so untereinander verbunden, daß keiner grundlos zurückgewiesen werden kann, auch wenn er geradewegs nutzlos scheint. Hinzu kommt, auch wenn irgendein bewiesener Satz nichts zu gegenwärtigem Nutzen beizutragen scheint, daß dennoch die Methode, vermittels der entweder Richtigkeit oder Falschheit herausgefunden wurde, meistens den Weg zu anderen Wahrheiten zu öffnen pflegt, die zu erkennen nüzlicher sind.

Der Verfasser ist sich dessen sicher, daß er nicht nutzlos Mühe und Eifer bei der Erforschung der Beweise gewisser Sätze aufgewandt hat, in denen beachtenswerte Eigenschaften von Teilern von Zahlen erhalten sind.

Diese Lehre von den Teilern nämlich entbehrt nicht jeglicher Anwendung, sondern sie bezeugt sich manchmal in der Analysis, daß sie einen nicht zu verachtenden Nutzen bietet. Weiterhin bezweifelt der Verfasser nicht, daß die angewandte Methode der Betrachtung irgendwann einmal bei anderen bedeutenderen Untersuchungen von nicht geringer Hilfe sein wird.

Tampoco le preocupa [al autor] la opinión de los más grandes matemáticos, que a veces afirman que los conocimientos de este estilo son francamente vanos, y que no vale la pena hacer ningún esfuerzo por estudiarlos. Todo reconocimiento de la verdad es en sí algo sobresaliente, aun cuando parezca estar lejos del uso general; es también así que todos los aspectos de la verdad que nos son accesibles, están de tal forma ligados entre sí, que nadie puede rechazar ninguno sin fundamento, aunque éste parezca francamente inútil. Además, aunque algún teorema demostrado no parezca contribuir en nada a lo actualmente útil, el método con el que se determinó su veracidad o falsedad suele casi siempre abrir la brecha a otras verdades, cuyo conocimiento sea más útil.

El autor está seguro de que no ha derrochado en vano esfuerzo y entusiasmo al estudiar las demostraciones de ciertos teoremas que contienen importantes propiedades de divisores de números.

De hecho, esta teoría de los divisores no carece de aplicaciones, y seguramente alguna vez demostrará en el análisis que tiene aplicaciones no despreciables. Más aún, el autor no tiene duda de que el método de estudio aplicado será alguna vez de no poca ayuda en otros estudios importantes.

[9]G. Hardy, *A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press 1940; reimpreso en 1967 con un prólogo de C. P. Snow, pp. 139–140. Traducción al español: Autojustificación de un matemático, Editorial Ariel, Barcelona, Caracas,

México, 1981, con un prólogo de C. P. Snow.

[10]P. Valéry, *Degas, danse, dessin* [Degas, danza, dibujo], A. Vollard Ed. París 1936; Oeuvres II, La Pléiade, Gallimard éd. París 1966, pp. 1163–1240, especialmente pp. 1207–1209.

[11]Como ilustración tómese el siguiente extracto de una carta de C.-F. Gauß a Olbers, que Gauß escribió el 3 de septiembre de 1805, poco después de que hubiera resuelto un problema, del que se había ocupado por años (el *Zeichen der Gaußschen Summen* [El signo de las sumas de Gauss]):

> *Endlich vor ein Paar Tagen ist's gelungen – aber nicht meinem mühsamen Suchen, sondern bloß durch die Gnade Gottes möchte ich sagen. Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Räthsel gelöst; ich selbst wäre nicht im Stande, den leitenden Faden zwischen dem, was ich vorher wußte, dem womit ich die letzten Versuche gemacht habe, –und dem, wodurch es gelang, nachzuweisen...*

> *Finalmente, hace unos días, lo logré –aunque no gracias a mi intensa búsqueda, sino sólo por la gracia de Dios, debo decir. Como cae un rayo, así se resolvió el acertijo; yo mismo no he podido hallar el hilo conductor entre lo que yo ya sabía, lo que hice durante los últimos intentos, –y aquello por lo que lo logré probar...*

Véase Gauss, *Gesammelte Werke* [Las obras completas], Vol. 10 I pp. 24–25. Debo aquí también mencionar la descripción de H. Poincaré de algunos de sus descubrimientos fundamentales sobre funciones automorfas. H. Poincaré, *L'invention mathématique* [La creación matemática] en Science et Méthode, E. Flammarion Ed., París 1908, Cap. III.

[12]J. von Neumann, *The mathematician* [El matemático] en Robert B. Heywood, The works of the mind, University of Chicago Press 1947, 180–187. Collected Works, 6 Vol. Pergamon New York 1961, I, pp. 1–9:

> *Conforme una disciplina matemática se aleja de sus orígenes empíricos o, incluso, si está inspirada en segunda o tercera generación de manera solamente indirecta por ideas que surgen de la 'realidad', está ésta sujeta a peligros muy graves. Se torna cada vez más y más puramente estetizante, más y más puramente* l'art pour l'art*... hay un gran peligro de que el tema se desarrolle por la línea que ofrece menos resistencia..., en una variedad de ramas insignificantes...*

... En cualquier caso..., me parece que el único remedio es un rejuveneciente retorno a los orígenes: una reinyección de ideas más o menos directamente empíricas.

[13]H. Poincaré, *La Valeur de la Science* [El valor de la ciencia], E. Flammarion, París 1905, Cap. 5 p. 139. En realidad, este capítulo es una reproducción de una plática que sostuvo Poincaré con motivo del Primer Congreso Internacional de Matemáticos, Zürich 1897:

Y, sobre todo, sus adeptos encuentran aquí placeres análogos a los que proporcionan la pintura y la música. Admiran la delicada armonía de los números y de las formas; se maravillan cuando un nuevo descubrimiento les abre perspectivas inesperadas; y la alegría que les produce, ¿no tiene ésta un carácter estético, aunque los sentidos no tomen parte alguna?
Es por esto que no dudo en decir que las matemáticas merecen ser cultivadas por sí mismas y que las teorías que no pueden ser aplicadas a la física lo deben ser tanto como las otras.

[14]loc. cit. p. 147:

Si me permiten continuar con mi comparación con las bellas artes, el matemático puro que olvidare la existencia del mundo exterior, sería como el pintor que sabe combinar armoniosamente colores y formas, pero al que los modelos le hacen falta. Su fuerza creadora se vería pronto agotada.

[15]W. Kandinski, *Rückblick 1901-1913* [Retrospectiva 1901-1913], H. Walden Ed. 1913. Reimpresión de W. Klein Verl. Baden-Baden 1955. Véase pp. 20-21

[16]J. von Neumann, *The role of mathematics in the science and society*, [El papel de las matemáticas en la ciencia y la sociedad], dirigido a los ex-alumnos graduados de Princeton (Princeton Graduate Alumni), junio de 1954. Cf. *Complete Works*, 6 Vol., Pergamon, Nueva York 1961, Vol. VI, pp. 479–490.

Sin embargo, una gran parte de las matemáticas que resultó útil, se desarrolló sin ningún deseo de ser útil y en una situación en la que nadie podía de ninguna maner saber en qué área podría resultar de utilidad; y no había indicaciones generales de que esto iba alguna vez a ser así... Esto es cierto en toda la ciencia. En gran parte se ha tenido éxito olvidando completamente lo que finalmente se quería lograr, o no queriendo obtener nada finalmente. Al rehusarse a investigar cosas que traen una ganancia y confiar exclusivamente en dejarse llevar por cri-

terios de elegancia intelectual;…
…Y yo creo que es sumamente instructivo observar el papel de la ciencia en la vida diaria y notar cómo en esta área el principio de laissez faire *ha conducido a resultados extraños y maravillosos.*

[17]Cf. G. Hardy, *loc. cit.*[9] pp. 123–124.

Yo creo que la realidad matemática yace fuera de nosotros, que nuestra tarea es describirla u observarla*, y que los teoremas que demostramos y describimos grandilocuentemente como 'nuestras creaciones' son sólo las notas de nuestras observaciones. Esta opinión, en una forma u otra, ha sido sostenida por filósofos de gran reputación, de Platón en adelante,…*

[18]G. Darboux, *La vie et l'oeuvre de Charles Hermite* [La vida y obra de Charles Hermite], Revue du Mois, 10.1. 1906, p. 46:

Existe, si no me equivoco, todo un mundo que es el conjunto de todas las verdades matemáticas, al que tenemos acceso sólo por la inteligencia, como también existe un mundo de realidades físicas, el uno, como el otro, independientes de nosotros, ambos de creación divina.

[19]Véase L. White, *The locus of mathematical reality: an anthropological footnote* [La ubicación de la realidad matemática: una nota al calce antropológica], Philosophy of Science 14 (1947), 289–303; también J. R. Newman, *The World of Mathematics* [El mundo de las matemáticas], 4 volúmenes, Simon and Schuster, Nueva York (1956), Vol. 4, pp. 2348–2364.

[20]H. Poincaré, *loc. cit.*[13] p. 262.

Lo que nos garantiza la objetividad del mundo en que vivimos es que este mundo nos es común a todos los seres pensantes…
Tal es pues la primera condición de la objetividad: lo que es objetivo debe ser común a muchos espíritus y, en consecuencia, poder ser transmitido de uno a otro…

[21]A. Einstein, *Vier Vorlesungen über Relativitätstheorie*, [Cuatro lecciones sobre la teoría de la relatividad] impartidas en mayo de 1921 en la Universidad de Princeton, Fr. Vieweg und Sohn, Braunschweig 1922, p. 1. Traducción inglesa en: *The Meaning of Relativity*, Princeton University Press, Princeton 1945:

Con la ayuda del lenguaje pueden distintas personas comparar, hasta cierto grado, sus vivencias. Resulta así que ciertas vivencias sensibles de distintos personas corresponden unas a las otras, mientras que entre otras no puede establecerse una tal correspondencia. A aquellas vivencias sensibles de diversos individuos que se corresponden y que, por tanto son, en cierto sentido, hiperpersonales, puede asociárseles una realidad ideal.

[22]Cf. L. Königsberger, *Die Mathematik eine Geistes- oder Naturwissenschaft* [Las matemáticas, una ciencia humana o natural], Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 23 (1914), pp. 1–12:

El sentimiento expresado en el pasaje de su carta, donde me dice usted: "mientras más reflexiono acerca de todas estas cosas, más reconozco que las matemáticas forman una ciencia experimental, de igual modo que las demás ciencias...", este sentimiento, digo yo, también es el mío.

[23]En una carta del 2 de julio de 1830 a A. M. Legendre, cf. C. G. J. Jacobi, *Gesammelte Werke* [Las obras completas], G. Riemer, Berlín 1881-1891, Vol. 1, pp. 453–455. El pasaje correspondiente reza:

Mais M. Poisson n'aurait pas dû reproduire dans son rapport une phrase peu adroite de feu M. Fourier, où ce derniere nous fait de reproches, à Abel et à moi, de ne pas nous être occupés de préférence du mouvement de la chaleur. Il est vrai que M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication de phénomènes naturels; mais une philosophe comme luit aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde.

Pero el señor Poisson no debería haber reproducido en su informe una frase tan poco atinada del difunto señor Fourier, en la que este último nos reprocha a Abel y a mí no habernos ocupado preferentemente del movimiento del calor. Es cierto que el señor Fourier tenía la opinión de que el fin principal de las matemáticas es la utilidad pública, pero un filósofo como él debería haber sabido que el fin único de la ciencia es la honra del espíritu humano, y que bajo esta divisa, una cuestión de números vale tanto como una cuestión del sistema del mundo.