Breviario de la Didáctica de la Matemática

Michael Barot

Introducción

Estás notas se elaboraron como material de apoyo para el curso *Didáctica de las Matemáticas I* en la Maestría en Docencia para la Educación Medio Superior.

Las notas contienen una breve exposición de los diferentes temas que se tratan y se apoya en ejercicios bien seleccionados. Esto subraya la postura asumida durante todo el curso de que **no es posible hablar de la Didáctica de las Matemáticas sin hablar de Matemáticas**, dicho en otras palabras: esta asignatura no puede impartirse de manera teórica sin caer en varias faltas graves. Es por ello mismo que no cito ningun trabajo pedagógica general, ni de la reciente corriente del llamado "constructivismo" que hasta cierto grado se puede encontrar en este texto.

No es un libro de consejos de vestirse bien, de hablar claro, de cuidar la letra al escribir en el pizarrón o de mantener una cierta actitud, sino es un libro donde se explican ciertos aspectos de las matemáticas que son relevantes en la "buena enseñanza" (la didáctica) de las matemáticas. También vale aclarar que con este texto no pretendo hacerle justicia a los numerosos obstáculos que enfrenta un maestro en la realidad desde grupos de 60 alumnos, instalaciones insuficientes hasta programas de estudios deplorables. En cierto sentido es una propuesta de un ideal de lo que puede significar la buena enseñanza de a matemática, un ideal que tal vez en la realidad no se podrá alcanzar pero – creo – que bien se hace en tenerlo claro en el horizonte.

Agradezco aquí especialmente a Daniel Baumgartner y a Giancarlo Copetti. Hace más de dos décadas, el primero era un compañero en el Bachillerato y el segundo el maestro de matemáticas que nos enseñó. Después, Daniel y yo empezamos a estudiar matemáticas y por falta de dinero empezamos a

dar clase de matemáticas en esta misma escuela. Fue un período interesante y muy enriquecedor por las largas y frecuentes discusiones sobre el "cómo enseñar" entre los tres. Aún, hoy en día, separados por la vida, mantenemos contacto aunque con menor frecuencia, pero el tema sigue siendo el mismo de antes: las matemáticas y su enseñanza. Es por ello que sin modestia se puede decir, que la gran parte de este libro lo debemos a Giancarlo Copetti y a estas discusiones, que traté de transformar en algo escrito.

1 Patrones del pensamiento matemático

En 2004, Giancarlo Copetti me pasó unas impresiones de acetatos de una charla que había dado a maestros de Bachillerato bajo el título "Motive mathematischen Denkens", que se puede traducir como "Patrones del pensamiento matemático". En ellas se presentaron tres patrones y que aquí se aumentó por uno. Estos patrones ocurren con frecuencia en el pensamiento matemático y pueden enseñarse como estrategias para la solución de problemas. Después de una breve explicación de los patrones estudiados, tratamos de aclarar cuál podría ser su lugar en el salón de clase.

1.1 Presentación de los patrones

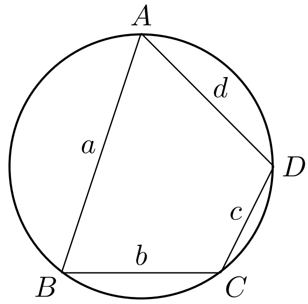
Especialización y generalización.

De todos los patrones, él de la especialización es tal vez el más sencillo. Describe la idea de reducir una afirmación dada o una observación a un caso particular.

Para dar un ejemplo consideramos la fórmula de Brahmagupta (matemático indio, 598-668)

$$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

que describe el área F de un cuadrilátero con los lados a, b, c y d inscrito en un círculo (donde $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ es la mitad del perímetro del cuadrilátero).



Un *caso particular* ocurre cuando $A = D$, es decir cuando $d = 0$. Entonces obtenemos la fórmula

$$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)s}$$

que expresa el área de un triángulo $\triangle ABC$ con los lados a, b y c (donde $s = \frac{a+b+c}{2}$ sigue siendo la mitad del perímetro de $\triangle ABC$). Esta fórmula se conoce como la *fórmula de Herón* (Herón fue griego y vivió mś o menos 10-70 d.C.).

La generalización describe el proceso opuesto al de la especialización, en donde se trata de obtener una formulación general a partir de unos pocos ejemplos.

Si consideramos el desarrollo decimal de las siguientes fracciones

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{7} &= 0.142857142857\overline{142857} \\
\tfrac{2}{7} &= 0.2857142857\overline{142857} \\
\tfrac{3}{7} &= 0.42857\overline{142857} \\
\tfrac{7}{7} &= 1.000\overline{0}
\end{aligned}$$

(las cifras sobrerayadas indican la sucesión de cifras que se repetirán para siempre y que forman una *período*), entonces podemos observar el hecho interesante que $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$ y $\frac{3}{7}$ tienen el mismo período y podríamos pensar que para cualquier número entero n, la fracción $\frac{n}{7}$ tiene este mismo período. Esto es una generalización de los tres hechos observados anteriormente. Pero esta generalización es falsa: si n es divisible entre 7 entonces $\frac{n}{7}$ será un número entero y el período consiste de una sola cifra: el cero. Así que habrá que modificar nuestra primera generalización y en un segundo intento podríamos pensar que $\frac{n}{7}$ tiene el período 142857 para cualquier número entero n que no sea divisible entre n. Esta segunda afirmación es verdadera, y alentamos al lector de dar una prueba irrefutable de este hecho.

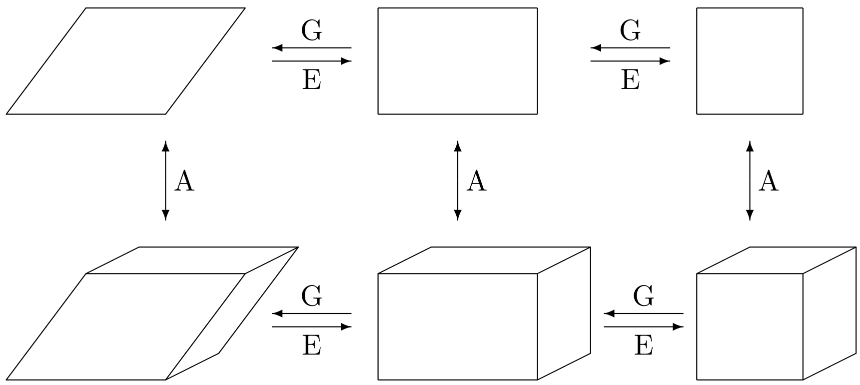
Resaltamos de aquí que una generalización no tiene que ser única como tampoco tiene que ser cierta.

Analogía.

La analogía es un poco más difícil de captar que la generalización. La analogía describe el proceso de obtener a partir de una afirmación u observación otra, que contenga más o menos el mismo contenido pero en un ámbito diferente.

Damos primero un ejemplo sencillo que tal vez por su visualización pueda dar un poco de claridad. Para ello consideramos simplemente unas figuras geométricas. El cuadrado, por ejemplo, es un caso particular de un rectángulo y este a su vez un caso particular de un paralelogramo. ¿Qué serían los cuerpos análogos en tres dimensiones? Cualquiera de las tres figuras planas está delimitado por pares de segmentos paralelos. Pero un segmento no delimita un cuerpo en tres dimensiones, lo análogo de segmento en dos dimensiones es la cara en tres dimensiones. Entonces tenemos que fijarnos en cuerpos que están delimitados por pares de caras paralelos. ¿Cuántos pares necesitamos? En el plano son dos pares, para delimitar en dos direcciones diferentes, pero en el espacio necesitaríamos tres pares. Entonces nos fijamos en paralelepípedos en el espacio, ya que son los cuerpos delimitados por tres pares de caras paralelos. El rectángulo tiene como característica que los segmentos se tocan en un ángulo recto, así que el paralelepípedo rectángular es la analogía al rectángulo y el cubo la analogía al cuadrado por tener todos sus figuras que delimitan iguales entre si.

En un dibujo lo podríamos mostrar así:



Aquí significa A=analogía, E=especialización y G=generalización.

Observamos que obtuvimos los cuerpos en el espacio que son análogos a las figuras planas al describir los últimos mediante propiedades que mantienen un significado en ambos ámbitos, en el plano y en el espacio: por ejemplo los cuerpos están delimitados; lo que delimita aparece en pares; el número de pares está dado por la dimensión etc.

Estudiamos entonces las fórmulas que nos dan el contenido: el área para figuras planas y el volumen para figuras del espacio. Para las figuras del extremo izquierdo (es decir paralelogramo y paralelepípedo) tenemos la misma fórmula:

$$\text{contenido} = \text{base} \times \text{altura}$$

donde la base puede significar dos cosas distintas pero análogas en los dos casos. Para las dos figuras de la columna en medio (es decir el rectángulo y la caja) tenemos las fórmulas ab y abc si a y b son los lados del rectángulo y a, b y c los lados de la caja. Observemos como estas fórmulas se especializan para la columna derecha para obtener fórmulas análogas a^2 y a^3 que podríamos generalizar a a^d donde d es la dimensión del espacio.

Damos otro ejemplo. La afirmación "existe exactamente un punto *del plano* que equidista de *tres* puntos que no se encuentran en *una recta*" es análoga a la afirmación "existe exactamente un punto *del espacio* que equidista de *cuatro* puntos que no se encuentran en *un plano*".

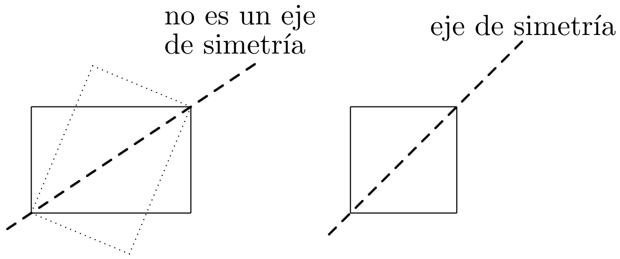
En el caso de los tres puntos en el plano es el circuncentro del triángulo formado por estos tres vértices. En el caso de los cuatro puntos en el espacio este punto es el centro de la esfera circunscrita al tetraedro con estos vértices. Observamos que se modificaron diferentes partes de la afirmación simultáneamente. Por ejemplo, se aumentó el número de puntos de tres en el plano a cuatro en el espacio; la razón es que se aumentó la dimensión por uno.

La generalización de estas dos afirmaciones al espacio de dimensión n sería: "existe exactamente un punto del espacio de dimensión n que equidista de $n + 1$ puntos que no se encuentran en un subespacio de dimensión $n - 1$".

Simetría.

Bajo una simetría se entiende una transformación que no cambia un objeto dado o, dicho de otra manera, también la propiedad del objeto de no cambiarse bajo ciertas transformaciones.

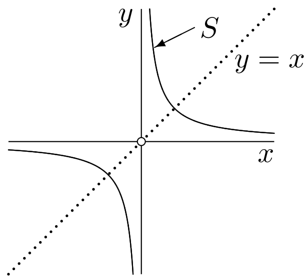
Así, las figuras que están en el dibujo anterior más a la derecha tienen mayor simetría que aquellas a la izquierda. Al reflejar un cuadrado por su diagonal se obtiene el mismo cuadrado mientras en un rectángulo que no sea cuadrado esto no es así: el rectángulo reflejado no está en la misma posición que el rectángulo original.



La letra I no cambia al reflejarla verticalmente u horizontalmente. La letra S se puede rotar por 180° y se ve igual que antes. Muchos animales son simétricos respecto a una reflexión en un plano. En todas estas situaciones, la simetría es un mapeo geométrico, como una reflexión o una rotación, que deja invariante al objeto.

Pero existen simetrías muy distintas a las geométricas. Por ejemplo no cambia la ecuación $xy = 1$ al intercambiar las dos variables x y y. Por ello, el punto (x, y) es una solución de la ecuación $xy = 1$ si y solamente si (y, x) es una solución también. Esto significa que el conjunto de soluciones $S = \{(x, y) \mid xy = 1\}$ es simétrico respecto al mapeo que manda un punto (x, y) en (y, x). Pero este mapeo es justamente la reflexión en la diagonal $y = x$. Resumiendo podemos decir que la simetría de la ecuación $xy = 1$ significa geométricamente la simetría de reflexión del conjunto de soluciones S.

Observamos que la ecuación $xy = 1$ tampoco cambia si sustituimos simultáneamente x por $-x$ y y por $-y$. Esta sustitución corresponde geométricamente a una rotación por 180° con el centro el origen del plano cartesiano. Por ello, la simetría de la ecuación corresponde a la simetría geométrico del conjunto de soluciones S.



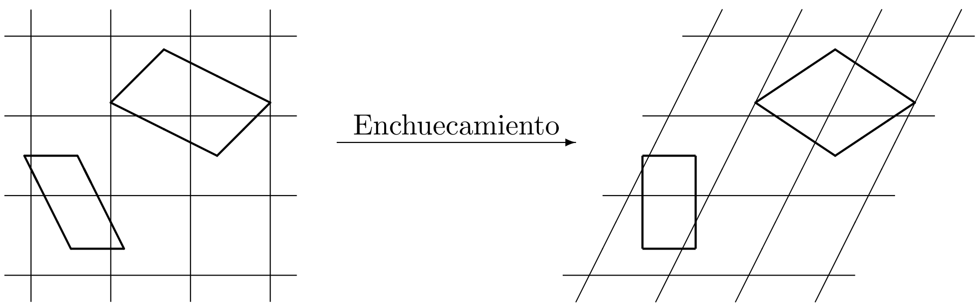
Si visualizamos S entonces reconocemos sin problema estas simetrías ya que S es una hipérbola.

Invariancia.

La invariancia está intimamente relacionada con la simetría. Para ver un ejemplo consideramos el conjunto M de todos los paralelogramos del plano. Además consideramos ciertas transformaciones que por carecer de un buen nombre las llamamos "enchuecamientos". Un enchuecamiento es una transformación que en un sistema de coordenadas apropiado se ve como

$$(x, y) \mapsto (x + \lambda y, y)$$

donde λ es algún escalar. La siguiente figura muestra un típico enchuecamiento.



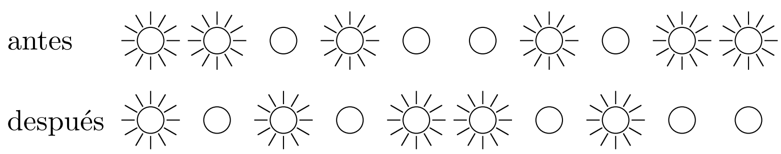
Cada enchuecamiento manda un paralelogramo en nuevamente un paralelogramo, que puede ser distinto del original. Así obtenemos una función $M \to M$ y si variamos los enchuecamientos obtenemos varias de estas funciones.

Claro es que los enchuecamientos cambian los ángulos y las distancias. Por ello, la circunferencia de los paralelogramos varía bajo los enchuecamientos.

El área, en cambio, no varía bajo un enchuecamiento, un hecho que se demuestra fácilmente para triángulos que tienen un lado paralelo a la dirección del enchuecamiento (la dirección está dada por un haz de rectas paralelas que no se cambian bajo la transformación). Como cada polígono puede dividirse en triángulos con bases horizontales, podemos generalizar la invarianza del área bajo enchueacmientos a polígonos en general. Aún más, con la idea de axhaustar áreas delimitadas por curvas con polígonos se obtiene que enchuecar no cambia el ŕea de figuras cualesquieras.

Por ello, el área es un invariante de los paralelogramos bajo el enchucamiento y es imposible obtener un paralelogramo de otro mediante varios enchuecamientos si no comparten la misma área. Esto nos conduce a la pregunta si es posible obtener un paralelogramo de otro mediante una serie de enchuecamientos si sabemos desde antes que los dos paralelogramos tienen la misma área. Si esto es el caso, entonces el invariante se llama *completo*. Dejamos la averiguación en este caso al lector interesado para dedicarnos a un segundo ejemplo.

En un circuito están instalado diez focos "sensibles al tacto". Si se toca un foco todos los demás cambian su estado: los apagados se encienden y los encendidos se apagan. Sólo el foco que se tocó permanece en su estado, tal como lo muestra el siguiente ejemplo donde se tocó el primer foco a la izquierda.



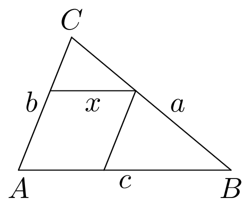
Al principio todos los diez focos están prendidos y se debe contestar la pregunta de cómo habría que tocar los focos tal que al final todos estén apagados.

La respuesta es fácil: se pueden apagar todos los focos si se toca cada foco una sola vez (no importa en qué orden), porque entonces cada foco cambia nueve veces de estado. Sin embargo no funciona ese mismo truco si lo intentamos con once focos. Si el lector hace unos intentos podrá llegar fácilmente a la idea de que posiblemente no sea posible apagar todos los focos. Como sólo hay un número finito de estados, a saber 2^{11}, sería fácil programar una computadora para averiguar si eso es posible o no. Pero sería algo insatisfactorio, ya que no obtuvieramos ningún conocimiento a fondo del problema.

Es más fácil si nos aclaramos que estamos buscando a un invariante, es decir a una propiedad que no cambia al tocar un foco en cualquier situación. El lector que ha jugado un poco con este problema se percatará rápidamente que siempre hay un número impar de focos prendidos y no es difícil demostrar que la paridad de los focos prendidos (es decir la propiedad del número de focos prendidos de ser par o impar) no cambia al tocar un foco, sin importar en que sitaución estemos. Con ello queda también demostrado que es en efecto imposible apagar todos los focos ya que no podemos llegar de la situación inicial donde este número es impar a la situación final donde este número es par.

1.2 Un ejemplo

Veamos la siguiente situación en donde un rombo está inscrito en un triángulo, tal como lo muestra la siguiente figura.



El ejercicio tradicional consiste en calcular el lado x del rombo en función de los tres lados del triángulo.

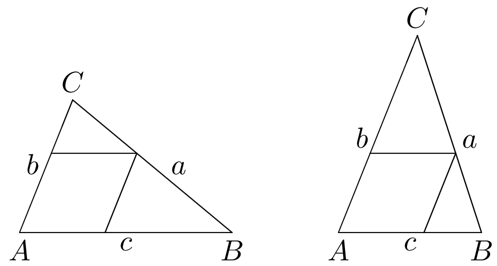
Pienso que la siguiente pregunta es más interesante: ¿cuáles de las siguientes fórmulas podría ser la solución?

$$(1)\quad x = \frac{(a+b)^2}{a+c} \qquad\qquad (2)\quad x = \frac{b^2c}{b+c}$$

$$(3)\quad x = \frac{bc}{b+c} \qquad\qquad (4)\quad x = \frac{a^2}{a+b+c}$$

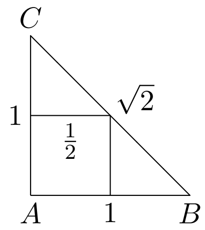
Si consideramos que la fórmula expresa la longitud de un segmento, la fórmula (2) debe parecernos extraño, porque si sustituimos para los lados a, b y c el valor 10 cm entonces obtenemos $x = 500\,\text{cm}^2$, que sería más bien el contenido de un área. La fórmula (2) no da la dimensión correcta y eso es un buen indicio para descartarla. Pero es suficiente. ¿Por qué la dimensión debe estar bien? ¿podemos realmente descartar (2) sólo porque la dimensión no sale correcta? Tal vez hay que entender la fórmula (2) de manera distinta: sustituimos para a, b y c el número de centímetros y obtenemos por la fórmula otro número. Entonces este es el número de centímetros que mide x. ¿Puede ser válido esta interpretación? La respuesta obtenemos si reflexionamos como debe comportarse la fórmula bajo una homotecia o al cambiar la unidad de medir: tomar metros en vez de centímetros, por ejemplo. Si duplicamos los lados del triángulo también el lado x debe duplicarse. Pero según la fórmula (2), el lado x se cuadruplicaría. Por ello podemos descartar (2). Las otras tres fórmulas (1), (3) y (4) dan la dimensión de una longitud y por ello ninguna más podemos descartar.

Observamos ahora la simetría de la situación. El rombo se pega en la esquina A entre los lados b y c del triángulo. Si intercambiamos los dos lados obtenemos un triángulo congruente que se obtiene de $\triangle ABC$ por una reflexión en la bisectriz del ángulo $\angle BAC$.



En esa reflexión, el rombo queda fijo. ¿Qué significa esto para la fórmula? Bueno, debería significar que el valor de x no cambia si intercambiamos b y c en la fórmula. Esto sucede con seguridad cuando la fórmula es simétrica en b y c, como por ejemplo en (3) y (4). Pero la fórmula (1) no es simétrica en b y c: si escribimos $f(a,b,c) = \frac{(a+b)^2}{a+c}$ tenemos $f(a,c,b) = \frac{(a+c)^2}{a+b} \neq f(a,b,c)$. Podemos descartar (1) porque el valor de x no es igual para $b = 1$ y $c = 2$ como para $b = 2$ y $c = 1$.

Quedan dos fórmulas que tienen la dimensión correcta y que son simétricas en b y c. Es fácil tomar esta última decisión entre estas dos al consider un caso particular. Para facilitarnos los cálculos buscamos un caso que sea especialmente sencillo, como el de un triángulo rectángulo isóceles con $b = c = 1$.



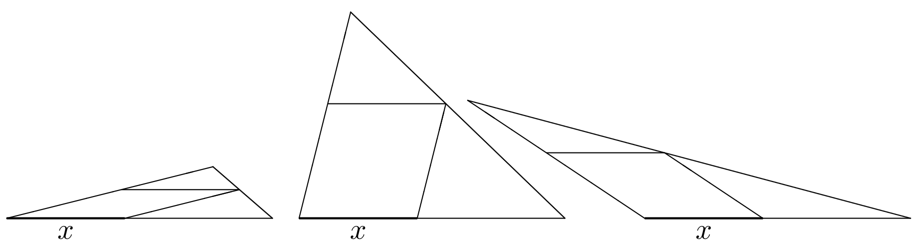
En esta situación tenemos $a = \sqrt{2}$ y $x = \frac{1}{2}$. La fórmula (3) da en efecto $x = \frac{1}{2}$, mientras la fórmula (4) da $x = \frac{2}{\sqrt{2}+2}$. Por ello descartamos la fórmula (4) también y sólo nos queda la fórmula (3).

Claro, con ello no demostramos la validez de la fórmula (3). Pero a cambio aumentó nuestra comprensión en el intercambio entre la fórmula y su contenido geométrico. Hubiera sido posible sólo usar el último argumento y considerar varios casos particulares para descartar también (1) y (2), pero entonces no habríamos ganado esta comprensión. Pienso que los argumentos que usamos son por mucho más atractivo que calcular simplemente x y que el costo que pagamos - a saber la incertidumbre si (3) es correcto o no - equipara la comprensión ganada.

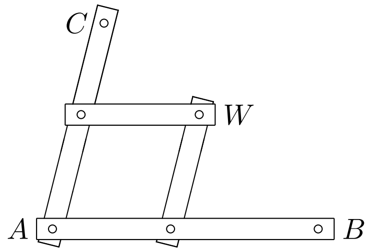
Para extraer aún más de la relación entre la fórmula y la geometría, suponemos la validez de la fórmula (3) como un hecho probado:

$$x = \frac{bc}{b+c}, \tag{3}$$

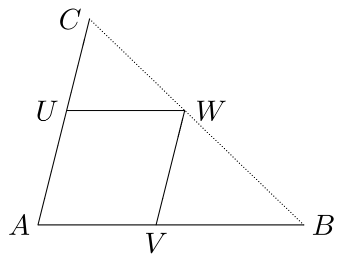
aunque no lo hemos demostrado aún (lo haremos más abajo). ¿Qué otra cosa brinca a la vista en la fórmula a parte de la simetría en b y c? Recordamos que la fórmula expresa la longitud del lado x del rombo en función de los tres lados a, b y c. Entonces debe llamarnos la atención que el lado a ni siquiera aparece en la fórmula. ¿Que significa este hecho geométricamente? Pues, no significa otra cosa que el valor de x no cambia mientras mantenemos fijo los lados b y c aunque variamos el lado a. En otras palabras, el ángulo α puede variarse libremente sin cambio alguno en x, como lo muestra la siguiente ilustración.



Podemos aprovechar esto en la construcción de un mecanismo articulado que tiene dos brazos de longitud b y c se conectan en A tal que puedan girar libremente. Después se insertan otras dos varas para completar el rombo.



Según la fórmula (3), el punto W siempre se encontrará sobre la recta BC al mover el mecanismo. Este mecanismo es bien conocido: se llama el *pantógrafo* y se usa para reducir o ampliar un dibujo. Si se fija el punto B con un clavo en una tabla, entonces un lapiz pegado en el punto W traza una imagen reducido de la trayectoria marcado con una punta en C. Si se coloca el lápiz en C entonces este dibuja una ampliación de lo que indica la punta en W. ¿Por qué esto es así? y además ¿cuál es el factor de ampliación o reducción? Antes de contestar introducimos algunas notaciones adicionales.



Los triángulos $\triangle ABC$, $\triangle UWC$ y $\triangle VBW$ son semejantes. Por ello se tiene

$$\frac{|BW|}{|BC|} = \frac{|BV|}{|BA|} = \frac{c-x}{c},$$

una cantidad que, según la fórmula (3), no puede variar al mover el mecanismo. Eso sigifica que no sólo W está en BC sino también vale que W divide al segmento BC siempre en la misma proporción. Por ello funciona el pantógrafo y al sustituir (3) obtenemos para como factor de reducción el valor $\frac{c}{b+c}$.

Por razones de simetría concluimos que también

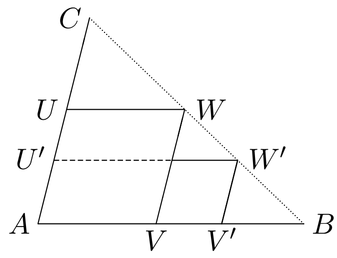
$$\frac{|BW|}{|BC|} = \frac{|BV|}{|BA|} = \frac{b-x}{b}.$$

vale y por ello tenemos

$$1 = \frac{|CW| + |WB|}{|BC|} = \frac{|CW|}{|CB|} + \frac{|BW|}{|BC|} = \frac{b-x}{b} + \frac{c-x}{c}$$

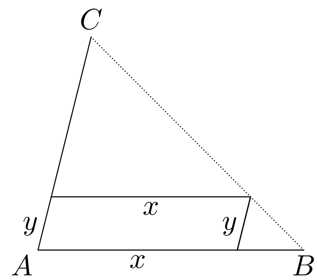
de lo que podemos deducir finalmente la validez de la fórmula (3).

Podemos inscribir en la figura original otro rombo en el triángulo $\triangle VBW$ en la esquina V.



Claro que el mecanismo seguirá funcionando, aún cuando insertamos una vara $U'W'$ que extiende el lado del rombo chico que es paralelo a c.

Pero eso significa que el mecanismo puede funcionar también con algunos paralelogramos especiales en vez del rombo y surge la pregunta si tal vez funcionaría con cualquier paralelogramo. La pregunta es entonces si en la siguiente figura

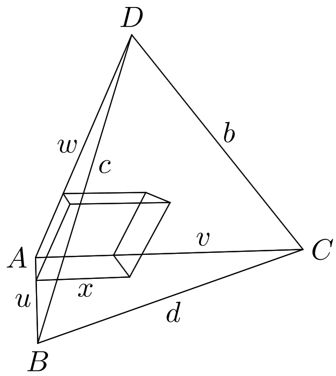


las fórmulas para x y y son independientes de a. En efecto, esto sucede y se obtiene de manera similar

$$y = \frac{b(c-x)}{c}$$

y el factor de reducción nuevamente es $\frac{c-x}{c}$. Encontramos una buena generalización de la situación original.

¿Habrá una situacón análoga en el espacio? Nos preguntamos ¿cuál es la figura análgía al triángulo en el espacio? En el ejemplo que consideramos para la analogía en 1.1 se elaboró una analogía entre el plano y el espacio; ahí el triángulo (dado por $2+1$ puntos no colineales) era análogo al tetraedro (dado por $3+1$ puntos no coplanares). Por ello podríamos intentar de meter un cuerpo en una esquina del tetraedro que es análogo al rombo. El rombo está delimitado por dos pares de lados paralelos que además son iguales. En el espacio debemos delimitar un cuerpo por caras. Exigimos por analogía que las caras aparezcan en pares que son paralelos y que las caras son iguales. El cuerpo que resulta es el paralelepípedo regular. Observamos que necesitamos tres pares de caras.



El paralelepípedo debe meterse así en el tetraedro que tres de sus caras queden dentro de las tres caras del tetraedro que coinciden en la esquina A y que la esquina opuesta del paralelepípedo se encuentra en la cara $\triangle BCD$ del tetraedro que está opuesta al vértice A.

¿Cuál sería la fórmula que expresa la longitud de la arista x del paralelepípedo regular en función de las aristas del tetraedro? Nuevamente no queremos calcular sin pensar sino preferimos preguntar ¿cuál fórmula para x sería análoga a la fómrula original (3) de la situación plana? Suponemos que la analogía es buena y que la fórmula satisfacerá las propiedades análogas. Por ejemplo esperamos que la fórmula sea simétrica en las tres aristas que coinciden en A y que las otras aristas no aparezcan.

Como en (3) aparece el producto de los lados b y c en el nominador y la suma de b y c en el denominador podríamos intentar hacer lo mismo en la situación tridimensional. Obtenemos la fórmula análoga

$$(1') \quad x = \frac{uvw}{u+v+w}.$$

Pero la tenemos que descartar de una vez ya que no nos da la dimensión correcta. La siguiente idea que podríamos intenar es obtener una expresión simétrica al sumar los términos de tipo (3) para cada dos de las tres variables u, v y w.

$$(2') \quad x = \frac{uv}{u+v} + \frac{vw}{v+w} + \frac{wu}{w+u}.$$

Pera aquí habrá que considerar que cada uno de los tres sumandos ya tienen una interpretación geométrica. Si escribimos

$$x_1 = \frac{uv}{u+v}, \quad x_2 = \frac{vw}{v+w}, \quad x_3 = \frac{wu}{w+u}$$

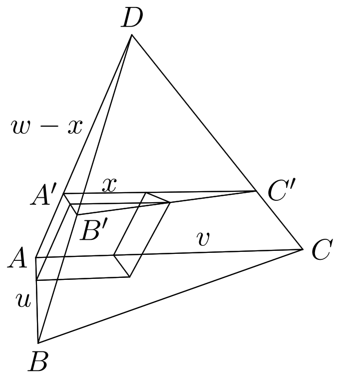
entonces x_1 es la longitud del lado de un rombo insertado en el triángulo $\triangle ABC$. De manera muy similar se interpretan x_2 y x_3. Como $x_1 > x$ no podemos tener $x = x_1+x_2+x_3$. Por ello descartamos también (2′). Hagamos dos intentos más.

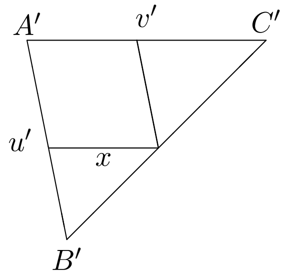
$$(3') \quad x = \frac{uvw}{uv+vw+wu} \qquad (4') \quad x = \frac{uvw}{u^2+v^2+w^2}$$

En ambos mantenemos el nominador como en el primer intento y corregimos el denominador para obtener la dimensión correcta. En (4′) se aumentó la potencia de los sumando por uno, lo que podría considerarse como una analogía de dimensión. En (3′), el denominador expresa el tamaño de las caras que inciden en A. Sugerimos que el lector busque todavía otras fórmulas que son análogos a (3) de alguna manera.

Estos ejemplos muestran muy bien que una analogía no se puede deducir de manera única. Se tiene que luchar por ella, tomando en cuento las nociones que deben corresponder tanto como el resultado. Las dos fórmulas (3′) y (4′) son fórmulas sencillas que dejan traslucir ideas claras de lo que toma en cuenta la analogía. Cual de las dos saldrá correcta se tiene que averiguar con otros medios y bien podría ser que es ninguna de ella.

Consideramos una de las caras del tetraedro, por ejemplo $\triangle ABC$ y sea $\triangle A'B'C'$ el triángulo que se obtiene como intersección del tetraedro por el plano paralelo a $\triangle ABC$ que pasa por el otro lado del paralelepípedo.





Los dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son semejantes y por ello obtenemos las siguientes expresiones para los lados: $u' = |A'B'| = \frac{w-x}{w}u$ y $v' = |A'B'| = \frac{w-x}{w}v$. De la validez de (3) inferimos que

$$x = \frac{u'v'}{u'+v'} = \frac{w-x}{w} \cdot \frac{uv}{u+v}.$$

Observamos aquí que la fórmula (3) se comporta de manera lineal: como u' y v' son múltiples de u y v (con el mismo factor $\frac{w-x}{w}$), también x lo es. Lo discutimos cuando tratamos la dimensión, ahora observamos su efecto. En esta ecuación podemos despejar x:

$$\begin{aligned} x &= \frac{w-x}{w} \cdot \frac{uv}{u+v} && \mid \cdot w(u+v) \\ (uw+vw)x &= (w-x)uv && \mid +uvx \\ (uv+uw+vw)x &= uvw && \mid \div(uv+uw+vw) \\ x &= \frac{uvw}{uv+uw+vw}. \end{aligned}$$

Esto demuestra que (3′) es la analogía buscada.

Si tomamos en cuenta que

$$(3) \qquad x = \frac{bc}{b+c} = \frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

$$(3') \qquad x = \frac{uvw}{uv+uw+vw} = \frac{1}{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}}$$

la analogía es más clara aún y abre la posibilidad de buscar analogías en dimensiones mayores que tres.

1.3 Comentarios

Si resumimos lo que hicimos, podemos observar que a partir de un ejemplo muy sencillo, que en principio no propone nada espectacular, llegamos a consideraciones interesantes que rebasan por mucho el cálculo explícito del ejercicio tradicional. Lo que nos guió en este desarrollo son los patrones de analogía, de generalización, de simetría y tal vez también la elegancia.

Pienso que hay muchos ejercicios como este, que permiten un acercamiento más atractivo, donde la aplicación de estos patrones generan una interacción interesante que rebasa el propio ejercicio. También enfatizamos que la demostración en este desarrollo no se encuentra en primer plano, un hecho que volvemos a discutir con mayor detalle en el sigiuente capítulo. Pero poner el énfasis en estos patrones logra aún una cosa más: nos hace reflexionar sobre fórmulas, figuras y números más que sólo tratarlos mecánicamente.

Los patrones expuestos presentan estrategias generales para atacar un problema nuevo, para analizarlo y familiarizarse con él. Los patrones se pueden encontrar en muchos lugares, aún fuera de las matemáticas y es por ello que un tratamiento cuidadoso de ellos ayuda a los alumnos para estructurar su pensamiento, para que analicen su entorno y lo reflexionen. Con el ejemplo que vimos a detalle queríamos mostrar que el maestro puede encontrar los patrones en muchos lugares.

1.4 Propuestas

1. Considera el teorema del coseno como generalización del teorema de Pitágoras. Considera también los casos extremos cuando el ángulo entre los dos lados es cero o igual a dos rectos.

2. La prueba del 3 y del 9 admiten una generalización a sistemas p-ádico. Formula la generalización y demúestrala.

3. Las rectas notables junto con los puntos notables en un triángulo son: las alturas que dan lugar al ortocentro, las medianas que dan lugar al baricentro, las mediatrices que dan lugar al circuncentro y las bisectrices que dan lugar al incentro. ¿Cuáles objetos (rectas o puntos) permiten una analogía en el tetraedro?

4. La analogía de los poliedros en mayores dimensiones se llama *politopo*.

Trata de formular una definición de politopo *regular*. Usando libros o el internet, averigua cuáles son los politopos regulares en cuatro dimensiones.

2 Conjeturar o demostrar

Revisemos el ejemplo expuesto en 1.2. Aunque el texto no es el protocolo de una clase real sino una exposición para su lectura, podemos ver que se da mucho más lugar al desarrollo de la comprensión que a la demostración. Esta última se encuentra en segundo plano y entra en acción sólo después de haber generado una inquietud, una posible afirmación que puede ser cierta o no. En este capítulo quisieramos retomar y profundizar esta idea.

2.1 Líneas en el plano

Las siguientes actividades están inspiradas en el libro de Pólya *Mathematics and Plausible Reasoning* que es una fuente extremadamente rica.

Dadas n rectas en el plano, ¿qué preguntas interesantes nos podemos hacer? Enlistaré las respuestas que me dieron unos maestros del bachillerato de la UNAM en el curso "Didáctica de las Matemáticas I" del MADEMS:

a. ¿En cuáles ángulos se intersecan las rectas?

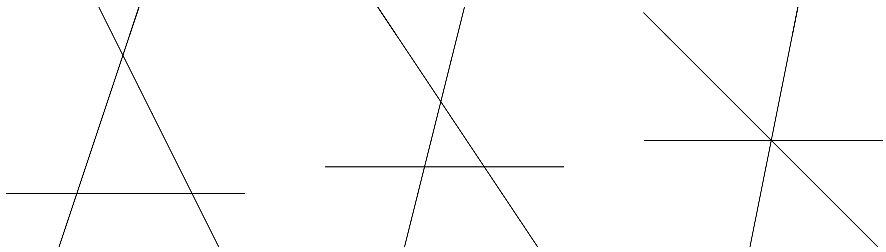
b. ¿Cuántas cruces de dos o más rectas hay en total?

c. ¿Cuántas regiones se definen por las rectas?

d. ¿Cuántos colores se necesitan para iluminar las regiones (tal que dos regiones adyacentes tengan diferentes colores)?

e. Podemos ver cómo influye la existencia de rectas paralelas o perpendiculares en las respuestas a las preguntas anteriores.

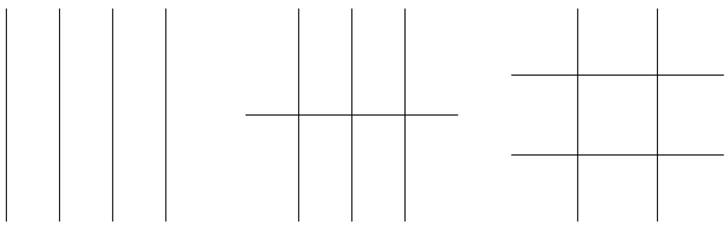
La opción **e.** es diferente porque no es una pregunta, sino una idea de estudiar cómo las respuestas a las preguntas anteriores dependen de ciertos efectos. Pero de las cuatro primeras respuestas, **a.** es claramente diferente a las demás. ¿En qué difiere? En las preguntas **b.**, **c.** y **d.** esperamos un número finito, que depende del número n y también de la situación dada. Observamos las siguientes tres situaciones



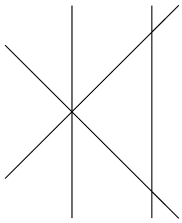
Podemos imaginarnos que las tres situaciones se obtienen en tres momentos al mover las rectas. Las respuestas a las preguntas **b.**, **c.** y **d.** se mantendrán estables durante períodos largos del movimiento y sólo en momentos determinados, tal como lo muestra la tercera situación pasa algo. La respuesta a la pregunta **a.** en cambio sigue variando todo el tiempo.

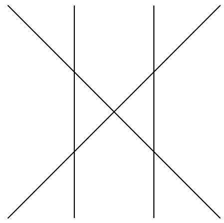
Ahora, la situación original era muy general y no se dijo en ningún lugar que ibamos mover las rectas. Sin embargo, si buscamos preguntas cuya respuesta depende más bien del número de rectas n y menos de la situación concreta, la respuesta **a.** no califica, mientras las otras tal vez si lo hacen. Por ello ya no seguiremos investigando **a.**

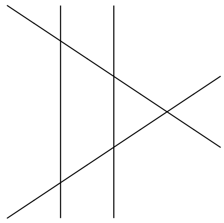
Empecemos a investigar las otras preguntas. Para obtener una primera idea podríamos estudiar unos casos particulares como los siguientes donde $n = 4$.

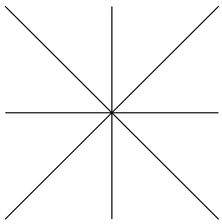


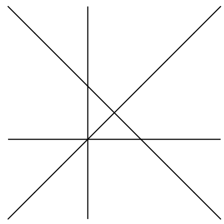
caso 1 caso 2 caso 3

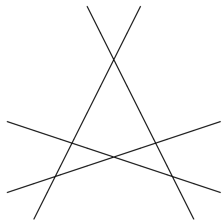

caso 4


caso 5


caso 6


caso 7


caso 8


caso 9

La siguiente tabla muestra los resultados para las tres preguntas **b.**, **c.** y **d.** en cada uno de estos casos.

	Número de		
	cruces	regiones	colores
caso 1	0	5	2
caso 2	3	8	2
caso 3	4	9	2
caso 4	3	9	2
caso 5	5	10	2
caso 6	5	10	2
caso 7	1	8	2
caso 8	4	10	2
caso 9	6	11	2

Dos cosas nos deberían llamar la atención: por un lado, la última columna siempre es 2, es decir en cada caso sólo se necesitan dos colores (blanco y negro, por ejemplo) para iluminar las regiones. Esto puede verificarse fácilmente si empezamos iluminando cualquier región con blanco y luego iluminamos cada región adyacente a esta por negro y a todas adyacentes a estos negros con blanco y así subsequentemente. Lo que soprende es que siempre funciona en etos ejemplos y nos lleva a *conjeturar* que para cualquier situación (de regiones definidas por n rectas en el plano) sólo se necesitan dos colores.

La segunda observación concierne las primeras dos columnas, es decir las preguntas **b.** y **c.**: en ambos casos el máximo número se alcanza en la última situación. ¿Qué hace este caso especial? En comparación con los demás podemos observar que

(i) no hay ningún par de rectas paralelas,

(ii) no hay tres rectas que se intersecan en un sólo punto.

De hecho es el único caso con estas dos propiedades. Claro, si hay dos rectas paralelas, estas dos no contribuyen a la cuenta de puntos de intersección y dos rectas que se cortan definen cuatro regiones y no sólo tres como lo hacen rectas paralelas. De ahí, no nos deben sorprender estas propiedades. Por ello podríamos *conjeturar* que el número máximo de cruces y el número máximo de regiones definidos por n rectas en el plano se obtiene cuando (i) y (ii) se satisfacen.

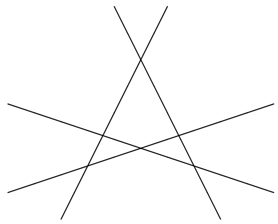
Esto podría atraer nuestra atención y modificar las preguntas originales **b.** y **c.** de la siguiente manera:

b'. ¿Cuántas cruces de dos o más rectas puede haber a lo máximo entre n rectas en el plano?

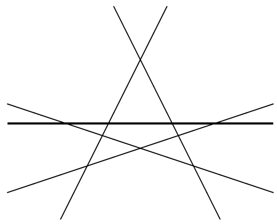
c'. ¿Cuántas regiones se pueden definir a lo máximo por n rectas en el plano?

Esto son preguntas más precisas, porque para cada número natural n hay una única respuesta. En otras palabras, lo que queremos averiguar son los valores de dos funciones desconocidas $b(n)$ y $c(n)$. Eso nos permite considerar las respuestas a las preguntas **b'.** y **c'.** para todos los posibles valores de n simultaneamente. Aunque parece tal vez que ahora el problema sea más difícil, porque ya no tenemos que contestar la pregunta para un n dado, sino para todos los posibles valores de n al mismo tiempo, en realidad el problema es más fácil: podemos usar posibles relaciones entre $b(n)$ para diferentes valores de n y esto nos puede dar la idea de usar la inducción, es decir estudiar la relación entre $b(n)$ y $b(n+1)$. ¿Cómo cambian los valores al introducir una nueva recta?

Veamos el ejemplo del caso 9 arriba.



caso 9



caso 9'

Para obtener un valor lo más alto posible para $b(5)$ tenemos que cuidar las propiedades (i) y (ii) al introducir la nueva recta. En este caso, la nueva recta (la quinta en nuestro ejemplo) intersecará cada una de las otras recta en un punto distinto. Así que obtendremos

$$b(n+1) = b(n) + n$$

¡Pero alto ahí! ¿Qué nos asegura que no es posible obtener más puntos de intersección entre $n+1$ rectas partiendo de una situación no maximal con n rectas? Supusimos implícitamente que es mejor partir de una situación con n rectas donde ya tenemos $b(n)$ cruces. Para obtener absoluta certeza tendríamos que ser más cuidadosos. Lo que podemos afirmar con certeza es

$$b(n+1) \geq b(n) + n$$

porque podemos empezar con una situación de n rectas donde alcanzamos $b(n)$ cruces y luego añadir una recta más que satisface (i) y (ii) – que siempre podemos introducir una recta así muestra el siguiente argumento: usaremos una inclinación nueva para la nueva recta (así no será paralela a ninguna recta existente) y la pondremos lejos de cualquier punto de intersección existente (así también (ii) se satisfacerá). Entonces nos falta verificar la otra desigualdad:

$$b(n+1) \leq b(n) + n$$

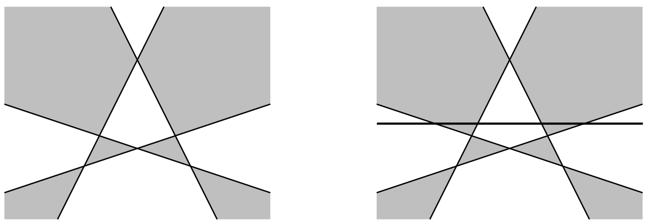
que tampoco es difícil: Suponemos que tenemos $n+1$ rectas en una situación que se obtengan $b(n+1)$ cruces y marcamos una de estas rectas como la "nueva". Al quitarla no podemos tener más de $b(n)$ cruces entre las otras rectas y claramente no podemos tener más de n intersecciones de la nueva recta con las demás. Por ello sí tenemos $b(n+1) \leq b(n) + n$.

¿Cómo aumenta el número máximo de regiones? La nueva recta cortará algunas regiones y otras no. Pero cada región cortada nos dará una región nueva (dos nuevas menos la vieja que se partió). Si tratamos de analizar cuántas regiones se pueden cortar a lo máximo por una "nueva" recta, el problema parece muy difícil, pero si nos damos cuenta que las regiones cortadas las podemos contar en la recta como los intervalos entre los puntos de intersección, ya es muy fácil después de lo que vimos. Hay a lo máximo n puntos de intersección distintos y por ello $n+1$ intervalos en la "nueva recta". Con una argumento análogo como para la función $b(n)$ podemos demostrar

$$c(n+1) = c(n) + (n+1).$$

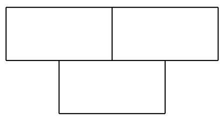
Tenemos $c(0) = 1$ y $c(1) = 2$ y luego $c(2) = 4$, $c(3) = 7$ y $c(4) = 11$ como lo observamos.

Queda por resolver la pregunta **d.** del número máximo de colores que se necesitan para iluminar las regiones; en particular deberíamos verificar la conjetura que siempre bastan dos colores o encontrar un contraejemplo. ¿Cómo nos podría ayudar la inducción? Tendríamos que encontrar a partir de una coloración válida (tal que dos regiones adyacentes tengan colores distintos) para n rectas dadas una nueva coloración válida para la situación donde introducimos una nueva recta.



Nuestro ejemplo muestra que las únicas regiones adyacentes que no tienen colores distintos son aquellas regiones que surgieron como partes de una región que fue partida por la nueva recta. Por lo tanto, para cada par de estas regiones habrá que cambiar la coloración en una de ellas (y sólo en una). Si empezamos a cambiar una de estas regiones, por ejemplo una de "abajo" (en nuestro dibujo la "nueva" recta es casi horizontal), también habrá que cambiar el color de las regiones abajo que son adyacentes a esta primera y luego succesivaemnte cada region de abajo. Claro, si intercambiamos los dos colores de todos las regiones de abajo volvemos a obtener una coloración válida de la parte de abajo. ¡Esto es la solución! Intercambiamos los dos colores para todas las regiones de un sólo lado de la nueva recta; así obtendremos una coloración válida: dos regiones que son adyacentes y separados por una recta “vieja” seguirán teniendo distintos colores y dos regiones adyacentes y separados por la nueva recta también tendrán colores distintos.

Hay toda una variedad de preguntas relacionadas o similares. Por ejemplo nos podríamos preguntar las mismas preguntas para circunferencias en vez de rectas: el máximo número posible de intersecciones (o regiones) de n circunferencias; el mínimo número de colores que se requieren para iluminar. No es difícil ver que el mismo argumento inductivo muestra que basta nuevamente con dos colores. Aparentemente cada vez que tenemos un trazo cerrado que divide el plano en dos partes separados podríamos intercambiar los colores de una de las dos partes. Pero este argumento es erróneo como muestra el siguiente ejemplo donde se trazaron tres rectángulos:



¿Qué falla en el argumento? O más bien ¿por qué sí funciona el argumento con rectas y circunferencias y aún con una mezcla de ellas?

Para contar regiones, podríamos tomar segmentos en vez de tomar circunferencias, lo que conduce a la pregunta por el máximo número posible de regiones “finitos”, es decir regiones que pueden ser encerrados en un círculo.

También nos podríamos preguntar por una analogía en tres dimensiones: ¿Cuál es el máximo número posible $d(n)$ de regiones que definen n planos en el espacio? Podemos adaptar las consideraciones del plano al espacio. La clave es que hay que contar el máximo número de regiones tridimensionales que es posible partir al insertar un nuevo plano. Esto se resuelve si nos damos cuenta que cada una de estas regiones tridimensionals corresponde a una región bidimensional en el nuevo plano: las regiones bidimensionales que se definen por las rectas de intersección con los “viejos” planos. Ahora ya no debe resultar demasiado difícil demostrar que en efecto

$$d(n+1) = d(n) + c(n)$$

donde $c(n)$ es el máximo número posible de regiones bidimenionales definidos por n rectas.

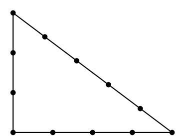
2.2 Triadas pitagóricas

Una de las tablillas de los Babilonios data de 1900-1600 a.C. y contiene más o menos este texto:

4 es la longitud y 5 es la diagonal. ¿Cuál es el ancho?
No se conoce su tamaño.
4 por 4 es 16.
5 por 5 es 25.
Si se resta 16 de 25 quedan 9.
¿Qué por qué da como resultado 9?
3 por 3 es 9
3 es el ancho.

¿De qué nos habla? Lo que resuelve es $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$, donde 5 es la diagonal de algo y 4 su longitud y luego 3 resulta su ancho. ¡Es un rectángulo y nos habla de uno muy en especial!

Conocido es la leyenda que ya los Egiptos usaron hilos con nodos para formar ángulos rectos en los campos que dejó cada año el Nilo después de inundarlos:



La triada $(3, 4, 5)$ es una *triada pitagórica*: consiste de números naturales tales que la suma del cuadrado de los primeros dos igual al cuadrado del tercer número. Al encontrar una triada pitagórica surge la pregunta si existirán otras. Dada la ecuación

$$a^2 + b^2 = c^2, \tag{1}$$

¿cuántas soluciones de números enteros tendrá? Podemos observar que si una triada de números (a, b, c) satisfacen esta ecuación entonces también cualquier múltiplo de ellos como $(2a, 2b, 2c)$ o $(3a, 3b, 3c)$ o más en general $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$. La razón es que la ecuación (1) es *homogéneo* de grado dos, es decir el grado total de cada monomio es dos. Por ello $(6, 8, 10)$, $(9, 12, 15)$ y $(300, 400, 500)$ también son triadas pitagóricas. Pero si pensamos que estas triadas definen triángulos rectángulos, entonces todas estas triadas definen triángulos semejantes al de arriba de la cuerda de nodos. Lo que buscamos son otras triadas pitagóricas (a, b, c) que son *primitivas*, donde $\text{mcd}(a, b, c) = 1$.

Entonces la pregunta es si existen otras triadas pitagóricas, que definen triángulos distintos, no semejantes al de arriba. Para tratar de encontrar podríamos hacer una tabla de los números cuadrados y ver su suma:

	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	2	5	10	17	26	37	50	65	82
4	5	8	13	20	29	40	53	68	85
9	10	13	18	**25**	34	45	57	73	90
16	17	20	**25**	32	41	52	65	80	97
25	26	29	34	41	50	61	74	89	106
36	37	40	45	52	61	72	85	**100**	117
49	50	53	57	65	74	85	98	115	130
64	65	68	73	80	89	**100**	115	128	145
81	82	85	90	97	106	117	130	145	162

Resaltamos los números cuadrados. Pero así sólo encontramos dos soluciones, a saber $9 + 16 = 25$ y $36 + 64 = 100$ que corresponden a las triadas que ya tenemos $(3, 4, 5)$ y $(6, 8, 10)$. Tal vez no tomamos números lo suficientemente grandes o tal vez no es una estrategia tan buena. Incluimos el número 1 como cuadrado del 1, pero ¿habrá una triada pitagórica $(1, b, c)$?

La pregunta si existe triada piotagórica $(1, b, c)$ la podemos reformular así: ¿existirán números cuadrados cuya diferencia es uno: $c^2 - b^2 = 1$? Pues no, la diferencia entre b^2 y $(b + 1)^2$ es $2b + 1 \geq 3$ (aquí usamos que $b \geq 1$), es decir la diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos (positivos y naturales) es mayor que uno y es aún mayor si $c - b > 1$, es decir si la diferencia entre b y c es mayor que uno. Ahora podríamos buscar una triada $(2, b, c)$, es decir números b y c tales que $c^2 - b^2 = 4$. Nuevamente, esto no existe: la diferencia entre b^2 y $(b + 1)^2$ es impar y la diferencia entre b^2 y $(b + 2)^2$ es $4b + 4 \geq 8$.

Ya sabems que existe una triada pitagórica $(3, b, c)$ que es $(3, 4, 5)$, pero ¿será la única? Bueno si escribimos $c = b + \delta$, entonces tendríamos $9 = c^2 - b^2 = 2b\delta + \delta^2$. Pero si δ es par entonces también $2b\delta + \delta^2$ es par y $9 = 2b\delta + \delta^2$ no se cumple. Por otro lado necesitamos $\delta < 3$ (sino $2b\delta + \delta^2 > 9$), lo que reduce nuestras opciones a $\delta = 1$ y entonces $9 = 2b + 1$ implica $b = 4$. Seguimos sin nueva triada pitagórica pero ganamos ya un mejor entendimiento: si fijamos

a podemos buscar de manera determinante b y c. Probamos esto con $a = 4$. Tenemos que resolver $16 = 2b\delta + \delta^2$. Eso implica que δ es par. Por otro lado $\delta < 4$. Así, que sólo queda $\delta = 2$. Entonces $b = 3$ y $c = b + \delta = 5$. Pero esta triada también ya la tenemos. Probamos con $a = 5$. Tenemos que resolver $25 = 2b\delta + \delta^2$. Ahora δ tiene que ser impar y menor que 5, es decir contamos con dos opciones: $\delta = 3$ y $\delta = 1$. La primera no es posible porque $25 = 6b+9$ implica que b no es natural. Pero la segunda opción da algo nuevo: $b = 12$ y $c = 13$. ¡Por fin encontramos una nueva triada: $(5, 12, 13)$!

De nuevo, solamente encontramos una triada pitagórica para un número dado a. Tal vez sea un poco temprano formular a partir de sólo dos ejemplos de triadas primitivas ya la conjetura de que dado un número natural a hay a lo máximo una triada pitagórica (a, b, c). Debemos ser cautelosos porque nuestros ejemplos son números chicos, de hecho son los ejemplos más chicos (así los buscamos). Pero hay otro dato que nos podría llamar la atención: en ambos ejemplos tenemos que $c = b + 1$. Podríamos pensar de dos maneras sobre esta observación: tal vez sólo hay triadas pitagóricas con $c = b + 1$ o tal vez sea más fácil encontrar estos porque hay muchos. Si seguimos la primera idea podríamos tratar de buscar un ejmeplo donde $c > b + 1$, pero si seguimos la segunda idea podríamos tratar de encontrar todas las triadas pitagóricas $(a, b, b + 1)$.

Ambas ideas son fructíferas, como pronto veremos. Empezaremos con la segunda: si $c = b + 1$ entonces (1) se reescribe

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= b^2 + 2b + 1 && \mid\ -b^2 \\ a^2 &= 2b + 1 && \mid -1, \div 2 \end{aligned}$$

En esta ecuación podemos despejar b y obtenemos

$$b = \frac{a^2 - 1}{2},$$

es decir, si damos un valor de a obtenemos el (único) valor de b y con ello $c = b + 1$. Pero cuidado: para que b sea un número natural necesitamos que $a^2 - 1$ sea par, es decir que a^2, y con ello a, sean impar. En la siguiente tabla mostramos las primeras triadas pitagóricas que se obtienen así.

a	b	c
3	4	5
5	12	13
7	24	25
9	40	41
11	60	61
13	84	85
15	112	113
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Es claro que la tabla es infinita, pero ¿será cierto que cada dos triada distintos describirán dos triángulos distintos (no semejantes)? Esto es en efecto así y el argumento es fácil y lo dejamos al lector interesado.

Pero con lo que hicimos también podemos atacar la primera idea arriba: podemos buscar triadas pitagóricas $(a, b, b+2)$, $(a, b, b+3)$ etc. Si $c = b+2$ entonces obtenemos de (1) que $a^2 = 4b + 4$. Por ello a^2 debe ser divisible entre 4 y a debe ser par. Entonces tenemos $b = \frac{a^2}{4} - 1$. La siguiente tabla muestra las triadas que obtenemos así.

a	b	c	
4	3	5	**
6	8	10	*
8	15	17	
10	24	26	*
12	35	37	
14	48	50	*
16	63	65	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Observamos que la primera triada listada (marcada con **) ya la tenemos en la tabla arriba y que las triadas marcadas con * no son triadas primitivas sino se pueden ver como triadas obtenidos de la primera tabla al duplicarlas. Pero las demás son nuevas y primitivas. Esta tabla es interesante porque al paracer solo cada segunda triada es primitiva. Podríamos conjeturar que si a es divisible entre 4 entonces la triada

$$(a, \tfrac{a^2}{4} - 1, \tfrac{a^2}{4} + 1) \tag{2}$$

es primitiva; si a es par pero no divisible entre 4, entonces la triada (2) no es primitiva (sino divisible entre dos). Veamos: si a es par podemos escribir $a = 2a'$ donde a' es un número natural. Luego obtenemos $b = a'^2 - 1$ y $c = a'^2 + 1$. Ahora si a' es par entonces b es impar y al revés: si a' es impar entonces b es par. Esto demuestra lo observado.

Veamos ahora triadas de la forma $(a, b, b+3)$. De (1) obtenemos $a^2 = 6b+9$ por lo que a^2 y con ello a debe ser divisible entre 3 e impar. Entonces obtenemos $b = \frac{a^2-9}{6}$ y podemos observar las triadas pitagóricas más pequeñas que se obtienen así en la tercera tabla:

a	b	c	
3	0	3	no es triada válida
9	12	15	es múltiplo de $(3, 4, 5)$
15	36	39	es múltiplo de $(5, 12, 13)$
21	72	75	es múltiplo de $(7, 24, 25)$
27	120	123	es múltiplo de $(9, 40, 41)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Al parecer no obtenemos ninguna triada primitiva de esta manera. Pero, ¿será cierto que nunca obtenemos una triada primitiva de esta manera? Bueno, si a es divisible entre 3 (lo que debe ser, como vimos) entonces a^2 es divisible entre 9 y por lo tanto también $a^2 - 9$ es divisible entre 9. Por ello $b = \frac{a^2-9}{6}$ es divisible entre 3. Pero entonces c también es divisible entre 3.

Encontramos primero que no sólo hay triadas pitagóricos (a, b, c) con $c = b+1$ sino que también hay otras con $c > b + 1$. Pero después vimos que no hay triadas pitagóricos primitivos con $c = b+3$. Esto podría conducirnos a la idea de investigar para cuales diferencias δ (es decir $c = b + \delta$) existirán triadas pitagóricas primitivas. Si $c = b + \delta$ obtenemos de (1) que $a^2 = 2b\delta + \delta^2$. Por ello a debe ser divisible entre δ. Ahora bien: si δ es un primo entonces esto implica que a mismo es divisible entre δ y por ello a^2 es divisible entre δ^2. Entonces $b = \frac{a^2-\delta^2}{2\delta}$ es divisible entre δ (aquí usamos que $\delta > 2$). Por ello también $c = b + \delta$ es divisible entre δ y la triada (a, b, c) no es primitiva. Si δ no es un primo puede haber esperanza para encontrar otras triadas pitagóricas primitivas. Pero si escribimos $\delta = \delta_1\delta_2 \ldots \delta_t$ como producto de factores primos entonces podemos repetir el argumento anterior en el caso que cada dos factores son distintes, es decir si δ no es divisible entre un número cuadrado.

En vez de seguir un análisis cada vez más sofisticado intentamos mejor un caso sencillo: $\delta = 4$. Entonces obtenemos $a^2 = 8b+16$. Por ello a^2 es divisible entre 8 y por ello a es divisible entre 4, por lo que a^2 es divisible entre 16 y entonces b debe ser divisible entre 2, lo que implica que la triada no es primitiva. Este intento falló porque nos jugó una mala jugada el factor dos en $2b\delta$ en la expansión de $(b + \delta)^2$. Probemos entonces con $\delta = 9$. Tenemos entonces $a^2 = 18b + 81$, lo que implica que a^2 es divisible entre 9. Esto implica sólo que a es divisible entre 3 y debemos buscar un a no divisible entre 9 (sino de nuevo b resulta divisible entre 9 y no obtenemos una triada primitiva). Como esperamos $a < b$ tenemos $a^2 < b^2$ es decir $18b + 81 < b^2$. Esto se cumple para $b \geq 22$. Podríamos intentar $a = 21$ o $a = 33$. La primera elección da la triada $(21, 20, 29)$ que es nueva (aunque no satisface $a < b$) y la segunda da $(33, 56, 65)$ que también es nueva.

Podemos calcular la triada pitagórico primitiva $(33, b, b + 1)$. Obtenemos $b = 544$ y esto muestra que sí puede haber distintas triadas pitagóricas primitivas (a, b, c) con el mismo a. Eso refuta nuestra prematura conjetura de antes.

Este único ejemplo muestra que sí hay más triadas $(a, b, b+\delta)$ con $\delta > 2$. La siguiente lista muestra todas las triadas primitivas encontradas hasta ahora:

$$\begin{array}{cccc}
(3,4,5), & (5,12,13), & (7,24,25), & (8,15,17), \\
(9,40,41), & (11,60,61), & (12,35,37), & (13,84,85), \\
(15,112,113), & (16,63,65), & (20,21,29), & (33,56,65) \\
(33,544,545). & & &
\end{array}$$

Si vemos esta lista que reune el resultado de nuestros esfuerzos, ¿qué propiedad común podemos descubrir entre todas las triadas? Después de ver los primeros ejemplos podríamos pensar que cada triada contiene un número primo, pero eso es falso como lo muestra $(16, 63, 65)$.

Después podríamos fijarnos en la divisibilidad de los miembros de cada triada – recordamos que usamos varias veces argumentos de divisibilidad antes. Encontramos que en ningún caso c es divisible entre 2, mientras uno de los dos, a ó b, siempre es divisible entre 2. ¿Será cierto para todas las triadas primitivas? ¿Por qué no es posible que a y b son impares? En este caso a^2 y b^2 también serían impares y su suma c^2 sería par. Por ello c mismo sería par y c^2 divisible entre 4. ¿Es posible que la suma de dos cuadrados de números impares es divisible entre 4?. Si escribimos $a = 2m + 1$ y $b = 2n + 1$ vemos rápidamente que esto no puede ser:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 \\ &= 4(m^2 + m + n^2 + n) + 2 \end{aligned}$$

nunca puede ser divisible entre 4. Por ello, nuestra conjetura de que siempre a ó b tiene que ser par es cierto en general.

Si b es el número par entonces $b^2 = c^2 - a^2$ es divisible entre 4. Si escribimos $c^2 - a^2 = (c + a)(c - a)$ entonces podemos observar que $c + a$ y $c - a$ son números pares. Con $b = 2B$ podemos entonces escribir

$$B^2 = \frac{c+a}{2} \cdot \frac{c-a}{2},$$

donde los dos factores del lado derecho son enteros positivos.

Veamos estos tres números en nuestros ejemplos:

(a, b, c)	B^2	$\frac{c+a}{2}$	$\frac{c+a}{2}$
$(3, 4, 5)$	4	4	1
$(5, 12, 13)$	36	9	4
$(7, 24, 25)$	144	16	9
$(15, 8, 17)$	16	16	1
$(9, 40, 41)$	400	25	16
$(11, 60, 61)$	900	36	25
$(35, 12, 37)$	36	36	1
$(13, 84, 85)$	1764	49	36
$(15, 112, 113)$	3136	64	49
$(63, 16, 65)$	64	64	1
$(21, 20, 29)$	100	25	4
$(33, 56, 65)$	784	49	16
$(33, 544, 545)$	73984	289	256

Si miramos esta tabla, hay algo que debe sorprendernos. ¡Todos estos números son cuadrados! Eso es trivial para B^2, pero para los otros no lo es. ¿Por qué será cierto que $\frac{c+a}{2}$ y $\frac{c-a}{2}$ son siempre números cuadrados? Bueno, ni siquiera es claro que así sea, pero la evidencia es abrumante. ¿O no? Trece casos parecen suficientes para consolidar nuestra confianza en que así debe ser siempre; pero obviamente no nos libera de buscar una argumento riguroso.

Podríamos tratar de voltear el argumento: ¿podemos formar una triada pitagórica a partir de dos números cuadrados para $\frac{c+a}{2}$ y $\frac{c-a}{2}$? Intentemos: si $\frac{c+a}{2} = 36$ y $\frac{c-a}{2} = 4$ entonces tenemos

$$c = \tfrac{c+a}{2} + \tfrac{c-a}{2} = 40, \quad a = \tfrac{c+a}{2} - \tfrac{c-a}{2} = 32 \quad \text{y} \quad B = \sqrt{\tfrac{c+a}{2} \cdot \tfrac{c-a}{2}} = 18.$$

Obtuvimos la triada pitagórica $(32, 36, 40)$ que no es primitiva sino un múltiple de $(3, 4, 5)$. Claro, como los dos cuadrados con las cuales empezamos $\frac{c+a}{2} = 36$ y $\frac{c-a}{2} = 4$ son divisibles entre 4, también su suma c y su diferencia a es divisible entre 4. Para obtener una triada primitiva necesitamos que los dos números $\frac{c+a}{2}$ y $\frac{c-a}{2}$ sean primos relativos. Si miramos nuevamente la tabla arriba podemos observar que esto es así en los ejemplos listados. Es más, es el argumento que demuestra que $\frac{c+a}{2}$ y $\frac{c-a}{2}$ son primos relativos: si no lo fueran, habría un número $d > 1$ que divide a ambos y entonces d también dividiera c y a, lo que es imposible si (a, b, c) es una triada primitiva. Esto muestra lo siguiente: si (a, b, c) es una triada primitiva donde b es par entonces $\frac{c+a}{2}$ y $\frac{c-a}{2}$ son primos relativos cuyo producto

$$B^2 = \frac{c+a}{2} \cdot \frac{c-a}{2}$$

es un cuadrado. Pero eso implica que ambos números, $\frac{c+a}{2}$ y $\frac{c-a}{2}$, son cuadrados. ¡Demostramos la conjetrura que formulamos a partir de observar la tabla!

Con $\frac{c+a}{2} = 36$ y $\frac{c-a}{2} = 4$ obtuvimos la triada pitagórica $(32, 36, 40)$. Será cierto que con cualquieras dos números cuadrados para $\frac{c+a}{2}$ y $\frac{c-a}{2}$ obtenemos una triada? Intentemos otro ejemplo que no está en la tabla: $\frac{c+a}{2} = 1$ y $\frac{c-a}{2} = 9$. Entonces $c = 10$, $a = 8$ y $b = 6$. Eso es una triada pitagórica aunque no es primitiva. Podríamos ahora intentar hacerlo en general. Si

$$\frac{c+a}{2} = r^2 \quad \text{y} \quad \frac{c-a}{2} = s^2$$

entonces

$$B^2 = \frac{c+a}{2} \cdot \frac{c-a}{2} = (rs)^2$$

de lo que sigue que $b = 2B = 2rs$. Entonces podemos resumir cómo se obtienen a, b y c a partir de $s < r$ de la siguiente manera:

$$a^2 = r^2 - s^2, \quad b = 2rs \quad \text{y} \quad c = r^2 + s^2 \tag{3}$$

y podemos calcular

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= (r^2-s^2)^2+(2rs)^2 \\ &= r^4-2r^2s^2+s^4+4r^2s^2 \\ &= (r^2+s^2)^2 \\ &= c^2. \end{aligned}$$

Esto muestra que en efecto siempre obtenemos una triada pitagórica. ¿Será posible obtener todas las triadas pitagóricas de esta manera?

Cada triada pitagórica es de la forma $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ donde (a,b,c) es una triada pitagórica primitiva con b par y $\lambda \geq 1$ un número natural. En lo anterior se mostró que los números $\frac{c+a}{2}$ y $\frac{c-a}{2}$ son cuadrados. Como b es par λb sigue siendo par y entonces λa y λc son ambos pares o ambos impares (dependiendo si λ es par o no). De cualquier manera, los números $\lambda c+\lambda a$ y $\lambda c-\lambda a$ son pares siempre y podemos escribir (con $b=2B$)

$$\lambda^2 B^2 = \tfrac{\lambda c+\lambda a}{2}\cdot\tfrac{\lambda c-\lambda a}{2} = \left(\lambda\tfrac{c+a}{2}\right)\cdot\left(\lambda\tfrac{c-a}{2}\right).$$

Sabemos que $\frac{c+a}{2}$ y $\frac{c-a}{2}$ son números cuadrados pero esto no implica que $\lambda\frac{c+a}{2}$ y $\lambda\frac{c-a}{2}$ también lo sean, al contrario: si λ no es un cuadrado entonces no lo serán como por ejemplo para $\lambda=3$. La triada $(9,12,15)$ no se puede obtener mediante (3). Así que no es posible obtener cualquier triada pitagórica de esta manera.

Hemos encontrado un buen número de hechos, que podemos resumir en el siguiente cuadro.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{l}\text{$s<r$ con mcd$(s,r)=1$}\\ \text{define (a,b,c) mediante (3)}\end{array}} \arrow[d, Rightarrow, shift right=2] \arrow[r, Rightarrow, shift right, "\times" description] & \boxed{\begin{array}{l}\text{(a,b,c) es triada pitagórica}\\ \text{primitiva}\end{array}} \arrow[l, Rightarrow, shift right] \\
\boxed{\begin{array}{l}\text{$s<r$ define (a,b,c)}\\ \text{mediante (3)}\end{array}} \arrow[u, Rightarrow, shift right=2, "\times" description] \arrow[r, Rightarrow, shift right] & \boxed{\text{(a,b,c) es triada pitagórica}} \arrow[l, Rightarrow, shift right, "\times" description]
\end{tikzcd}$$

Ya vimos que no es posible obtener cualquier triada pitagórica mediante (3) para números adecuados $s<r$. Pero tal vez es posible restringir aún más

la propiedad $s < r$ y $\operatorname{mcd}(s, r) = 1$ para obtener así todas las triadas primitivas. Veamos nuevamente el ejemplo donde $\frac{c+a}{2} = 9$ y $\frac{c-a}{2} = 1$. Entonces obtuvimos la triada $(8, 6, 10)$ que no es primitiva. Claro, si ambos números r y s son impares entonces $a = r^2 - s^2$ y $c = r^2 + s^2$ son pares, por lo que (a, b, c) no puede ser primitiva. En efecto en nuestra tabla se ve que siempre uno de los dos números, r ó s, es par y el otro impar. Además, el argumento anterior muestra que siempre tiene que ser así. Eso muestra que

Dos números primos relativos $s < r$, no ambos impares definen (a, b, c) mediante (3)	$\overset{\text{sí}}{\Longleftarrow}$ $\underset{?}{\Longrightarrow}$	(a, b, c) es triada pitagórica primitiva

¿Será cierta la implicación "$\Longrightarrow$"? Tendríamos que demostrar que los números

$$a = r^2 - s^2, \quad b = 2rs \quad \text{y} \quad c = r^2 + s^2$$

son primos relativos, dado que $s < r$ son primos relativos no ambos impares. Sabemos entonces que existen números enteros m y n tales que

$$mr + ns = 1. \tag{4}$$

Como r y s son primos relativos no pueden ser pares los dos. Por lo tanto uno es par y el otro impar. Por ello a y c son números impares. Entonces es suficiente mostrar que podemos escribir el número 2 como combinación lineal de a, b y c. Tenemos

$$c + a = 2r^2 \quad \text{y} \quad c - a = 2s^2.$$

Se sigue de (4) que $mr^2 + nrs = r$ y que $mrs + ns^2 = s$. Por ello tenemos $m^2(2r^2) + mn(2rs) = 2mr$ y $nm(2rs) + n^2(2s^2) = 2ns$. Así obtenemos

$$m^2(2r^2) + mn(2rs) + nm(2rs) + n^2(2s^2) = 2.$$

Y con ello queda demsotrado la implicación "$\Longrightarrow$".

Llegamos finalmente a un mecanismo de producir sin falla todas las triadas pitagóricas que son primitivas.

Ya hemos gastado bastante tiempo y esfuerzo en este ejemplo y por ello seremos breve al mencionar todo lo que se podría ver también: En la lista de las triadas pitagóricas primitivos se podría observar que siempre el miembro que es par es divisible entre 4. Además siempre hay un miembro que es divisible entre 3 y uno que es divisible entre 5 (posiblemente el mismo). ¿Será cierto en general?

¿Qué generalización o analogía podríamos considerar? Bueno, podríamos variar el exponente y buscar soluciones naturales de la ecuación $a^3 + b^3 = c^3$ o de la ecuación $a^n + b^n = c^n$. Pero se sabe desde 1995 que no existe solución alguna: es el famoso Teorema de Fermat, demostrado en 1995 por Andrew Wiles. Pero si aumentamos el exponente, a lo mejor habría que aumentar también el número de sumandos y considerar $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$ o más en general $a_1^n + \ldots + a_n^n = b^n$.

2.3 Comentarios

Los dos ejemplos que desarrollamos en este capítulo se prestan para mostrar el carácter del pensamiento matemático y tal vez sirven también para ilustrar el funcionamiento de la investigación científica. En ambos casos se partió desde una situación sencilla y fueran unas preguntas (a veces un poco inducidas) que llevaron a una investigación que a su vez arrojó observaciones nuevas a investigar. Así, poco a poco se ganó terreno de conocimiento.

Creo que esta manera de elaborar un tema con los alumnos es muy enriquecedor porque invita a participar al alumno en un proceso de manera creativa. Además, como el proceso tiene una salida abierta (esto es difícil mostrar en un libro, pero en clase, eso se da de manera natural al seguir las sugerencias – buenas y malas – de los estudiantes y ver qué pasa), muestra las matemáticas como una ciencia tan viva como lo es en realidad.

Hubiera sido posible hacer la sección sobre las triadas pitagóricas mucho más corta: primero enunciamos el siguiente resultado.

Teorema *Para cada dos números* $1 \leq s < r$ *que son primos relativos y no ambos impares se obtiene una triada pitagórica primitiva* $(r^2 - s^2, 2rs, r^2 + s^2)$ *y cada triada pitagórica primitiva se obtiene de esta manera.*

Luego damos una demostración, de la manera más corta y terminamos. En total ni gastamos una hoja.

En la forma como nosotros lo dimos, es más tardado y tal vez no es la forma adecuada para algo escrito, pero creo que sería una de las muchas posibilidades cómo podríamos desarrollar este tema al nivel de un Bachiller. La demostración tomó el lugar que realmente le corresponde: la de dar una argumento para verificar una conjetura establecida. Es la conjetura que despierta la curiosidad, el interés por un argumento, que llama la demostración. Aquí, la demostración no se da para verificar la validez de una afirmación dada por el maestro o un libro – la mayoría de los libros de matemáticas están escritos de una manera muy eficiente y al mismo tiempo muy antididáctico. Este estilo se presta para revisar teoría, pero es inadecuado para enseñar.

Si presentamos las matemáticas a los alumnos de esta manera podemos cubrir mucho más material, pero degradamos al alumno a ser sólo un lector que revisa la demostración hecha y no lo animamos a participar, a descubrir, a quedarse en lo incierto, aguantarlo, buscar, formular y ponderar argumentos – lo privamos de todo lo que sería tan útil en la vida que podría aprender de paso: de **lo más importante** que puede llevarse para su vida de la clase de matemáticas: la de usar su creatividad parar analizar una situación desconocida, de argumentar, de organizar sus pensamientos. Es una aportación universal, que ayudará que el alumno sea más crítico y repercuta en el salón de clase de manera positiva porque lo volverá más participativa.

2.4 Propuestas

1. Sea $a_0 = 64$ y se define $a_i = 5a_{i-1}$. Calcula algunos miembros de la sucesión y observa que primero se comporta como 2^n donde n *disminuye* y luego se comporta como 5^n donde n *aumenta*. Explica el fenómeno.

2. El siguiente ejemplo muestra como se calcula la "suma de dos en dos" de $320, 892$: esta es $32 + 08 + 92 = 132$ y la sume de dos en dos iterada es $1 + 32 = 33$. ¿Cuáles divisibilidades se puede verificar con la suma de dos en dos?

3. Averigua algunas de las generalizaciones o analogías que se mencionaron al final de la sección sobre la división del plano con rectas.

4. Si un número natural a tiene n divisores y otro número natural b tiene m divisores, ¿qué puedes decir sobre el número de divisores del producto ab? Observa que aquí se incluyeron 1 y a como divisores de a.

5. ¿Cuáles números naturales tienen exactamente 3 divisores propios?

6. El cuadrado del lado a tiene perímetro $4a$ (el perímetro es la figura unidimensional que delimita el cuadrado) y el cubo con el mismo lado tiene área superficial de $6a^2$ (la superficie es la figura bidimensional que delimita al cubo). ¿Cuál crees es el volumen tridimensional que delimita un hipercubo en cuatro dimensiones? (un "hipercubo" es una figura en cuatro dimensiones cuyos vértices son $\left(\pm\frac{a}{2}, \pm\frac{a}{2}, \pm\frac{a}{2}, \pm\frac{a}{2}\right) \in \mathbb{R}^4$. Formula una conjetura y trata de argumentarla. ¿Puedes formular una conjetura que describe el volumen $n-1$-dimensional que delimita un hipercubo n-dimensional?

3 Matemáticas reales

3.1 Ejemplos pseudoreales

Los siguientes ejemplos se encontraron en la red, damos el texto traducido al español y el texto original en el apéndice.

1. Estás fuera de tu casa y la puerta se cerró. La única ventana abierta está en el segundo piso a una altura de 25 pies. Necesitas pedir una escalera de uno de tus vecinos. Hay un arbusto a lo largo de la casa y por eso tienes que poner la escalera a una distancia de 10 pies de la casa. ¿Qué longitud necesita tener la escalera para llegar a la ventana? [c1]

2. Estás en la casa de tu abuela para el fin de semana y decidiste que ya te quieres ir. Tu mamá te dice que la única manera de regresar a casa es decirle cuántas millas mide la distancia más corta de la casa de tu abuela [a tu casa] antes de poderte ir. Ella te dice que tu calle y la calle de tu abuela forman una L en tu escuela. La casa de la abuela está dos millas en el Oeste de la escuela y tu casa está a una milla en el Norte de la escuela. Ella dice también que la distancia más corta a casa no es pasar por la escuela. ¿Cómo lo puedes hacer? ¿Por qué no dejes que Pitágoras te ayuda a regresar a casa? [c2]

3. Frank y su novia Petra regresan de correr y tienen mucha sed. Así deciden de mezclar medio litro de jugo de naranja con medio litro de agua mineral y de compartir la bebida. Enamorados como son, no lo

> mezclan de inmediato. Petra bebe con el popote 50 centímetros cúbicos por minuto de una jarra, que al principio solo contiene medio litro de agua mineral. Al mismo tiempo añade Frank jugo de naranja, y eso con 100 centímetros cúbicos por minuto. Al mismo tiempo remueve el líquido con una cuchara para que Petra beba una mezcla fina que cada vez sea más dulce.
>
> Sea $x(t)$ la cantidad de jugo de naranja (pura) en la jarra en el momento t medido en centímetros cúbicos, donde t se mide en minutos, $t \in [0, 5]$. Describa un modelo de ecuación diferencial para $x(t)$. [c3]

Para el maestro experimentado no hay dificultad en descubrir en los primeros dos ejemplos la utilidad del teorema de Pitágoras para la resolución del problema propuesto, sólo el último requiere de mayores herramientas matemáticas. Los tres ejemplos plantean un contexto real y seguramente los autores de estos ejemplos trataron de esa manera acercarle al alumno las matemáticas y de mostrarle su utilidad en la vida cotidiana.

Pero, honestamente, ¿usted haría el cálculo necesario para obtener la longitud de la escalera en el primer ejercicio? La situación no requiere que la escalera tenga una longitud precisa: si es un poco más corta y llega medio metro abajo de la ventana de cualquier manera no serviera y si fuera dos metros más largo podríamos colocarla a un lado de la ventana y pasarnos de lado una vez que subimos lo suficiente en altura. Además, hay que considerar que 25 pies es una altura considerable: son 7.6 metros y no es muy común subir semejante altura en una escalera inclinada - personalmente me empieza a dar miedo a partir de tres metros y yo optaría por ir por un cerrajero antes de buscar una escalera tan larga. Aún así, todavía queda la duda de donde se conocen las medidas de la altura de la ventana y del grosor del arbusto con tanta presición - ¿no sería necesario medir esto primero? En mi caso particular desconozco a qué altura están las ventanas de mis casa sobre el piso.

Después de estas reflexiones podemos concluir que este no es un ejercicio real sino un ejercicio *pseudoreal*, es decir un ejercicio que pretende ser de la vida real pero que al verlo con cuidado no lo es.

Alentamos al lector de realizar un análisis similar con los otros dos ejemplos. Además se recomienda revisar los libros de texto o la red por ejercicios de matemáticas que plantean un problema en un contexto real. ¿Cuántos ejercicios son pseudoreales y cuántos reales?

3.2 Efecto de usar ejercicios pseudoreales en salón de clase

Mencionamos algunas motivaciones por usar ejercicios de la vida real en la enseñanza de las matemáticas.

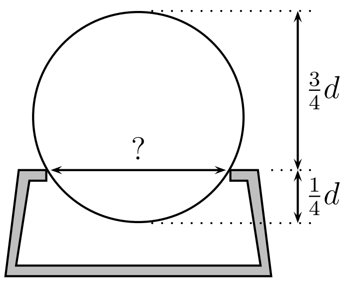
- Mostrar que la matemática es útil en la vida real.
- Acercarle los contenidos abstractos a los alumnos.
- Preparar los alumnos para la vida real.

Todas estas motivaciones son muy honrables. Pero ¿qué pasaría en los alumnos que no lo vean como un ejercicio real y que se den cuenta de ello? Con aquellos que no calcularían la altura de la escalera por si mismos sino sólo para cumplir con el maestro. Pués, se les hace entender que

- las matemáticas sólo sirven para resolver ejercicios que se dan en el salón de clase.
- Los contenidos abstractos son ajenos de aquella vida fuera de clase, la que sí es real.
- Impiden que el alumno vea que las matemáticas sí le pueden ofrecer algo para su vida profesional.

En pocas palabras: el uso de ejercicios pseudoreales tiene el efecto contrario al intencionado. Por ello hay que tener mucho cuidado al escoger ejercicos con contexto aparentemente real.

La siguiente historia me lo contó un amigo que estaba haciendo la instalación de un museo de ciencias: un compañero suyo había hecho una Luna con una esfera de vidrio y faltó cortar un hoyo circular en el soclo de madera. ¿Qué tamaño deberá tener el hoyo? El diseñador decidió que por estabilidad la esfera debe entrar un cuarto del diámetro al soclo.

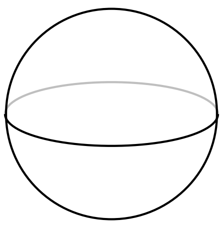


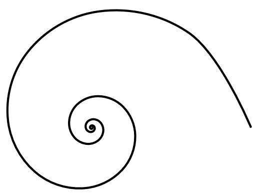
Entonces hizo primero un hoyo chico y colocó la esfera. Se dió cuenta que el hoyo era demasiado chico, quitó la esfera y agrandó el hoyo. Volvió a colocoar la esfera para comparar y siguió así hasta resolver lo propuesto. ¿Qué pasó? ¿Por qué el diseñador no usó la matemática para determinar de antemano el radio del hoyo? Pues tal vez por su enseñanza, tal vez los únicos ejemplos de matemáticas que había visto eran ejemplos pseudoreales, ejemplos de salón de clase, tal vez porque nunca había usado la matemática en la vida cotidiana antes. Para un maestro de matemáticas esta anéctota es más triste que chistoso.

En lo que sigue daremos algunos ejemplos donde las matemáticas son muy visibles y por ello dan lugar a ejercicios de la vida real. Pero antes trataremos de aclarar un poco más la dificultad principal que hay para encontrar las matemáticas de manera natural "al pie de la calle".

3.3 El lenguaje de la naturaleza

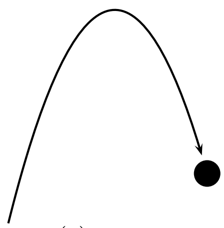
La riqueza de la naturaleza es tan abrumante que resulta difícil ver en ella patrones o rasgos determinantes. Sin embargo es fácil apreciar formas sencillas como la espiral en un caracol o un cuerno torcido donde la espiral marca el crecimiento del organismo.



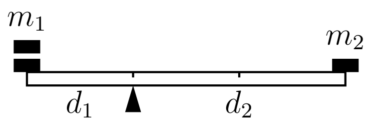


Este es como el **primer nivel** de usar el lenguaje matemático para describir la naturaleza. La esfera es otra forma matemática que encontramos realizada en la naturaleza por diferentes razones, algunas de ellas analizaremos en la sección 3.4. Otro principio hace que los cristales de sal crecen en cubos, los de pirito en dodecaedros mientras los copos de nieve tengan una simetría de rotación de 120°.

Pero el descubrimiento de formas muy matemáticas es solo la punta de un iceberg de las matemáticas que se esconden en la naturaleza: pasaron 2000 años desde el primer estudio de la parábola por Menaecmus hasta que Galileo observó que la trayectoria de una piedra lanzada es una parábola y que Kepler anunció que los planetas se mueven en elipses.



$$x(t) = \alpha t$$
$$y(t) = \tfrac{1}{2}gt^2$$



$$m_1 d_1 = m_2 d_2$$

Galileo se considera con justa razón como padre del método científico por poner al experimento en su lugar: como *el* método de validar al conocimiento. Formuló una serie de leyes matemáticos para fenómenos físicos como por ejemplo la ley de la balanza o la caída libre. Por ello, Galileo escribió que "la naturaleza es un libro escrito con caracteres matemáticas". Defendió su punto de vista en el libro *il Saggiatore*:

> *El Sr. Sarsi [...] tal vez piensa que la filosofía es como las novelas, producto de la fantasía de un hombre como por ejemplo la* Ilíada *o el* Orlando furioso*, donde lo menos importante es que aquello que en ellas se narra sea cierta.*
>
> G. Galilei: *Il Saggiatore*, ver [c4]

Habrá que añadir que "la filosofía" abarcaba en aquel entonces todas las ramas del conocimiento en su conjunto. Sigue Galilei:

> *Sr. Sarsi, las cosas no son así. La filosofía está escrita en ese grandísimo libro que tenemos abierto ante los ojos, quiero decir, el universo, pero no se puede entender si antes no se aprende a entender la lengua, a conocer los caracteres en lo que está escrito. Está escrita en lengua matemática y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es imposible entender ni una palabra; sin ellos es como girar*

vanamente en un oscuro laberinto.

G. Galilei: *Il Saggiatore*, ver [c4]

En el **segundo nivel** las leyes son todavía sencillas, en el sentido que las nociones involucradas son sencillas: la velocidad, la posición etc. Pero esto cambió radicalmente después de la invención (o descubrimiento) del cálculo por Leibnitz y Newton.

En el **tercer nivel** están las leyes se condensan teorías completas de la física como por ejemplo las leyes de Maxwell:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot E =& 4\pi\rho \\
\nabla \times E =& -\tfrac{1}{c} \cdot \tfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \\
\nabla \cdot B =& 0 \\
\nabla \times B =& \tfrac{4\pi}{c} J - \tfrac{1}{c} \cdot \tfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

En estas ecuaciones, E ya no es una simple variable sino una cantidad que varía en el espacio y en el tiempo. El símbolo ∇ es un operador diferencial que se tomó en forma vectorial para expresar las leyes arriba. Feynman se expresa sobre la dificultad de los objetos matemáticos usados en física al dirigirse a los estudiantes en la introducción de su libro sobre física de la siguiente manera.

> *...vas a tener que aprender mucho: doscientos años de aquel campo de conocimiento que más rápido se desarrolla. Tanto conocimiento, de hecho, que pensarás que no será posible aprenderlo todo en cuatro años, y ciertamente no será posible; tendrás que hacer un posgrado también.*
>
> *Bastante sorprendente resulta que, no obstante la tremenda cantidad de trabajo que se ha hecho durante todo este tiempo, es posible condensar en su mayoría la enorma masa de resultados – eso es encontrar* leyes *que sumarizan todo nuestro conocimiento. Aún así, las leyes son tan difícilies de comprender que sería injusto hacia ustedes de empezar a explorar este magnífico tema sin dar algun mapa o esbozo de las relaciones de una parte del tema de ciencia con otra. [...]*
>
> *Podrías preguntar por qué no se puede enseñar física dando simplemente las leyes básicas en la primera página y luego mostrar cómo estas trabajan en todas las posibles situaciones, tal como se hace en la geometría Euclideana, donde primero se enuncian los axiomas y luego se derivan todo tipo de deducciones. [...] No podemos hacer eso por dos razones. Primero, no* conocemos *todas las leyes básicas todavía: hay una frontera*

de ignorancia que se expande. Segundo, la manera correcta de enunciar las leyes involucra unas ideas muy poco familiares, que requieren de matemáticas avanzadas para su descripción. Por ello se necesita considerable entrenamiento preparatorio tan sólo para entender lo que significan las palabras. *No, no es posible de hacerlo así. Sólo podemos hacerlo poco a poco.*

R. Feynman, Physics, ver [c5]

3.4 Primer ejemplo: la esfera

Después de ver el papel fundamental que juegan las matemáticas, regresamos ahora para intentar a dar dos ejemplos donde las matemáticas son palpables en la realidad.

Nuestro primer ejemplo es – a primera vista – sumamente sencillo: la esfera. Nos preguntamos: ¿cuáles objetos conocemos que son esféricos? Enlistamos algunos objetos que tienen la forma de una esfera y en cada caso trataremos de analizar si hay alguna razón en particular de que el objeto tenga esta forma.

Pelotas. La pelota de basquetbol, la del futbol, la del ping-pong, la del tenis, la del basebol, la del billar, la del golf – todas ellas son esféricas. Sólo una pelota se me ocurre que no es esférica: la del futbol americano. ¿Por qué será así? Si nos imaginamos un partido de tenis con una pelotita del tamaño de una pelota de tenis, pero la forma de una de futbol americano, la respuesta es evidente: las pelotas son redondas porque así su rebote en el suelo es predecible. Cuando una pelota de futbol americano se cae al suelo rebota de manera irregular y es difícil volverla a atrapar. Una esfera se ve de todos lados igual y eso tiene como consecuenca que una pelota esférica aunque esté girando en el vuelo rebota igual sin importar con cual parte toca el suelo. Un poco más matemático: el plano tangente a una esfera siempre está de la misma distancia del centro y ortogonal al vector del centro al punto de tangente.

Balas. Las balas de los cañones si hicieron por mucho tiempo esféricos porque así no se podían atorar en la vaina. La razón es que una esfera produce la misma sombra aunque este girando.

Pompas de jabón, una burbuja que se sopla de un chicle. En ambos casos tenemos una superficie elástica encierra una cierta cantidad de aire. La forma se obtiene en el equilibrio de la presión de adentro que es mayor que la de afuera y las fuerzas de tensión en la superficie. Si la pompa de jabón no es esférica (eso pasa por ejemplo si le soplamos de afuera) entonces hay partes de la superficie que están más curvadas que otras. En consecuenca, la tensión en la superficie es mayor en unas partes que en otras y se empieza a equilibrar. El equilibrio se alcanza cuando todos los puntos de la superficie tienen la misma curvatura: en la esfera.

El mismo principio lo podemos observar (en camara lenta) cuando una gota cae al agua y rebota como una esfera perfecta. Las gotas que caen por el aire se deforman por la fricción con el aire: tienen un cola. Pero la gota rebotada es esférica porque ya no hay fricción de aire que la deforme.

Planteas, Lunas, Soles. La presión gravitacional es tan grande que la materia en el centro es líquido (o fue una vez líquido). Pero el líquido es heterogeneo y así, lo más pesado se reune en el centro y encima flota lo menos pesado que se distribuye más o menos uniformemente. Se alcanza el equilibrio cuando ninguna parte puede "bajar más al centro" sin desplazar una parte de densidad mayor.

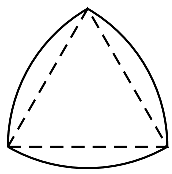
Ojo, la cabeza del femur. Los ojos de un ser humano son esféricos y el femur, es decir el hueso del muslo, tiene una cabeza que se ve como si de una esfera se le hubiera cortado una parte para luego montarlo sobre un pedestral. En ambos casos se usa la misma propiedad de la esfera: no se puede atorar al girarla por su centro. Por ello el ojo puede girar libremente en su cavidad, cosa que no sería cierto si tuvieramos ojos cilíndiricas o en forma de cubitos.

Naranja, melón, chícharro. Hay muchas frutas de muchas formas. Así que hay que tener cuidado al presentar argumentos en favor de que cierta fruta como la naranja tiene a fuerza que ser esférica. Las frutas crecen y su forma tiene en muchos casos que ver con el proceso como creció. La naranja tiene una piel sofisticada, llena de pequeñas cámaras que contienen sustancias agresivas que protegen el fruto. Por ello es razonable mantener la superficie pequeña y el volumen envuelto maximal. La solución de ese problema es la esfera: contiene el mayor volumen para un área dado para la superficie.

Casco de buzo. Los cascos de buzo se hicieron al principio como esferas con ventanas circulares insertadas por la sencilla razón que la esfera es el la superficie que aguanta mayor presión antes de colapsar por una presión externa. La razón es muy similar a la que dimos para la burbuja de chicle de mascar, solo que en la burbuja una presión interna que causa fuerzas de tensión en la superficie que tratan de estirar el material mientras en un casco de buzo, la presión externa produce fuerzas en la superficie que tratan de compactar el material. En los cascos esféricos estas fuerzas se anulan mutuamente por la alta simetría de la esfera.

En conclusión, la esfera es una forma, que tiene muchas propiedades por su alta simetría y por ello, hay muchas propiedades que pueden ser responsables de que la esfera es la mejor solución para un problema de la naturaleza o la tecnología, o simplemente la única forma posible como en los planetas, es decir que hay una propiedad que exige que el objeto sea esférico.

Es un buen momento para hacer una analogía en dos dimensiones de la esfera. El círculo tiene propiedades completamente análogos a la esfera en tres dimensiones y si pensamos en una rueda es claro que tiene que ser un disco circular pra que el punto donde toca la rueda a la tierra quede siempre a la misma altura del eje de rotación. Pero recordemos que hoy se piensa que la rueda se desarrolló del uso de troncos que apoyaban una tabla o un bloque de piedra en los egipcios. Ahí la propiedad que se exige es que la figura tenga al rodar siempre la misma altura. Es interesante ver que esta propiedad no exige sea un círculo. Por ejemplo, el triángulo de Reuleaux tiene también esta propiedad. Se construye a partir de un triángulo equilátero Δ de lado r al añadir tres arcos con radio r y centro en los tres vértices de Δ.

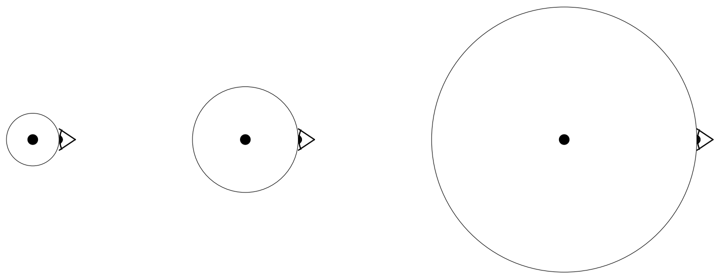


Por construcción se tiene que en cualquier dirección que pongamos este "triángulo de Reuleaux" siempre tendrá la misma altura. No es difícil obtener una analogía en tres dimensiones empezando con un tetraedro regular.

La esfera tiene una superficie de dos dimensiones

Claro, la superficie de una esfera es bidimensional. Pero si vivieramos en un espacio de cuatro dimensiones la superficie de una "esfera" (el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto dado) tendría tres dimensiones. Esto tendría graves consecuencias físicas como veremos, porque tiene que ver con el hecho de que la atracción (o repulsión) entre dos partículas cargadas es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d entre ellos. Es decir es proporcional a $\frac{1}{d^\alpha}$ con $\alpha = 2$. Veremos que se tiene $\alpha = 2$ y no $\alpha = 1$ ó $\alpha = 3$ porque vivimos en un espacio de tres dimensiones.

Argumentamos primero con otro ejemplo: la intensidad de la luz que emane de un foco. La luz consiste de muchos fotones que salen disparados del hilo incandescente de wolframio en el foco. Si encerramos el foco en una esfera imaginaria, entonces en un segundo pasa cierto número de fotones sin importar el tamaño de la esfera imaginaria.



Si los fotones salen de la fuente de luz en todas las direcciones entonces podemos estimar el porcentaje que llega al ojo calculando simplemente el porcentaje del área de la esfera que cubre el ojo con su área fija A. Como la esfera tiene un área proporcional al radio r, que es también la distancia del ojo a la fuente de luz, podemos concluir que el porcentaje de luz que llega al ojo es proporcinal a $\frac{A}{r^2}$. Por ello, la intensidad de la luz depende inversamente del cuadrado de la distancia.

¿Qué tiene que ver la intensidad de la luz con la atracción electromagnética o gravitacional? La teoría cuántica explica el campo electromagnética por medio de fotones que se crean y destruyen continuamente por las cargas. Se dice que el fotón es la partícula de intercambio electromagnética. Por ello aplica la misma explicación. Para la gravedad se postula la existencia de una partícula de intercambio que se llamará gravitón. Los físicos buscan evidencia para el gravitón, pero hasta la fecha no han sido exitosos y la razón es que la gravedad es una fuerza muy débil, la más débil de las fuerzas fundamentales y por ello una sola partícula de intercambio tendría muy poca interacción con la materia de un aparato de medición.

Si vivieramos en un espacio de cuatro dimensiones, la “superficie” de la esfera (es decir el lugar geométrico de todos los puntos que tienen la misma distancia de la fuente) tendría una dimensión menos que cuatro, es decir tendría tres dimensiones y por ello la intensidad de la luz, de la gravedad o del electromagnetismo dependerían inversamente del cubo de la distancia.

3.5 Segundo ejemplo: la radiactividad

Radiactividad ocurre cuando el núcleo de un átomo emite una radiación espontanea, eso puede ser sólo energía o cuando emite parte del material del núcleo. Para dar un ejemplo consideramos carbono. La gran mayoría de los átomos de carbono tienen 6 neutrones en su núcleo (a parte de los 6 protones que hacen que el átomo sea un átomo de carbono), algunos tienen 7 neutrones y muy pocos 8 neutrones. Estos últimos son núcleos que pueden decaer de la siguiente forma.

$$ {}^{14}_{6}\mathbf{C} \rightarrow {}^{14}_{7}\mathbf{N} + {}^{0}_{-1}\mathbf{e} + \overline{\nu}_e $$

Así, se escribe la reacción donde un átomo de "carbono 14", es decir un átomo de carbóno con 14 partículas en su núcleo (por lo tanto tiene 6 protones y $14 - 6 = 8$ neutrones) decae en que un neutrón se parte en un protón, un electrón y un neutrino. El protón se queda en el núcleo y cambia al átomo de ser un átomo de nitrógeno que ya es estable.

Lo interesante del decaimiento es que no es predecible, sino ocurre de manera espontánea. Así, un átomo ${}^{14}_{6}\mathbf{C}$ que durante 10 años no se ha decaído no siente los 10 años transcurridos y sigue teniendo la misma chance de decaer. En otras palabras: un átomo radiactivo decae o no, pero no envejece. ¿Cómo se podrá medir la probabilidad de que un dado átomo ${}^{14}_{6}\mathbf{C}$ decae en el siguiente instante? No se puede dar esa probabilidad instantánea, lo único que se puede hacer es dar la probabilidad para que lo haga en la siguiente hora o en el siguiente minuto.

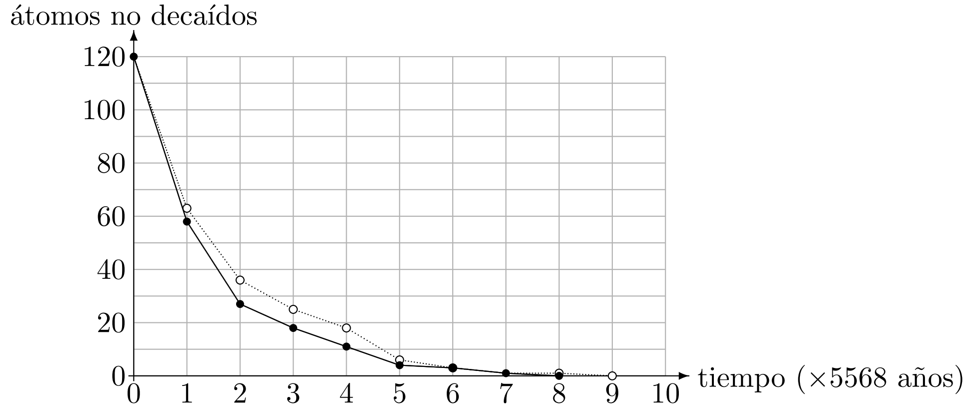
En átomos radiactivos se da el lapso de tiempo para que sea igual de probable que el átomo decaiga a que no lo haga. Este tiempo se llama "tiempo medio". Por ejemplo, ${}^{14}_{6}\mathbf{C}$ tiene un tiempo medio de 5568 años. Así que podríamos pensar que si tenemos entonces 10 átomos de carbono 14 y esperamos 5568 años, la mitad debe decaer y la otra mitad no lo hace. Pero eso no es cierto. Lo que sí es cierto es que cada átomo va decaer con una probabilidad de 0.5. En un modelo matemático, podemos echar 10 volados, uno para cada átomo:

$$ A \quad S \quad S \quad S \quad A \quad S \quad A \quad A \quad S \quad S $$

donde A (águila) representa decaimiento del átomo correspondiente mientras S (sol) representa que sobrevivió los 5568 años sin alteración. En nuestro caso tenemos 4 átomos que decayeron y 6 que sobrevivieron.

Esto da para una bonita actividad en clase. Después de explicar en qué consiste la radiactividad se le pueden "otorgar" a cada alumno 10 átomos de carbóno 14. Cada alumno decide con 10 volados cuántos sobreviven los primeros 5568 años. El número total de átomos sobrevivientes de todos los alumnos se cuenta y se anota. Luego empiezan los siguientes 5568 años, sólo que ahora cada alumno tendrá que echar tantos volados como sobrevivientes tuvo. Nuevamente se cuentan los sobrevivientes de todos y se anota el número. Esto se puede repetir hasta que todos los átomos decayeron.

Es también útil dividir la clase en dos grupos y hacer el conteo de los sobrevivientes por grupo. Luego se puede elaborar una gráfica, que por ejemplo se podría ver así.



El resto de la clase se puede orientar a lo largo de las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la función matemática que mejor modela el número de átomos "sobrevivientes"?
2. ¿Por qué hay más "brincos" en la gráfica del lado derecho que del lado izquierdo (cuando ya hay pocos átomos que no han decíado)?
3. ¿Cuántos átomos ${}^{14}_{6}\mathbf{C}$ hay en un gramo de carbono?
4. ¿Cómo se compara "la exactitud" del modelo para un gramo de carbono contra unos 120 átomos?

Con la primera pregunta, el maestro podrá abordar el tema de las funciones exponenciales, sus propiedades y discutir la validez de modelar un fenómeno discreto (siempre hay un número natural de átomos que no han decaído) con un modelo continuo. La segunda pregunta podría limitarse a la pura observación e interpretación de la gráfica obtenida para después retomarla en la cuarta pregunta con mayor formalidad matemática explicando las distribuciones de Bernoulli. Para la tercera pregunta habrá que tomar en cuenta que sólo el 0.00000000010% de los átomos de carbono tienen 8 neutrones, el 1.11% tienen 7 neutrones y la gran mayoría, el 98.89% tiene 6 neutrones en su núcleo. Usando la constante de Avogadro $6.02 \cdot 10^{23}$, que es el número de neutrones que pesan juntos un gramo, se obtiene que hay

$$0.00000000010\% \cdot 6.02 \cdot 10^{23} \div 12 = 50,000,000,000$$

átomos en un gramo de carbono. Eso es un número muy grande, que hace que el modelo de la función exponencial es muy buena. La razón de fondo es la ley de los grandes números.

También valdría la pena mencionar que es uno de los procesos más exitosos para fechar fósiles. La razón es que en la atmósfera, la radiación solar bombardea átomos de nitrógeno y provoca la siguiente reacción.

$$^{14}_{7}\mathbf{N} + ^{1}_{0}\mathbf{n} \rightarrow ^{14}_{6}\mathbf{C} + ^{1}_{1}\mathbf{p}$$

Es decir, un protón del núcleo es golpeado y reemplazado por un neutrón. Por ello hay un porcentaje más o menos estable de carbono 14 en el aire. Los organismos vivos adquieren carbono del aire y por lo tanto contienen este porcentaje (que es 0.00000000010%) de carbonos 14 en sus cuerpos. Al morir, el organismo ya no adquiere más carbono 14 y los átomos $^{14}_{6}\mathbf{C}$ siguen decayendo según lo que vimos. Así, si en un fósil encontramos que hay sólo un cuarto del porcentaje original sabemos que ya han pasado 5568 + 5568 años desde que se murió.

3.6 Comentarios

Hemos visto "la matemática en la vida real" desde dos ángulos: primero vimos ejercicios típicos que se usan en el salón de clase y que descubrimos por pseudoreales poco deseables y después vimos dos ejemplos donde la matemática sí juega un papel primordial en el entendimiento de un fenómeno real (objetos esféricos y la radiactividad). Estos ejemplos fueron seleccionados cuidadosamente para mostrar ciertas características. La esfera representa un ejemplo del primer nivel de cómo sirve la matemática como lenguaje de la naturaleza mientras la radiactividad es un típico ejemplo del segundo nivel. No sería fácil dar un ejemplo para el tercer nivel que pueda ser digerido a nivel bachillerato, pero lo que sí se puede digerir es su existencia y su función. Lo que tal vez más se acerca a ello es la discusión de la obra de Newton: que desarrolló el cálculo diferencial para poder tratar las ecuaciones diferenciales para poder reducir el movimiento de los cuerpos celestes a su principio fundamental.

De cualquier manera, encontramos la matemática fungir como un lenguaje, no como una herramienta que uno emplea a menudo en la vida cotidiana. Pero nadie duda que la matemática sí teine aplicaciones reales y que se encuentran en todos lados. Lo que pasa es que se encuentran escondidos en los aparatos y en la tecnología. Para dar un ejemplo, es el aparato que reproduce un CD y es también un aparato que graba un CD, pero los aparatos usan algoritmos muy sofisticados de codificación que hacen posible una corrección de errores al leer el CD, errores que se producen por rayones o polvo en la superficie del CD. Sin estos algoritmos sería absolutamente imposible escuchar un CD. Como estos algoritmos se encuentran encerrados en los aparatos nadie de nosotros tiene que conocerlos para poder escuchar un CD y justo esto que nos dificulta que nuestra vida depende en gran medida de los logros que se alcanzan en matemáticas.

La aplicación de la matemática se encuentra toalmente escondido y se desarrolla una sola vez por un grupo de científicos. Es por ello que nos podemos preguntar con justa razón porque entonces se debe prender tanta matemática en la escuela a un público tan amplio y por qué no se reduce su enseñanza a matemáticos e ingenieros. Tratar de contestar esta pregunta será el contendio del siguiente capítulo.

3.7 Propuestas

1. Busca o inventa un ejemplo donde se aplica el Teorema de Pitágoras en la realidad y que no sea pseudoreal.

2. ¿Qué ejemplos reales usarías para explicar el concepto de función en clase?

3. En cada CD hay una buena cantidad de matemáticas: la información está almacenada de tal manera que se puedan corregir errores que ocurren a la hora de leer el CD típicamente porque está rayado. Usa el internet para averiguar cómo se almacenan los datos y qué tipo de matemática está involucrado.

4. ¿Qué ejemplos (aplicados o reales) usarías para mostrar, explicar o ejemplificar el concepto de simetría?

5. Encuentra al menos tres diferentes aplicaciones de cónicas que se dan realmente en la tecnología.

6. ¿Cuáles fenómenos reales son lineales (al menos dentro de cierto rango de las variables involucrados). Busca por fenómenos continuas, es decir, trata de evitar ejemplos "discretos" como *el precio pagado por los boletos depende linealmente de la cantidad de boletos comprados* (eso es más bien un ejemplo de proporcionalidad pero no de una función continua lineal).

4 Motivar las matemáticas

4.1 El problema

Cada maestro la conoce, la pregunta latosa *¿Para qué sirve eso?*; la pregunta por la utilidad inmediata de los temas vistos en matemáticas. La conocemos. Cuando hemos preparado una bonita clase para ver la factorización de polinomios y... alguien de seguro levanta su mano y pregunta *¿Y para qué nos sirve eso?* Y no hay tanto tiempo, sino se va al diablo la bonita clase y de por si ¿qué debemos responder? De veras, ¿de qué le sirve a un adolescente en plena pubertad la factorización de polinomios?

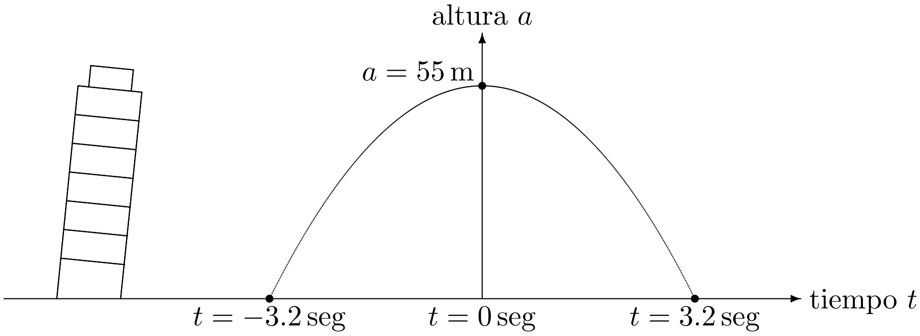
En este capítulo queremos dar una respuesta a esa pregunta latosa y dedicamos todo un capítulo a ello, ya que no es una pregunta fácil. Tenemos que hablar primero de lo qué es la matemática y para qué se hace para poder entender de qué sirve. Luego daremos también una respuesta alternativa.

4.2 Las cuatro raices de las matemáticas

Es útil tratar de resumir las principales fuerzas que han empujado y estimulado a las matemáticas en su desarrollo. Expondremos estas raices de las matemáticas en un sólo ejemplo.

Una piedra lanzada describe una parábola, una curva estudiada alrededor de 350 a.C. por Menaechmus, matemático griego, al tratar de encontrar una solución al problema de duplicar un cubo (es decir, de construir el lado de un cubo del doble de volumen de un cubo con lado dado). Aquí tenemos la primera y más antigua raíz: **la geometría**.

Pero fue más o menos dos mil años después que Galilei aclaró que una piedra lanzada realmente describe (en buena aproximación) una parábola. También estudió el caso particular de la caída libre donde simplemente se suelta la piedra desde una posición elevada – como por ejemplo una torre. La piedra describe una trayectoria recta y la fórmula $a = \frac{1}{2}gt^2$ expresa la altura a que cae la piedra en función del tiempo t usando la constante de la gravitación (en la superficie terrestre) $g = 9.81\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{seg}^2$. Así, si sabemos que la torre mide $55\,\mathrm{m}$ de alto (como lo hace más o menos la plataforma de la torre de Pisa), podemos calcular el tiempo que necesita la piedra en caerse al piso: tenemos que resolver $55\,\mathrm{m} = \frac{1}{2} \cdot 9.81\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{seg}^2\, t^2$ por la variable t. Para ello dividimos la ecuación entre $\frac{1}{2} \cdot 9.81\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{seg}^2$ y luego sacamos la raíz cuadrada para obtener $t = \pm 3.3\,\mathrm{seg}$. Observamos que obtenemos dos soluciones, donde $t = 3.3\,\mathrm{seg}$ corresponde al tiempo que necesita la piedra en caerse, o que es lo mismo, al momento en que la piedra golpea el piso si el momento $t = 0$ es aquel en que soltamos la piedra arriba. Entonces la segunda solución $t = -3.3\,\mathrm{seg}$ corresponde al momento en que la piedra se disparó del suelo hacia arriba con tal fuerza que alcanza su punto más alto a $55\,\mathrm{m}$ de altura justo en el momento $t = 0$ para luego volver a caer. En los dos momentos, la altura de la piedra medido desde la torra hacia abajo es de $55\,\mathrm{m}$.



Estas sencillas manipulaciones de las ecuaciones y la correcta interpretación de los resultados forman parte del **álgebra**, la segunda raíz de las matemáticas. Claro, la piedra cae atraida por la gravedad de la Tierra y con ello son sólo un ejemplo de la ley de atracción que es proporcional a la masa de cada cuerpo e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. De la misma manera se atrae un transbordador espacial y la Tierra. El cálculo es relativamente fácil porque la masa de la Tierra es inmensamente mayor que la del transbordador y podemos pensar que la Tierra realmente no se mueve por la presencia del transbordador (que estrictamente es falso pero cierto en aproximación). Pero si los dos cuerpos tienen una masa comparable esa aproximación ya no es muy acertada. Tenemos dos masas m_1 y m_2 que en el tiempo $t = 0$ están en los lugares $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$ (en cierto sistema de coordenadas cartesianos) y se mueven con las velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$. Lo que debemos averiguar es cómo se moverán estos dos cuerpos en el futuro si la única fuerza que tomamos en cuenta es la de la atracción gravitacional que es proporcional a la masa da cada cuerpo e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre los cuerpos. Pero la fuerza es un vector con la misma dirección que $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$. Es decir

$$F_1 = -\gamma m_1 m_2 \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \quad \text{y} \quad F_2 = \gamma m_1 m_2 \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \tag{5}$$

son las fuerzas que actúan sobre el primer y el segundo cuerpo. Obviamente las posiciones y las velocidades cambiarán, es decir son funciones en el tiempo, así que tendremos $\vec{v}_1 = \frac{\mathrm{d}\vec{x}_1}{\mathrm{d}t}$ y $\vec{v}_2 = \frac{\mathrm{d}\vec{x}_2}{\mathrm{d}t}$. La ley de Newton dice que la fuerza que actúa sobre un cuerpo causa una aceleración que es inversamente proporcional a la masa del cuerpo, es decir $F_1 = m_1 \frac{\mathrm{d}^2\vec{x}_1}{\mathrm{d}t^2}$ y similar para el segundo cuerpo, que da, al susitituir (5) las siguientes ecuaciones diferenciales.

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}_1}{\mathrm{d}t^2} = -\gamma \frac{1}{m_1} \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \quad \text{y} \quad \frac{\mathrm{d}^2\vec{x}_2}{\mathrm{d}t^2} = \gamma \frac{1}{m_2} \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}. \tag{6}$$

Si restamos la segunda ecuación de (6) de la primera obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}_1}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}^2\vec{x}_2}{\mathrm{d}t^2} = -\gamma\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}, \tag{7}$$

una ecuación que podemos reescribir de manera más compacta si llamamos $\vec{y} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ y $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} = \frac{1}{\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}}$ (que es una masa):

$$\mu\frac{\mathrm{d}^2\vec{y}}{\mathrm{d}t^2} = -\gamma\frac{\vec{y}}{|\vec{y}|^3}. \tag{8}$$

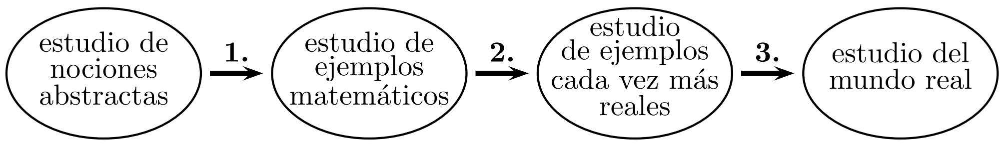
¿Cuál es la interpretación de la ecuación anterior? Pues es la ecuación de un cuerpo de masa μ que es atraida hacia el origen como si ahí hubiera una masa inmóvil. La solución para la trayectoria de ese cuerpo es una cónica: una élipse (como lo describen los planetas del sistema solar) o una parábola o hiperbola para cuerpos que pasan una sola vez cerca y se alejarán para siempre. Usamos álgebra para manipular las ecuaciones, pero las ecuaciones contienen ingredientes escenciales del **cálculo**, sin las cuales no es posible entender cabalmente el movimiento. El cálculo es la tercera raíz de las matemáticas.

Ya no es posible resolver el mismo problema para tres cuerpos, es decir no es posible calcular la trayectoria que tomarán tres cuerpos que se atraen mutuamente como el Sol, la Tierra y la Luna. No es posible escribir tres funciones que describen las trayectorias de los tres cuerpos. Tres cuerpos pueden mostrar fenómenos caóticos en donde pequeños cambios de posición o de velocidad inicial llevan a trayectorias completamente distintos. El moviomiento de tres cuerpos sólo se puede calcular aproximadamente. Si pensamos en las partículas que constituyen el gas en un cuarto el número de partículas es abrumante. De hecho es tan grande que aún conociendo la posición y velocidad de cada uno de las partículas sería imposible calcular su movimiento aproximado. Lo que sí se puede estudiar es su movimiento estadístico. Es decir, se pueden usar métodos de la **probabilidad** para describir su comportamiento colectivo. Esto es la cuarta raíz de las matemáticas.

Es importante que el maestro tenga muy claro algunas de las principales motivaciones que han empujado y desarrollado el tema que está enseñando.

4.3 El orden importa

La enseñanza tradicional suele darse de la izquierda hacia la derecha en el siguiente diagrama:



En muchos casos ya no se llega al tercer paso, se requerirían demasiadas matemáticas.

Podemos dar un ejemplo de ello: El programa de estudios 1996 para el primer año de la Preparatoria en la UNAM prevé que se deben estudiar:

Primera Unidad: Conjuntos. En esta unidad se abordan los conceptos fundamentales de la Teoría de los Conjuntos para proporcionar la herramienta y el lenguaje de operación para las unidades posteriores.

Segunda Unidad: Sistemas de numeración. En esta unidad se estudian los sistemas de numeración de las diversas culturas hasta nuestros días, resaltando la importancia del sistema de numeración base diez (decimal), el cual será desarrollado a profundidad abordando sus propiedades a través de la siguiente unidad.

Tercera Unidad: El campo de los números reales. En esta unidad a partir de los números naturales y para resolver problemas cotidianos se muestra la necesidad de ir ampliando los conjuntos numéricos. Se formalizan las operaciones con números reales y se menciona la extencia de los números imaginarios y los complejos. Se opera con vlor absoluto, notación científica y logaritmos. Al término de esta unidad será necesario pasar a la representación numérica a la representación simbólica para generalizar las reglas operativas de las Matemáticas. Se resuelven problemas significativos para el alumno.

Cuarta Unidad: Operaciones con monomios y polinomios. En esta unidad se revisan las operaciones fundamentales con monomios y polinomios dándoles mayor alcanze que en los cursos anteriores. A través del desarrollo de los contenidos de esta unidad se propicia la mecanización de las operaciones fundamentales del álgebra las cuales se sistematizan y simplifican en el desarrollo de la siguiente unidad.

Quinta Unidad: Productos notables y factorización. En esta unidad se realiza un estudio completo de los productos notables y su respectiva factorización. Se abordan factorizaciones de mayor dificultad. La adquisición de los conocimientos expuestos en esta unidad, sumados con las de la unidad posterior constituyen la herramienta necesaria para resolver problemas de aplicación.

Sexta Unidad: Operaciones con fracciones y radicales. En esta unidad se abordan los teoremas del factor y del residuo, y la división sintética, se opera con fracciones simplificándolas a su mínima expresión. Se abordan operaciones con radicales. Al término de esta unidad el alumno estará en posibilidad de aplicar los conocimientos adquiridos en el planteamiento algebraico de problemas que modelan diversas situaciones.

Séptima Unidad: Ecuaciones y desigualdades. En esta unidad se estudian los métodos para resolver ecuaciones y desigualdades. Se resuelven problemas planteados como una ecuación o una desigualdad de primero o de segundo grado en una variable, pretendiendo que el alumno infiera que hay situaciones de su entorno que se expresan en términos de una sola variable con una o más soluciones posibles, pero que también existen acontecimientos que requieren, para representarse, de más de una variable como se trataría en la siguiente unidad.

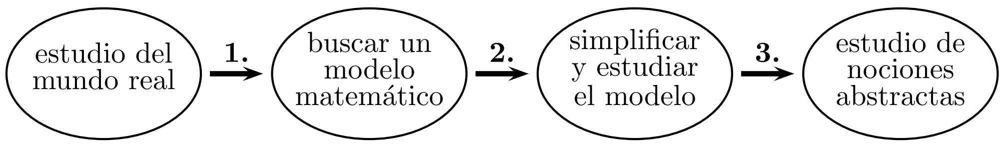
Octava Unidad: Sistemas de ecuaciones y desigualdades. En esta unidad se resuelven algebraicamente sistemas de dos o tres ecuaciones lineales con tres variables, así como problemas expresados como tales. Se resuelven sistemas de dos desigualdades de primer grado en dos variables y los problemas expresados como un sistema de desigualdades.

En este ejemplo podemos apreciar dos puntos. Primero: se efatiza que se estudian nociones matemáticas antes de ver ejemplos. Segundo: se estudian primero las partes de una ecuación, herramientas para solucionarla (como la factorización) y hasta el final las ecuaciones. Se aprecia que los autores de este programa pensaron que para poder entender qué cosa es una ecuación primero hay que saber manipular cabalmente la partes (los “miembros”) de una ecuación, que el conocimiento se construye como una torre empezando con el conocimiento bien fundado y edificando poco a poco, nivel por nivel para alcanzar finalmente la altura deseada. Esto también se refleja en el contenido de la primera unidad: conjuntos. Es cierto que la matemática moderna se fundamenta en la teoría de conjuntos, pero la introducción de la teoría de conjuntos por G. Cantor a principios del siglo XX se hizo para poder lidiar con el infinito en las matemáticas y sólo poco a poco se vió que sirve para fundamentar toda la matemáticas, una formalización bienvenida después de hacer matemáticas durantes milenios de años. Pero hay que tener en cuenta que es una formalización y sólo eso: se resolvieron ecuaciones desde los babilonios (en la tablilla se resolvió $x^2 + 4^2 = 5^2$) sin poder basarse en la teoría de conjuntos. Así que debe repensarse si realmente se justifica la enseñanza de esta teoría *al principio* del Bachillerato.

Simplificando podríamos decir que se estudia el álgebra para:

- modelar un cierto fenómeno con una ecuación,
- resolver esta ecuación e
- interpretar las soluciones de la ecuación.

Por ello, el orden de presentar y tratar el contenido es erróneo. Debe invertirse por completo para reflejar más el orden natural:



En nuestro ejemplo se podría proceder a dar una introducción al tema de la siguiente manera:

1. Hay cosas que varían, como por ejemplo la altura que cae una piedra desde una torre en un tiempo dado t. La altura a depende del tiempo, o como se dice: a es una función de t. En este ejemplo tenemos

$$a = \tfrac{1}{2}gt^2$$

   Aquí, $g = 9.81\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{seg}^2$ es la constante gravitacional para la superficie terrestre. Si conocemos el tiempo podemos calcular fácilmente la altura.

2. Pero si conocemos la altura de la torre, ¿podemos entonces calcular el tiempo que se tardará una piedra para caerse? Habrá que resolver la ecuación por t. Por ello es importante poder manipular y resolver ecuaciones.

3. Discutiremos las siguientes técnicas para resolver ecuaciones:
    - Despejando la incógnita: es un método importante tanto para ejemplos concretos como para las matemáticas mismas. Lamentablemente no siempre se puede.
    - Usando una fórmula: sólo pocas ecuaciones se pueden resolver así.
    - Factorizando: si un producto es cero entonces uno de los factores tiene que ser cero. Solo pocas veces este método es aplicable.
    - Graficamos la función: al dibujar la función obtenemos una buena impresión de lo que está pasando y podemos estimar la solución.
    - Por una aproximación: es el método que usa la computadora. Es útil saber cómo lo hace.

Entonces el alumno se dará cuenta que hay diferentes caminos para resolver una ecuación, sabrá por qué se busca resolver una ecuación, sabrá que los productos notables sirven para factorizar, que factorizar sirve para resolver ecuaciones y que se quiere resolver ecuaciones para resolver problemas reales.

Creemos que el maestro hace bien en reflexionar por qué se estudian las nociones matemáticas que prevé el plan de estudios y en explicar estas razones al alumno antes de embarcarse a un largo camino a través de la jungla de las nociones abstractas porque sino correrá el riesgo de ir solo.

4.4 Cuestionar la pregunta

Parece que la pregunta ¿para qué sirve eso? no necesita justificación, siempre es válida, siempre se puede hacer. Pero hay que tomar en cuenta que vivimos en un tiempo acelerado de los cortos rápidos en el cine, de los videojuegos de rápida reacción donde vence quién use menos tiempo de reflexión, en el tiempo de la publicidad agresiva y directa porque cada segundo cuesta. En fin, es un tiempo diametralmente opuesto a lo que requiere la matemática, que apuesta a la reflexión, que requiere un involucramiento prolongado y la atención completa, donde se vierte poca adrenalina y que sólo después de un tiempo considerable rinde frutos en la autonomía del pensamiento a través del entrenamiento de la mente crítica y sútil.

¿Qué debe o puede responder el maestro de matemáticas que enseña la materia más odiada y menos reconocida frente a la pregunta por la utilidad inmediata? ¿Cómo puede responder sin caer en autoritarismos?

No hay, claro está, una respuesta fácil. Lo más adecuado, nos parece, es ser franco: la matemática no se enseña para una utilidad inmediata. Es un buen ejercicio preguntarles cuáles cosas tendría para ellos una utilidad inmediata, y después reflexionar con ellos si estas cosas les dejarán algo duradero. Por ejemplo: sin duda es muy útil saber manejar una computadora, pero ¿cuál es la utilidad inmediata para un chavo de 17 años? ¿Para qué lo usaría? ¿Para jugar? ¿Para escribirse correos? Y aunque lo use para entregar trabajos en la escuela, eso no trasciende el ámbito escolar.

La matemática forma parte de los logros culturales y como tal hay que verla y enseñarla. Si nos enseñan en una clase de dibujo que los impresionistas querían pintar lo que vieron, realmente vieron con los ojos, y no pintar lo que sabían que había ahí, entonces la siguiente vez que nos encontramos con un cuadro de Monet – tal vez – nos detenemos y de repente lo vemos muy distinto. ¿De qué me sirve? Si me enseñan en química que en la reacción "redox" un metal reduce otro metal que se oxida y que por ello hay una corriente, entonces la siguiente vez cuando muerdo un pedazo de aluminio con mi amalgama – tal vez – pienso en cómo se da esta reacción y tal vez también recuerdo que nuestro sistema nervioso transmite sus señales con impulsos eléctricos, pero honestamente ¿de qué me sirve?

Se ve que estas preguntas de otros ámbitos tampoco son más fáciles de contestar. Me sirven, podría intentar, porque me introducen a esta cultura, que se basa sobre un acervo impresionante de conocimientos acumulados por décadas. El conocimiento se transmite de generación en generación y sólo así no se pierde. Mi vida diaria no cambia grandemente por saber o ignorar estas cosas, lo que cambia es mi horizonte.

4.5 La utilidad depende de la futura profesión

La comparación con otras materías nos conduce a la cuestión de la utilidad de todo lo que se enseña en el bachillerato. Vale preguntarse a quién sirve esa educación, cuáles profesiones la requieren o de otra manera ¿qué trabajos puede hacer un bachiller que no lo puede hacer alguien que no cursó un bachillerato?

Claro, absolver el bachillerato en sí es un logro y por ello podemos pensar que es buen filtro; que aquellos que sí lo pasan tienen algunas cualidades que otros no lo tienen. Creo que eso es una manera muy extendida de pensar sobre el bachillerato, como un filtro nada más. Pero es una manera muy alejada y descuidada: de ninguna manera influye lo que realemnete se enseña. Igualmente poder resolver Sudokus, crucigramas, poder levantar pesos, nadar varios kilómetros, saber arreglar coches o fabricar una puerta de tambor forman filtros: algunos pueden y otros no. Si solo se trata de establecer un filtro de ninguna manera se justifican los contenidos de los programas vigentes en los diversos bachilleratos.

La enseñanza del bachillerato es **amplia** y **no especializada**, eso la caracteriza. Un buen bachiller conoce varios de los mecanismos fundamentales que operan en diferentes ámbitos como la de las reacciones químicas, la genética, la mecánica o termodinámica pero también en la sociedad o incluso en nuestra mente. Estos conocimientos se integran en un entendimiento más profundo y desmitificada del mundo que una persona que no cursó el bachillerato. En el buen bachiller se realiza el ideal del científico universal y no del especialista.

Por ello, esta educación no tiene mucho sentido para futuros mecánicos, carpinteros, taxistas o maquiladores, sino se dirige más bien a futuros inovadores. Un ejemplo: para poder concebir la idea de una sustancia que mejora el amalgama (al respecto de que es muy desagradable morder un pedazo de aluminio, cosa que obviamente poco ocurre) se debe primero conocer de las reacciones químicas "reducción - oxidación" que implican una corriente (un concepto de física) que estimulan los nervios (biología) luego buscar un material tal vez un plástico o un cerámico (porque no tienen tantos electrones libres y por ello son más inertes en reacciones redox en donde fluye una corriente), además el material debe poder trabajarse (moldeable o untable) en un espacio de trabajo como son los consultororios de los dentistas y debe tener iguales o mejores propiedades que el existente amalgama. En fin, para cada "inovación" por muy modesta que esta sea, se requiere de una multitud de conocimientos de diferentes áreas. Pero claro está, no se puede saber qué conocimiento exacto se requerirá en cada caso.

Por ello no se puede contestar la pregunta "de qué me sirve" hasta no saber qué actividad profesional llevará cabo el estudiante en su futuro. Probablemente se tendrá que responder que no le sirvió de nada, pero tal vez descubrirá que sí aprendió algunos conceptos en sus clases de matemáticas que le fueron muy útiles.

Los alumnos podrán contestar que muchos de ellos no serán "inovadores", algunos de ellos ni seguirán una carrera universitaria y aún de aquellos que lo harán, algunos no usará el lenguaje matemático de ninguna manera. Eso es cierto en lo que se refiere a los conocimientos, pero falso en lo que se refiere a las habilidades: poder razonar lógicamente, imaginarse objetos en el espacio, reconocer usar patrones, poder formular conjeturas y llevar a acabo argumentaciones son habilidades que el alumno puede adquirir en una buena enseñanza de la matemática.

4.6 ¿Por qué son difíciles las matemáticas?

Las matemáticas son difíciles, eso es un hecho innegable. Lo son y lo tienen que ser así porque permiten expresar relaciones muy complejas como por ejemplo las grandes leyes de la física. Pero lo que las matemáticas dan a cambio del sufrimiento al aprenderlos es también extraordinario: abren un mundo a la comprensión, un mundo abstracto que requiere un acercamiento lento y cuidadoso, pero un mundo nuevo que permite ver más al fondo de los fenómenos observables.

Alguien que está interesado en estos fenómenos difícilmente se puede negar a los conocimientos matemáticos. Por ello, es muy importante que los ejemplos que se usen para ilustrar como la matemática funciona de lenguaje para expresar estos fenómenos, que estos ejemplos sean bien escogidos y discutidos a fondo en lo que se permite con estudiantes jóvenes. Se ve que regresamos en nuestro argumento a la pregunta de las matemáticas reales expuesta en el capítulo 3.

4.7 Comentarios

Quisiera resumir los diversos argumentos que se expusieron en este capítulo. Creo que es posible de estructurar la enseñanza de tal manera que es fácil explicar por qué se hacen las maniobras que se hacen, que le quede claro al estudiante la razón de estudiar diversas conceptos abstractos. Para ello es necesario explicar de dónde vienen las cuestiones principales en las matemáticas (las raices, que aquí las reducimos a cuatro) y darle un orden apropiado al material. Con ello se puede reducir el número de veces que surge la pregunta latosa de manera drástica, pero claro, no se puede y tal vez no se debe erradicar. En el caso que sí se presenta, se puede tomar la oportunidad y discutir sobre la utilidad de diversos contenidos, incluso, en el caso de que la clase responde bien en discusiones, se puede rechazar la pregunta de manera provocativa para desatar una discusión donde los alumnos tienen chance de argumentar su caso y así reflexionar sobre lo que piensan.

De cualquier manera siempre se debe ser franco y honesto. Si no es posible visualizar una aplicación del tema que se trata, entonces es mejor admitirlo y no recurrir al desgastado "cuando seas grande ya lo verás...". Esta frase (que como hemos visto está firmemente instalado en ciertos programas) es diametralmente opuesta a las metas que debe perseguir la buena enseñanza de la matemática: debe invitar a los alumnos a exhibir y aprovechar sus capacidades intelectuales, a la discusión en el grupo y con el maestro. En el mejor de los casos el maestro se reduce a una guía que provee información u orientación.

4.8 Propuestas

1. Los números racionales so difíciles de motivar con ejemplos reales. Reflexiona cómo podrías motivar el estudio de estos números.

2. Averigua por qué *matemáticamente* no basta pensar los números reales solo hasta cierta aproximación. ¿Por qué se requiere los números con una cadena infinita de dígitos?

3. Revisa algunas aplicaciones de las cónicas en la tecnología y luego anota los conceptos que son importantes para el estudio y la aplicación de las cónicas.

4. Newton desarrolló el cálculo para el estudio de los movimientos celestes. Profundiza tu conocimiento sobre este tema de tal manera que puedes usarlo para motivar el estudio del cálculo en el salón de clase.

5. Revisa el internet o algunos libros respecto al uso de ecuaciones diferenciales en modelos demográficos, modelos de crecimientos de especies en biología. Reflexiona cómo podrías usar esta aplicación como motivador del estudio del cálculo.

6. ¿Por qué se hace tanto enfásis en las construcciones con regla y compás? ¿Por qué no se usan también otras herramientas de construcción con mayor frecuencia?

7. Reflexiona como podrías motivar el concepto de números negativos.

Citas originales

[c1] You're locked out of your house and the only open window is on the second floor, 25 feet above the ground. You need to borrow a ladder from one of your neighbors. There's a bush along the edge of the house, so you'll have to place the ladder 10 feet from the house. What length of the ladder do you need to reach the window?

[c2] You are at your grandma's house and decided you're ready to go home. Your mom says the only way you can come home is if you tell her exactly how many miles is the shortest distance from Grandma's before you can leave. She tells you that your street and Grandma's street meet to form an L at your school. Grandma's house is two miles east of the school and your house is one mile north of your school. She also tells you the shortest distance home does not involve passing your school again. How can you do this? Why not let Pythagoras help you home?

[c3] Frank und seine Freundin Petra kommen vom Joggen zurück und haben grossen Durst. Sie beschliessen, einen halben Liter Orangensaft und einen halben Liter Mineralwasser zu mischen und das Getränk zu teilen. Verliebt, wie sie sind, kippen Sie die beiden Getränke nicht einfach zusammen. Petra trinkt mit einem Trinkhalm 50 Kubikzentimeter pro Minute aus einem Krug, der am Anfang nur den halben Liter Mineralwasser enthält. Gleichzeitig träufelt Frank Orangensaft in den Krug und zwar 100 Kubikzentimeter pro Minute. Dabei rührt er mit einem Löffel, damit Petra ein feines Gemisch trinken kann, das zunehmend süsser schmeckt.

Es bezeichne $x(t)$ die Menge an (reinem) Orangensaft im Krug zur Zeit t in Kubikzentimetern, wobei t in Minuten gemessen werde, $t \in [0, 5]$. Leiten Sie ein Differentialgleichungsmodell für $x(t)$ her.

[c4] Galileo Galilei: *Il Saggiatore*

forse stima che la filosofia sia un libro e una fantasia d'un uomo, come l'Iliade e l'Orlando furioso, libri ne' quali la meno importante cosa è che quello che vi è scritto sia vero. Signor Sarsi, la cosa non istà così. La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

[c5] R. Feynman: *Physics*

[...] you will have to learn a lot: two hundred years of the most rapidly developing field of knowledge that there is. So much knowledge, in fact, that you might think that you cannot learn all of it in four years, and truly you cannot; you will have to go to graduate school too.

Surprisingly enough, in spite of the tremendous amount of work that has been done for all this time it is possible to condense the enormous mass of results to a large extent – that is to find *laws* which sum so hard to grasp that it is unfair to you to start exploring this tremendous subject without some kind of map or outline of the relationship of one part of the subject of science to another. [...]

You might ask why we cannot teach physics by just giving the basic laws on page one and the showing how they work in all possible circumstances, as we do in Euclidean geometry, where we state the axioms and then make all sorts of deductions. [...] We cannot do it in this way for two reasons. First, we do not yet *know* all the basic laws: there is an expanding frontier of ignorance. Second, the correct statement of the laws of physics involve some very unfamiliar ideas which require advanced mathematics for their description. Therefore, one needs a considerable amount of preparatory training even to learn what the *words* mean. No, it is not possible to do it that way. We can only do it piece by piece.

Bibliografía

Tal vez se debe atribuir a mis pobres conocimientos pero realmente pienso que hay poca literatura útil sobre la enseñanza de la matemática a nivel medio superior que realmente vale la pena revisar con cuidado. El gran maestro que ha tratado de describir con detalle el proceso que se puede llevar a cabo al enseñar matemáticas es (para mis sin duda) George Pólya. Recomiendo en particular

- George Pólya: *Patterns of plausible interference.* Princeton University, Princeton 1954.
- George Pólya: *How to solve it: A new aspect of mathematical method.* Princeton University, Princeton 1957.
- George Pólya: *Mathematical Discovery: On understanding, learning and teaching problem solving.* John Wiley & Sons, New York 1981.

También me parece muy honesto e interesante el siguiente trabajo.

- Hans Freudenthal: *Mathematics as educational task.* Springer, 1972.

Recomiendo también consultar el material que puso Miguel Guzman en línea:

- Pensamientos en torno al quéhacer matemático.
  `http://ochoa.mat.ucm.es/~guzman/portadacd/inicio.htm`

Pero sobre todo recomiendo ser valiente y atreverse a experimentar (siempre seindo honesto respecto a lo que uno sabe, o intuye o desconoce con los alumnos) y de tratar de informarse bien con literatura especializada. Hoy en día cada vez es más fácil orientarse usando el *Internet*, lo que no sustituye de ninguna manera hacer el esfuerzo y adentrarse a un tema más al fondo de lo que este medio electrónico nos puede ofrecer.