Universidad Nacional Autónoma de México
Instituto de Matemáticas, Unidad Cuernavaca

II Verano de la Investigación Científica

Reporte de investigación

Transformaciones que preservan medida y Recurrencia

Marina Lizeth Rojas Salazar
Asesor: Angel Cano Cordero

Cuernavaca Morelos 10 de agosto de 2017

Documento elaborado con *Texmaker 4.5*

Resumen

En este reporte se presenta el material que se trabajó durante la estancia del II Verano de la Investigación Científica, organizado por la Unidad Cuernavaca del Instituto de Matemáticas de la UNAM, mismo que se llevó a cabo del 26 de junio al 11 de agosto de 2017.

El proyecto de investigación que se realizó, se enmarca dentro del área de sistemas dinámicos. En particular, se estudiaron los conocimientos preliminares para abordar el estudio de la Teoría Ergódica, cuyo objetivo es describir la dinámica de las transformaciones que preservan medida. Es bien sabido que algunos sistemas dinámicos pueden presentar un comportamiento caótico por lo que hacer predicciones a largo plazo sobre su comportamiento es imposible. Sin embargo, en ocasiones la Teoría Ergódica puede predecir el comportamiento promedio de un sistema, incluso si el sistema es caótico.

En vista de lo anterior, con el material que aquí se presenta, se tienen las bases para abordar el tema de Ergodicidad y llegar a uno de los teoremas principales de la teoría Ergódica, a saber, el Teorema Ergódico de Birkhoff.

Aprovecho también para agradecer el apoyo del Dr. Angel Cano quien me asesoró durante este verano. De igual manera, agradecer y reconocer a los organizadores del evento, al Dr. Carlos Villegas, al Dr. Marcos Lopez y al Dr. Gregor Weingart por la excelente organización del evento, la amabilidad y atención que me brindaron a cada momento.

Por último, y no por eso menos importante, quiero reconocer la amabilidad y hospitalidad de cada una de las personas que conforman el Instituto de Matemáticas, Unidad Cuernavaca, por hacer de esta estancia una experiencia tan agradable.

Marina Lizeth Rojas Salazar
Instituto de Ingeniería y Tecnología
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez
Ciudad Juárez, Chihuahua, México.

Índice general

Resumen II

1. Transformaciones μ-invariantes 1

1.1. Transformaciones que preservan medida . . . 1

1.2. Ejemplos . . . 5

1.2.1. Traslaciones . . . 5

1.2.2. Multiplicación por 2 módulo 1 . . . 5

1.2.3. Transformación del panadero . . . 6

2. Recurrencia 8

2.1. Teorema de Recurrencia . . . 8

2.2. Transformaciones inducidas . . . 10

2.3. Transformaciones integrales . . . 12

Bibliografía 15

Capítulo 1

Transformaciones μ-invariantes

Muchos fenómenos naturales son modelados por sistemas dinámicos que preservan una medida invariante. Históricamente, un ejemplo que impulsó el estudio de este tipo de transformaciones es el de los sistemas Hamiltonianos. Dichos sistemas describen la evolución de sistemas conservativos en Mecánica Newtoniana, es decir la energía mecánica es una cantidad que se conserva al ser descrita por una integral del movimiento. Así, los sistemas Hamiltonianos preservan la medida conocida como medida de Liouville [5]. De aquí que estos sistemas nacen para formalizar la descripción de problemas mecánicos, por lo que son estudiados tanto en Mecánica Hamiltoniana como en Sistemas Dinámicos.

En general, es sumamente complejo entender y predecir el comportamiento que tendrán las órbitas de un sistema dinámico. Sin embargo, a partir del estudio de medidas invariantes o lo que es equivalente, a través de transformaciones que sean invariantes bajo alguna medida definida en el espacio, es posible obtener información detallada y de ninguna manera trivial, sobre el comportamiento de un sistema a través del tiempo.

En esta sección definimos de manera formal la invarianza de la transformación T bajo la medida μ, ambas definidas en un espacio X. Además, mostraremos algunos ejemplos de transformaciones que preservan medida.

1.1. Transformaciones que preservan medida

Comenzamos recordando que un *espacio de probabilidad* $(X, \mathcal{B}, \mu)$ está conformado por tres elementos; un conjunto X, una σ-álgebra $\mathcal{B}$ y una medida de probabilidad μ, con la propiedad de que $\mu(X) = 1$.

Luego, recordamos la definición de una función medible a continuación,

Definición 1.1.1. Sean $(X_1, \mathcal{B}_1)$ y $(X_2, \mathcal{B}_2)$ espacios medibles. Se dice que la función $f : X_1 \to X_2$ es medible si se satisface que $f^{-1}(\mathcal{B}_2) \subset \mathcal{B}_1$.

En palabras, una función se dice medible si la pre-imagen de cualquier conjunto medible del contradominio, es medible.
Ahora bien, sabemos que toda transformación, digamos T, es una función, por lo que hablar de transformaciones medibles, tiene sentido. Definimos ahora, cuándo T resulta invariante bajo medida;

Definición 1.1.2. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de probabilidad y $T : X \to X$ una transformación medible. Se dice que T preserva la medida con respecto a μ o que T es μ -invariante, si para todo $A \in \mathcal{B}$, se tiene que

$$\mu(T^{-1}A) = \mu(A) \ .$$

De manera que T va a preservar medida siempre que la medida de la pre-imagen bajo T de cualquier conjunto medible sea igual a la medida del conjunto.

Al tener la anterior definición uno podría cuestionarse sobre la aparición de la pre-imagen T^{-1} en lugar de T. Es suficiente con decir que el hecho de utilizar T^{-1} garantiza que nuestra definición esté bien definida. Basta observar que si T es medible entonces para todo $B \in \mathcal{B}$, se satisface que su pre-imagen también es medible, es decir $T^{-1}(B) \in \mathcal{B}$. Note que lo anterior, en general, es falso si consideramos en nuestra definición a T, dado que puede pasar que conjuntos medibles sean mapeados en conjuntos no medibles.

Ahora consideremos que el caso en que la transformación T es *invertible*, entonces se verifica fácilmente que T^{-1} tambien preserva medida.
Con lo anterior, es posible dar una condición necesaria y suficiente para la invarianza de T bajo μ. De manera que si T es invertible, entonces T preserva medida si y sólo si para todo $A \in \mathcal{B}$

$$\mu(TA) = \mu(A).$$

Observemos que aquí, la invertibilidad de T es la que garantiza y permite definir la preservación de la medida, solamente en términos de T.
Hasta ahora hemos considerado el caso en que $T : X \to X$, pero naturalmente podemos extender de manera análoga los resultados al caso en que $T : (X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1) \to (X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$. Así, si T es medible, decimos que *preserva medida* si para todo $A \in \mathcal{B}_2$, se tiene que

$$\mu_1(T^{-1}A) = \mu_2(A).$$

Recordemos que un sistema dinámico consiste de un espacio X y una regla la cual determina la evolución de sus puntos en el tiempo. De aquí, el tiempo puede ser continuo o discreto. Nosotros estudiaremos aquellos en los que el tiempo es discreto. En este sentido, haremos referencia a las iteraciones de $T : X \to X$, escribimos $T^n = T \circ \ldots \circ T$ (n-veces) para denotar la n-ésima iteración de T.

El siguiente teorema provee otra caracterización de preservación de medida de una transformación, en términos de la semi-álgebra que genera la σ-álgebra del contradominio.

Teorema 1.1.1. *Sean $(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ y $(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ espacios de probabilidad y $T : X_1 \to X_2$ una transformación. Supongamos que $\mathcal{S}_2$ es una semi-álgebra que genera a $\mathcal{B}_2$. Entonces, T es medible y preserva medida si y sólo si $T^{-1}A \in \mathcal{B}_1$ y $\mu_1(T^{-1}A) = \mu_2(A)$, para todo $A \in \mathcal{S}_2$.*

Demostración:
Considere $\mathcal{C}$ como el siguiente conjunto:

$$\mathcal{C} = \{B \in \mathcal{B}_2 : T^{-1}B \in \mathcal{B}_1 \text{ y } \mu_1(T^{-1}B) = \mu_2(B)\}$$

Así, $\mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}_2$. Probemos que $\mathcal{C}$ es una clase monótona.

Ahora, sean $E_i \in \mathcal{C}$ tales que $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$. Si consideramos a E como $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, entonces

$$T^{-1}E = \bigcup_{i=1}^{\infty} T^{-1}E_i,$$

lo cual prueba que $T^{-1}E \in \mathcal{B}_1$. Además observe lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mu_1(T^{-1}E) &= \mu_1(\bigcup_{i=1}^{\infty} T^{-1}E_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu_1(T^{-1}E_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu_2(E_n) \\
&= \mu_2(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n) \\
&= \mu_2(E),
\end{aligned}$$

entonces $E \in \mathcal{C}$. Luego, sean $F_i \in \mathcal{C}$ tales que $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots$, y considere $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$, entonces se tiene:

$$T^{-1}F = \bigcap_{i=1}^{\infty} T^{-1}F_i$$

por lo que $T^{-1}F \in \mathcal{B}_1$. De manera similar tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mu_1(T^{-1}F) &= \mu_1(\bigcap_{i=1}^{\infty} T^{-1}F_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu_1(T^{-1}F_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu_2(F_n) \\
&= \mu_2(\bigcap_{i=1}^{\infty} F_n) \\
&= \mu_2(F).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $F \in \mathcal{C}$. Entonces $\mathcal{C}$ es una clase monótona que contiene a $\mathcal{S}_2$, pero por el teorema de la Clase Monótona sabemos que $\mathcal{B}_2$ es la clase monótona más pequeña que contiene a $\mathcal{S}_2$ de manera que $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{C}$. Entonces se sigue que $\mathcal{B}_2 = \mathcal{C}$ y por lo tanto T es invertible y preserva medida.

■

En el siguiente proposición probamos la desigualdad triangular de la diferencia simétrica de conjuntos medibles. Sabemos que si A y B son conjuntos medibles, entonces por definición tenemos las siguientes igualdades

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Proposición 1.1.2. *Muestre que si A, B y C son conjuntos medibles y μ es una medida, entonces:*

$$\mu(A\Delta B) \leq \mu(A\Delta C) + \mu(C\Delta B).$$

Demostración:
Observe que solo necesitamos probar la contención de conjuntos, es decir, solo tenemos que verificar que $A\Delta B \subseteq (A\Delta C) \cup (C\Delta B)$, y el resultado es inmediato por la subaditividad de μ. Sea $x \in A\Delta B$, entonces $x \in (A \setminus B)$ ó $x \in (B \setminus A)$.
En un primer caso, consideremos que $x \in (A \setminus B)$, entonces se sigue que $x \in A$ y $x \notin B$. Luego, si $x \notin C$ entonces $x \in A\Delta C$ y habremos terminado este primer caso. Si suponemos que $x \in C$, tenemos que $x \notin A\Delta C$, y dado que $x \notin B$ se sigue que $x \in (C \setminus B)$, es decir $x \in C\Delta B$. Y en cualquier situación $x \in (A\Delta C) \cup (C\Delta B)$.
De manera análoga se hace la demostración para el caso en el que suponemos que $x \in (B \setminus A)$.

■

Dada un álgebra que genera una σ-álgebra, podemos encontrar una relación entre sus respectivos subconjuntos por medio de la diferencia simétrica. Expresamos el resultado en el siguiente lema.

Lema 1.1.3. *Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de probabilidad, y $\mathcal{A}$ un álgebra que genera a $\mathcal{B}$. Entonces para cualquier $A \in \mathcal{B}$ y para cualquier $\epsilon > 0$, existe $C \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A\Delta C) < \epsilon$.*

Demostración:
Considere el conjunto $\mathcal{D}$ como sigue;

$$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{B} : \text{para cualquier } \epsilon > 0, \text{ existe } C \in \mathcal{A} \text{ tal que } \mu(A\Delta C) < \epsilon\}.$$

De manera que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$. Probemos que $\mathcal{D}$ es una clase monótona, para esto en primer lugar considere $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$, tal que $A_i \in \mathcal{D}$ y sea $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Por lo tanto, tenemos que

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

De manera que dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu(A\Delta A_N) = |\mu(A) - \mu(A_N)| < \frac{\epsilon}{2}$$

y como $A_N \in \mathcal{D}$, entonces existe $C \in \mathcal{A}$ tal que

$$\mu(A_N \Delta C) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Entonces, por la proposición 1.1.2, tenemos la desigualdad siguiente

$$\mu(A\Delta C) \leq \mu(A\Delta A_N) + \mu(A_n \Delta C) < \epsilon,$$

lo cual prueba que $A \in \mathcal{D}$.
De manera análoga probemos que si $F_i \supseteq F_2 \supseteq \ldots \in \mathcal{D}$ entonces $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{D}$. Tenemos que $\mu(F) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n)$, de manera que dado $\epsilon > 0$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu(F\Delta F_M) = |\mu(F) - \mu(F_M)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Luego, dado que $F_M \in \mathcal{D}$, entonces existe $D \in \mathcal{D}$ tal que

$$\mu(F_M \Delta D) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Y así, tenemos que

$$\mu(F\Delta D) \leq \mu(F\Delta F_M) + \mu(F_M \Delta D) < \epsilon.$$

De manera que $F \in \mathcal{D}$. Por lo que hemos probado que $\mathcal{D}$ es una clase monótona contenida en $\mathcal{A}$, y por el teorema de la Clase Monótona **??**, sabemos que $\mathcal{B}$ es la clase monótona mas pequeña en $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{D}$. Lo cual prueba $\mathcal{B} = \mathcal{D}$ y concluye la demostración.

■

Entonces el lema nos dice que para cada conjunto A de la σ-álgebra $\mathcal{B}$, existe un elemento generador en el álgebra $\mathcal{A}$, tal que su diferencia simétrica tiende a cero. Podemos pensar en una superposición entre cada conjunto de $\mathcal{B}$ y los conjuntos generadores.

1.2. Ejemplos

Esta sección la dedicaremos a presentar algunos ejemplos de transformaciones que preserven medida.

1.2.1. Traslaciones

En primer lugar consideraremos las traslaciones, que son transformaciones definidas sobre $\mathbb{R}$. De manera intuitiva es claro que si tomamos un intervalo y lo movemos en la recta, no estamos modificando su "longitud", solo estamos cambiando su posición.
Para formalizar y particularizar la idea anterior, sea $X = [0, 1)$ con la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ y la medida de Lebesgue λ y sea $0 < \theta < 1$, tal que definimos $T : X \to X$ como:

$$Tx = x + \theta \text{ mod } 1 = x + \theta - \lfloor x + \theta \rfloor$$

Entonces T es medible, dado que para todo $[a, b) \in X$, se tiene:

$$T^{-1}[a, b) = [a - \theta, b - \theta) mod 1.$$

Por otro lado, observe que

$$\lambda(T^{-1}[a, b)) = \lambda([a - \theta, b - \theta) mod 1)$$

y de aquí, se pueden considerar dos casos:
i)Si $a - \theta \geq 1$, ya que entonces $b - \theta \geq 1$, por lo que $[a, b) \notin X$. Entonces tenemos que

$$\lambda(T^{-1}[a, b)) = (b - \theta - a + \theta) mod 1 = (b - a) = \lambda[a, b).$$

ii)Si $a - \theta < 1$ y $b - \theta > 1$, es decir cuando $T^{-1}[a, b)$ es la unión disjunta de $[a - \theta, 1)$ y $[1, b - \theta) mod 1$. De manera que tenemos

$$\lambda([a - \theta, 1)) = 1 - a + \theta \text{ y } \lambda([1, b - \theta)) = b - \theta - 1,$$

por lo que

$$\begin{aligned} \lambda(T^{-1}[a, b)) &= \lambda([a - \theta, 1)) + \lambda([1, b - \theta)) \\ &= \lambda([a, b)) \end{aligned}$$

De manera que lo anterior prueba que T preserva la medida de Lebesgue. Es decir, la medida, en este caso la longitud, de los intervalos permanece invariante bajo la traslación.

1.2.2. Multiplicación por 2 módulo 1

Sea $(X, \mathcal{B}, \lambda)$ como se definió en el ejemplo anterior 1.2.1 y considere $T : X \to X$ como:

$$Tx = 2x \text{ mod } 1 = \begin{cases} 2x & si \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & si \quad \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$$

Sea un intervalo de la forma $[a, b)$, entonces:

$$T^{-1}[a, b) = [\frac{a}{2}, \frac{b}{2}) \cup [\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2})$$

lo cual prueba que T es medible.
Luego observe que además,

$$\lambda(T^{-1}[a,b)) = \lambda([\tfrac{a}{2},\tfrac{b}{2})) + \lambda([\tfrac{a+1}{2},\tfrac{b+1}{2})) = \lambda([a,b))$$

por lo que T preserva medida.
De aquí, si consideramos las iteraciones de T entonces obtenemos la expansión binaria de los puntos en el intervalo $[0,1)$, es decir, si definimos la función a_1 como sigue:

$$a_1 = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \\ 1 & si \quad \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

entonces es posible asociar una sucesión infinita de $0's$ y $1's$ a cada punto del intervalo, y tenemos que $Tx = 2x - a_1(x)$. De modo que si $n \ge 1$, entonces $a_n(x) = a_1(T^{n-1}x)$.
Sea $x \in X$ arbitrario pero fijo, entonces[1] $Tx = 2x - a_1$. Reescribiendo tenemos que

$$x = \frac{a_1}{2} + \frac{Tx}{2}.$$

Luego, observe que

$$T^2x = 2Tx - a_1(Tx) = 2Tx - a_2$$

y despejando nuevamente, tenemos que:

$$Tx = \frac{a_2}{2} + \frac{T^2x}{2}.$$

Por lo que si repetimos el proceso tenemos que para toda $n \ge 1$,

$$x = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{2^n} + \frac{T^nx}{2^n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2^i} + \frac{T^nx}{2^n}.$$

Luego, dado que $0 < T^n(x) < 1$, entonces se cumple que:

$$x - \sum_{i=1}^{n} \tfrac{a_i}{2^i} = \tfrac{T^nx}{2^n} \to 0 \text{ cuando } n \to \infty,$$

y así $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2^i}$, es decir, x se puede asociar a una sucesión de ceros y unos.

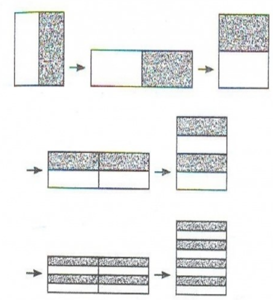
1.2.3. Transformación del panadero

Este ejemplo es la versión en dos dimensiones del ejemplo anterior 1.2.2. De manera que tenemos el espacio de probabilidad $X = [0,1)^2$ con la σ-álgebra producto de Lebesgue $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ y la medida producto de Lebesgue $\lambda \times \lambda$.
Definimos $T : X \to X$ como:

$$T(x,y) = \begin{cases} (2x, \frac{y}{2}) & si \quad 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \\ (2x-1, \frac{y+1}{2}) & si \quad \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

En la siguiente imagen, se ilustra la acción de la transformación T sobre el espacio $X = [0,1)^2$.

[1]Notación: $a_n = a_n(x)$.



Claramente esta transformación es reversible, basta con realizar las operaciones inversas. Además T es medible y preserva medida. Para probar lo anterior vamos a considerar 3 casos respecto a $[a,b)\times[c,d)$:

I) Si $c<d<\frac{1}{2}$.

II) $\frac{1}{2}\leq c<d$.

III) $c<\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}\leq d$.

En el caso I), tenemos que T es medible, ya que

$$T^{-1}[a,b)\times[c,d)=[\frac{a}{2},\frac{b}{2})\times[2c,2d),$$

y T preserva medida dado que

$$\lambda^2(T^{-1}[a,b)\times[c,d))=\lambda^2([\frac{a}{2},\frac{b}{2})\times[2c,2d))=\lambda^2([a,b)\times[c,d)).$$

De manera similar, en el caso II) tenemos que T es medible dado que

$$T^{-1}[a,b)\times[c,d)=[\frac{a+1}{2},\frac{b+1}{2})\times[2c-1,2d-1),$$

y T preserva medida;

$$\lambda^2(T^{-1}[a,b)\times[c,d))=\lambda^2([\frac{a+1}{2},\frac{b+1}{2})\times[2c-1,2d-1))=\lambda^2([a,b)\times[c,d)).$$

Para el último caso, el caso III), basta considerar que $[a,b)\times[c,d)$ se puede expresar como unión disjunta de otros intervalos de la misma forma, entonces

$$[a,b)\times[c,d)=\{[a,b]\times[c,\frac{1}{2})\}\bigcup\{[a,b]\times[\frac{1}{2},d)\}.$$

Por lo que $[a,b]\times[c,\frac{1}{2})$ está en el primer caso y por lo tanto T preserva su medida. Análogamente para $[a,b]\times[\frac{1}{2},d)$, ya que éste está en el segundo caso y también T preserva su medida. Y por ser disjuntos tenemos que

$$\begin{aligned}\lambda^2(T^{-1}[a,b)\times[c,d))&=\lambda^2([a,b]\times[c,\frac{1}{2}))+\lambda^2([a,b]\times[\frac{1}{2},d))\\&=\lambda^2([a,b)\times[c,d)).\end{aligned}$$

Y así, en cualquier caso, T es una transformación medible y que preserva la medida producto de Lebesgue.

Capítulo 2

Recurrencia

En esta sección enunciaremos y demostraremos el Teorema de Recurrencia de Poincaré. Dicho teorema afirma que si consideramos un sistema dinámico conservativo entonces sus movimientos o dicho propiamente, sus órbitas, son aproximadamente periódicas. Esto es que, después de un tiempo t, las soluciones en un sistema dinámico se aproximarán tanto como se quiera a las condiciones iniciales.
Ernst Zermelo, lógico y matemático alemán, expresó la *paradoja de recurrencia*, argumentando que el teorema de Poincaré contradice las hipótesis de la mecánica estadística. En la sección siguiente daremos una prueba del teorema de Recurrencia y luego ejemplificaremos la supuesta paradoja.

2.1. Teorema de Recurrencia

Consideremos $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de probabilidad y sea T una transformación μ-invariante. Dado $x \in B$, con $B \in \mathcal{F}$, decimos que x es *B-recurrente* si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k x \in B$.

Teorema 2.1.1 (***Teorema de recurrencia de Poincaré***).

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de probabilidad y $T : X \to X$ una transformación μ-invariante. Sea $B \in \mathcal{F}$, si $\mu(B) > 0$, entonces casi toda $x \in B$ es B-recurrente.

Observación 2.1.1. Recordemos que el hecho de que alguna propiedad se cumpla para *casi toda* $x \in B$, refiere a que el conjunto de aquellas x donde la propiedad no se cumple, es un conjunto de medida cero.

Demostración:

Sea A el conjunto de los puntos que no son B-recurrentes, es decir:

$$A = \{x \in B : T^k x \notin B, \forall k \geq 1\}.$$

De modo que el teorema queda demostrado si probamos que $\mu(A) = 0$.

Observemos que por ser T medible, tenemos que

$$A = B \setminus \bigcup_{n \geq 1} T^{-n} B.$$

Luego, como $A \subset B$, entonces:

$$A \cap T^{-k} A \subset A \cap T^{-k} B = \emptyset, \forall k \geq 1.$$

Además, la familia de pre-imágenes $T^{-n} A$ es disjunta dos a dos. Como T preserva medida, tenemos que $\mu(T^{-n} A) = \mu(A)$ para todo $n \geq 1$.
Supongamos que $\mu(A) > 0$, entonces:

$$1 = \mu(X) \geq \mu(\bigcup_{k\geq 0} T^{-k}A) = \sum_{k\geq 0} \mu(A) = \infty,$$

lo cual es una contradicción, por lo tanto $\mu(A) = 0$ y el teorema queda demostrado.

■

Luego, vamos a considerar el conjunto D como sigue:

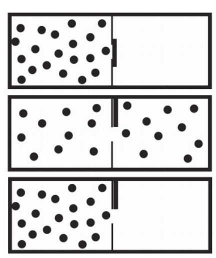
$$D = \{x \in B : T^k x \in B \text{ para un número finito de } k > 0\},$$

entonces D es el conjunto de puntos en B tales $T^{k_i}x \in B$, con $i = 1, 2, \ldots, n$, es decir que regresan un número finito de veces a B. En este sentido, podemos reescribir a D de una manera más conveniente como:

$$D = \{x \in B : T^{k_0}x \in A, \text{ para algún } k_0 \geq 0\} \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}A.$$

De aquí, basta observar que como T preserva medida y por el resultado anterior sabemos que $\mu(A) = 0$, entonces $\mu(D) = 0$. Por lo que, como consecuencia del teorema anterior y su prueba, tenemos que casi toda $x \in B$ regresa a B infinitas veces bajo iteraciones de T. Es decir, existe una infinidad de números enteros distintos, digamos $n_1, n_2, \ldots$, tales que si $x \in B$, entonces $T^{n_i}x \in B$.
Si consideramos un sistema periódico, entonces el Teorema de Poincaré se sigue de inmediato, dado que sin haber recorrido todo el espacio, el sistema vuelve a su estado inicial. En este caso, el tiempo de recurrencia corresponde al periodo del sistema.

Por otro lado, existen sistemas los cuales recorren todo o casi todo el espacio, éstos se conocen como *sistemas ergódicos*. Es en estos sistemas donde aparece la paradoja de recurrencia. Para ejemplificar la supuesta paradoja propuesta por el matemático Ernst Zermelo, mencionaremos el ejemplo que se encuentra en el artículo *Poincaré, la mecánica clásica y el teorema de la recurrencia* [4], de la revista Mexicana de Física.
Consideremos una caja que contenga un gas y un espacio vacío, tal que están separados por una pared. Si perforamos la pared, estamos seguros de que el gas escapará, lo sorprendente es que el teorema de la recurrencia nos garantiza que si esperamos un tiempo apropiado t, el gas volverá a su espacio original.



"La paradoja de recurrencia" [4]

En la vida diaria, esto nos dice que no deberíamos preocuparnos por un pequeño agujero en un tanque de gas, solo necesitamos ser pacientes y esperar durante algún tiempo, para que el gas vuelva a acumularse en el tanque. Obviamente ésta situación no ha sido observada, de aquí que se puede pensar que el Teorema de Recurrencia representa una contradicción.

Sin embargo, no es el caso. Lo que sucede es que no se ha esperado el tiempo suficiente. En nuestro ejemplo, el tiempo de recurrencia, según estimaciones, sobrepasa la edad del universo. De manera que en muchos de los sistemas que representan situaciones cotidianas, los tiempos de recurrencia suelen exceder la edad del universo.

Aunque también, debemos mencionar la existencia de sistemas cuyo tiempo de recurrencia es pequeño como el caso del periodo de un péndulo de un reloj.

Cabe mencionar que se cree que el teorema resultó del estudio que Poincaré realizaba sobre la estabilidad del sistema solar. Se piensa que al no poder resolver el problema de los tres cuerpos, llegó al resultado de recurrencia, tal vez fue por esto que a estos sistemas ergódicos, decidió nombrarlos *sistemas estables* en el sentido de Poisson.

2.2. Transformaciones inducidas

En esta sección partiremos de un espacio de probabilidad con una transformación que preserva medida y a partir de estos elementos definiremos un nuevo sistema, es decir, vamos a definir un nuevo espacio de probabilidad con una nueva transformación que conservará las propiedades de ser medible y preservar medida.

Antes de comenzar la construcción, vamos a definir el *primer retorno* de un punto x. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de probabilidad y sea T una transformación μ-invariante. Por el teorema de recurrencia de Poincaré, sabemos que si $A \subset X$ tal que $\mu(A) > 0$, entonces casi toda $x \in A$ regresa a A y de hecho lo hace una infinidad de veces bajo iteraciones de T.

Así, consideremos $x \in A$, entonces el *primer retorno*, $n_A(x)$, de x a A se define como

$$n_A(x) := inf\{n \geq 1 : T^n x \in A\}.$$

El teorema de recurrencia nos dice que $n_A(x)$ es finito en A, salvo en un conjunto de medida cero. Por lo que removemos de A dicho conjunto, digamos C, en el cual $n(x) = \infty$ y sin pérdida de generalidad, denotamos nuevamente por A al conjunto restante. Es claro que al ser $C \subset A$ un conjunto de medida cero, el conjunto A no se ve afectado si lo removemos.

Para iniciar la construcción de nuestro nuevo sistema, vamos a considerar la σ-álgebra $\mathcal{F} \cap A$ sobre A, la cual es la restricción de $\mathcal{F}$ a A. Además, definimos la medida μ_A en A, tal que para todo $B \in \mathcal{F} \cap A$,

$$\mu_A(B) = \tfrac{\mu(B)}{\mu(A)}.$$

De manera que tenemos que μ_A es también una medida de probabilidad. Entonces tenemos nuestro nuevo espacio de probabilidad, $(A, \mathcal{F} \cap A, \mu_A)$. Por último, definimos la transformación inducida $T_A : A \to A$ como

$$T_A x = T^{n_A(x)} x.$$

En el siguiente proposición, demostraremos que la transformación T_A es medible en $(A, \mathcal{F} \cap A, \mu_A)$.

Proposición 2.2.1. *La transformación T_A es medible respecto a la σ-álgebra $\mathcal{F} \cap A$.*

Demostración:

Para demostrar la medibilidad de T_A, basta probar que $\forall S \in \mathcal{F}$,

$$T_A^{-1}(S) \subset \mathcal{F} \cap A.$$

Por lo que

$$\begin{aligned} T_A^{-1}(S) &= A \bigcap T_A^{-1} S \\ &= A \bigcap (T^{n(x)})^{-1} S \\ &= A \bigcap \bigcup_{k=1}^{\infty} (T^k)^{-1} S \end{aligned}$$

De aquí, como T es medible, entonces $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (T^k)^{-1} S \in \mathcal{F}$, y por lo tanto T_A es medible.

■

Hasta aquí, solo queda por demostrar que la transfromación T_A es μ_A-invariante. En la siguiente proposición damos la demostración de este hecho.

Proposición 2.2.2. *La transformación T_A es μ_A-invariante.*

Demostración:

Sea $k \in \mathbb{N}$, definimos A_k y B_k como sigue:

$$A_k = \{x \in A : n(x) = k\}$$
$$B_k = \{x \in X \setminus A : Tx, \dots, T^{k-1}x \notin A \text{ y } T^k x \in A\}.$$

Dados los conjuntos anteriores, tenemos que A puede verse como la unión de todos los A_k, esto es

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Además, uno puede deducir fácilmente que la pre-imagen de A está dada como

$$T^{-1}A = A_1 \cup B_1$$

y expresar a la pre-imagen de cada B_n como

$$T^{-1}B_n = A_{n+1} \cup B_{n+1}.$$

Tomemos C, tal que $C \in \mathcal{F} \cap A$. Como T es μ-invariante se sigue que $\mu(C) = \mu(T^{-1}C)$. Para probar que T_A es μ_A-invariante, habremos de probar que

$$\frac{\mu(C)}{\mu(A)} = \frac{\mu(T_A^{-1}C)}{\mu(A)},$$

entonces solo basta probar que

$$\mu(T_A^{-1}C) = \mu(T^{-1}C).$$

En primer lugar, observemos que

$$T_A^{-1}C = \bigcup_{k=1}^{\infty} T^{-k}C = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \cap T^{-k}C,$$

donde los conjuntos $A_n \cap T^{-n}C$ son disjuntos dos a dos, entonces se sigue la siguiente igualdad

$$\mu(T_A^{-1}C) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \cap T^{-k}C).$$

Por otro lado, utilizando repetidamente las igualdades que obtuvimos al inicio de la demostración sobre A, y las pre-imagenes de A y B_n respectivamente, llegamos a que

$$\begin{aligned}
\mu(T^{-1}C) &= \mu(A \cap T^{-1}C) \\
&= \mu(A_1 \cap T^{-1}C) + \mu(B_1 \cap T^{-1}C) \\
&= \mu(A_1 \cap T^{-1}C) + \mu(T^{-1}B_1 \cap T^{-2}C) \\
&= \mu(A_1 \cap T^{-1}C) + \mu(A_2 \cap T^{-2}C)) + \mu(B_2 \cap T^{-2}C) \\
&\vdots \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k \cap T^{-k}C) + \mu(B_n \cap T^{-n}C).
\end{aligned}$$

De aquí note que los conjuntos $B_n \cap T^{-n}C$ también son disjuntos dos a dos. Considerando que estamos en un espacio de probabilidad y que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \cap T^{-n}C \subseteq X$, entonces

$$1 \geq \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \cap T^{-n}C) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n \cap T^{-n}C).$$

De manera que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(B_n \cap T^{-n}C)$ es convergente y se satisface que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n \cap T^{-n}C) = 0.$$

Por lo tanto, si n tiende a infinito,

$$\mu(T^{-1}C) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \cap T^{-k}C).$$

Entonces, tenemos que

$$\mu(T^{-1}C) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \cap T^{-k}C) = \mu(T_A^{-1}C)$$

lo cual concluye la demostración del teorema.

■

2.3. Transformaciones integrales

Ahora dado $(A, \mathcal{F}, \nu)$ un espacio de probabilidad y S una transformación que preserva la medida ν, ahora vamos a construir un nuevo espacio de probabilidad $(X, \mathcal{C}, \mu)$ y vamos a definir sobre él una transformación T invariante bajo μ, de modo que dicha construcción nos llevará a considerar a S como la transformación inducida en X cuyo retorno es f. Estas construcciones nos van preparando para abordar el tema de ergodicidad.
La construcción se muestra a continuación;

Tomemos $f \in L^1(A, \nu)$ tal que f es positiva y toma valores enteros. Entonces

I) Se define al espacio X como sigue

$$X = \{(y, i) : y \in A \text{ y } 1 \leq i \leq f(y), i \in \mathbb{N}\}.$$

II) La σ-álgebra $\mathcal{C}$ es generada por conjuntos de la forma

$$(B, i) = \{(y, i) : y \in B \text{ y } f(y) \geq i\}$$

donde $B \subset A, B \in \mathcal{F}$ y $i \in \mathbb{N}$.

III) La medida μ está dada por

$$\mu(B, i) = \frac{\nu(B)}{\int_A f(y) d\nu(y)}$$

y luego extenderla a todo X.

IV) Finalmente, definimos $T : X \to X$ como

$$T(y, i) = \begin{cases} (y, i+1) & si \quad i+1 \leq f(y) \\ (Sy, 1) & si \quad i+1 > f(y). \end{cases}$$

Proposición 2.3.1. *La medida μ es de probabilidad.*

Demostración: En primer lugar, consideremos los conjuntos A_n como

$$A_n := \{y \in A : f(y) = n\},$$

así, los conjuntos A_n son disjuntos dos a dos.
Dado lo anterior, es posible expresar al espacio X como

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{n} (A_n, j).$$

De manera que

$$\begin{aligned} \mu(X) &= \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{n} (A_n, j) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{\nu(A_n)}{\int_A f d\nu} \\ &= \frac{1}{\|f\|_1} \sum_{n=1}^{\infty} n\nu(A_n) \\ &= \frac{1}{\|f\|_1} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\nu \\ &= 1 \end{aligned}$$

■

Decimos que el espacio de probabilidad $(X, \mathcal{C}, \mu, T)$, es un *sistema integral* de $(A, \mathcal{F}, \nu, S)$ bajo f. Probemos que la transformación T preserva la medida μ y para esto, note que es suficiente probarlo para los subconjuntos medibles de A.

Proposición 2.3.2. *La transformación T es μ-invariante.*

Demostración:

Sea $B \subset A$ tal que $B \in \mathcal{F}$ y sea $i \geq 1$. Entonces consideremos los siguientes dos casos:
Caso 1: Si $i > 1$, entonces $T^{-1}(B,i) = (B, i-1)$ y así

$$\mu(T^{-1}(B,i)) = \mu((B,i-1)) = \frac{\nu(B)}{\int_A f(y)d\nu(y)} = \mu(B,i).$$

Caso 2: Si $i = 1$, consideremos los conjuntos A_n como

$$A_n = \{y \in A : f(y) = n\},$$

entonces es claro que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. De manera que

$$T^{-1}(B,1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap S^{-1}B, n),$$

donde los conjuntos $(A_n \cap S^{-1}B, n)$ son disjuntos dos a dos. Así, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mu(T^{-1}(B,1)) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(A_n \cap S^{-1}B)}{\int_A f(y)d\nu(y)} \\
&= \frac{\nu(S^{-1}B)}{\int_A f(y)d\nu(y)} \\
&= \frac{\nu(B)}{\int_A f(y)d\nu(y)} \\
&= \mu(B,1),
\end{aligned}$$

entonces T preserva la medida μ.

■

Bibiliografía

[1] Bartle, R. *The elements of integration and lebesgue measure* John Wiley, New York, 1995.

[2] Dajani, K., Dirksin, S. *A Simple Introduction to Ergodic Theory* Lecture Notes. University of Utrecht, 2008.

[3] Faro, R. *Apuntes de Teoría de la Medida.* Dpto. de Matemáticas, Universidad de Extremadura, Badajoz, España, 2016.

[4] Núñez, H., Salas, A. *Poincaré, la mecánica clásica y el teorema de la recurrencia.* Revista Mexicana de Física Ed. 59, México, 2013, pag. 91-100.

[5] Papadopoulos, A. *Handbook of Teichmüller Theory, Volumen I.* European Mathematical Society (Publishing House), Strasbourg, France, 2007, pag. 231-232.

[6] Rudin, W. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill Book Company, Singapore, 1986.