
El atractor de Hénon

Verano de investigación 2018

Ma. Guadalupe Salgado Castorena

0.1. Agradecimientos

Se agradece apoyo económico para el desarrollo del presente proyecto al: Proyecto FORDECYT 265667 “Programa para un avance global e integrado de la Matemática Mexicana”.

0.2. Introducción

Uno de los logros notables de la ciencia en el siglo XX es el descubrimiento del caos. Utilizando este paradigma, muchos problemas en la ciencia y la ingeniería modernas pueden ser simulados y analizados de manera realista a través de las herramientas de dinámica no lineal. La búsqueda de comprender y explicar el caos en los sistemas físicos reales ha llevado a la creación de nuevas técnicas matemáticas. De hecho, hay una precedencia histórica; es decir, la búsqueda de la comprensión de las oscilaciones en sistemas débilmente no lineales y cuasilineales ha llevado a la teoría de los ciclos límite de Poincaré y a la teoría de la estabilidad de Lyapunov. Sin embargo, muchos problemas modernos asociados con sistemas que implican altas energías, potencias, velocidades, etc. deben ser modelados por ecuaciones diferenciales multidimensionales y fuertemente no lineales (ordinarias, parciales, etc.). El estudio de tales sistemas ha generado numerosos conceptos y terminologías nuevos: conjuntos hiperbólicos, dinámica simbólica, órbitas homoclínicas y heteroclínicas, bifurcaciones globales, atractores extraños, exponentes de Lyapunov, dimensión, capacidad, etc.

En 1963, Lorenz propuso un sistema de tres ecuaciones diferenciales acopladas. El cual es un modelo simplificado, estudiado por primera vez, para poder predecir el clima. Sin embargo, las propiedades de este sistema evidenciaron las dificultades que tiene un modelo básico del clima y que complican la predicción meteorológica.

Más tarde Michel Henon, motivado por las ecuaciones de Lorenz, introdujo en 1976 un mapa bidimensional, el cual que captura la dinámica de estiramiento y plegado característica de los sistemas hiperbólicos, como en el sistema de Lorenz.

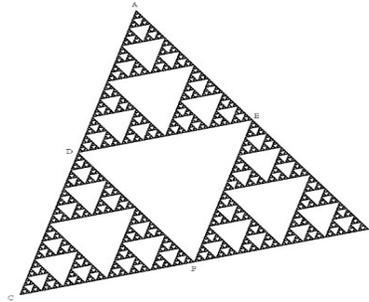
0.3. Preliminares

Definición 1. Sea $A \subset \Omega(f)$, A es un atractor de f , siempre que sea “indescomponible” y exista una vecindad U tal que $f(U) \subset U$ y $\bigcap_{i>0} f^i(U) = A$,

en donde, $\Omega(f)$ es un conjunto no errante de f , un conjunto invariante cerrado f es indescomponible si no es la unión de dos subconjuntos disjuntos invariantes.

Ejemplo 1. Consideremos $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $i = 1, 2, 3$ dado por

$$\begin{aligned} f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \\ f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ f_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Definición 2. Decimos que A , un subconjunto cerrado de Ω , es un atractor si existe una vecindad U que contiene a A tal que la intersección $\bigcap_{t>0} D_{x,t}(U) = A$. Donde D representa un flujo de una variedad suave generada por un campo vectorial X .

La definición de Ruelle y Takens es compatible con los mapas de Henon. Mientras que la definición de Williams da un atractor donde las órbitas convergen, la de Ruelle-Takens es un conjunto que nunca escapa.

0.4. La herradura de Smale

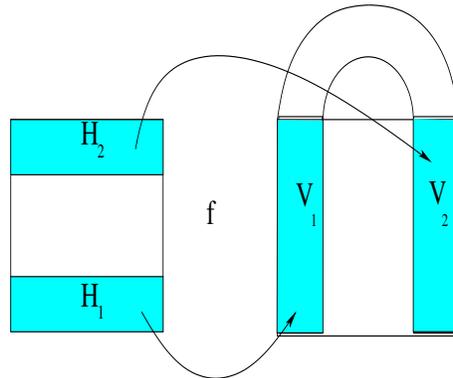
Definición 3. Sea f un difeomorfismo definido en una vecindad abierta de un cuadrado $Q : [0, 1] \times [0, 1]$. Consideremos las bandas horizontales

$$H_1 = [0, 1] \times [0, a] \text{ y } H_2 = [0, 1] \times [1 - a, 1]$$

además las bandas verticales

$$V_1 = [0, a] \times [0, 1] \text{ y } V_2 = [1 - a, 1] \times [0, 1]$$

para alguna $a \in (0, \frac{1}{2})$. Donde $f(H_1) = V_1$ y $f(H_2) = V_2$.



Notemos que

$$Q \cap f(Q) = V_1 \cup V_2$$

Ahora, consideremos el difeomorfismo f^{-1} entonces tenemos

$$f^{-1}(V_1) = H_1 \text{ y } f^{-1}(V_2) = H_2.$$

Por tanto tenemos que

$$\bigcap_{k=-1}^1 f^k(Q) = (H_1 \cup H_2) \cap (V_1 \cup V_2).$$

En la figura observamos las iteraciones de la construcción anterior. Es decir los conjuntos

$$\bigcap_{k=-1}^1 f^k(Q) = (H_1 \cup H_2) \cap (V_1 \cup V_2).$$

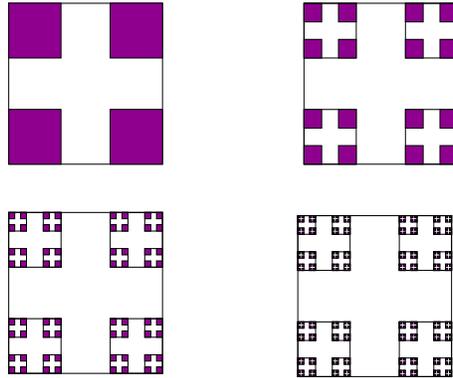
$$\bigcap_{k=-2}^2 f^k(Q) = (H_1 \cup H_2) \cap (V_1 \cup V_2).$$

$$\bigcap_{k=-3}^3 f^k(Q) = (H_1 \cup H_2) \cap (V_1 \cup V_2).$$

$$\bigcap_{k=-4}^4 f^k(Q) = (H_1 \cup H_2) \cap (V_1 \cup V_2).$$

0.5. Del mapa de Henon a la Herradura de Smale

El mapa de Henon es conjugado a un mapa de primer retorno del atractor de Lorenz. Es decir, se puede ver como una restricción bidimensional de la dinámica de Lorenz. Con ciertas restricciones de los parámetros el mapa de Henon se puede representar como un modelo clásico de la dinámica hiperbólica



conocido como la herradura de Smale. El objetivo de esta plática es dar esta construcción, que realiza un mapa de Henon como la herradura de Smale y permite una descripción completa de sus atractores.

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + by_n, \quad (1)$$

$$y_{n+1} = x_n. \quad (2)$$

Es un mapa bidimensional no lineal, que también se puede escribir como

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + bx_{n-1}$$

- Para el mapa de Hénon tenemos dos puntos fijos: $\left(\frac{-(1-b) + \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a}, \frac{-(1-b) + \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a} \right)$
y $\left(\frac{-(1-b) - \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a}, \frac{-(1-b) - \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a} \right)$
- Es invertible con inversa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{y}{b} \\ x - 1 + \frac{a}{b^2} y^2 \end{pmatrix}$$

- El jacobiano es $-b$.

Para $(a, b) = (1.4, 0.3)$ el mapa de Hénon converge a un atractor extraño. Una visualización del atractor de Hénon se puede hacer mediante iteraciones numéricas.

El mapa de Henon captura la dinámica de estiramiento y plegado de los sistemas caóticos. El parámetro a controla la cantidad de estiramiento y b controla el grosor del plegado.

Para el mapa de Henon con el parámetro $b \neq 0$, toma como área a $Q = [-1/4, 3/4] \times [0, 1]$ y la “vuelve” mediante una transformación doblada como una herradura de Smale.

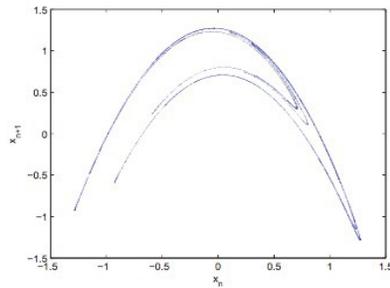


Figura 1: Con una iteración de 10 000 con el punto inicial $(0, 1, 0, 1)$

Lo que buscamos es encontrar un rango de parámetros para mapas de Henon que mande al cuadrado Q a una herradura. Para dicha área, los parámetros son

$$-\frac{1}{4} < a < \frac{3}{4}, \quad 0 < b < 1$$

0.6. Bibliografía

- Barreira L., Valls Claudia, Dynamical systems an introduction, Springer, pp. 91-95
- Wen H., A review of the Henon map and its physical interpretations, Georgia Institute of Technology, Atlanta.