Algebra Moderna I, 2008-I
Michael Barot
Fecha de entrega: 18/10/2007

Serie 6

① Sea G y G' dos grupos abelianos. Demuestra

(a) Para cada subgrupo $H \subseteq G$ se tiene $\mathrm{T}(H) = \mathrm{T}(G) \cap H$.

(b) Para cada homomorfismo $\varphi : G \to G'$ se tiene $\varphi(\mathrm{T}(G)) \subseteq \mathrm{T}(G')$.

(c) Si G y G' son isomorfos entonces también $\mathrm{T}(G)$ y $\mathrm{T}(G')$ son isomorfos.

② Sean m y n dos enteros primos relativos. Demuestra que $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ y $\mathbb{Z}_{mn}$ son isomorfos.

③ Sean G, G_1, G_2, H, H_1, H_2 grupos abelianos.

(a) Define una operación binaria en

$$\mathrm{Hom}(G, H) = \{f : G \to H \mid f \text{ es homomorfismo } \}$$

tal que $\mathrm{Hom}(G, H)$ es un grupo abeliano.

(b) Demuestra $\mathrm{Hom}(G_1 \times G_2, H) \simeq \mathrm{Hom}(G_1, H) \times \mathrm{Hom}(G_2, H)$

(c) Demuestra $\mathrm{Hom}(G, H_1 \times H_2) \simeq \mathrm{Hom}(G, H_1) \times \mathrm{Hom}(G, H_2)$

(d) Demuestra $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G) \simeq G$.

④ Calcula $G = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_6)$. ¿Es $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_6)$ un subgrupo de G?

⑤ Demuestra que existe un grupo G donde $\mathrm{T}(G) = \{x \in G \mid \mathrm{orden}(x) < \infty\}$ no es un subgrupo. Ayuda: considera $G = \mathrm{Sym}(\mathbb{Z})$ o $G = \mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_2$ (donde φ es un isomorfismo).