8. Factorización

Si el producto de dos números es cero

Empezamos con un acertijo:

Silvia tiene dos números. Si los multiplica sale 0 *y si los suma sale* 256. *¿Cuáles son estos dos números que tiene Silvia?*

Solución:

El punto clave de la argumentación anterior es:

o dicho de otra manera:

Aplicación a ecuaciones

Aplicamos esto ahora a una ecuación como:

$$(x-2)\cdot(x+3)=0 \tag{8.1}$$

entonces concluimos que *uno de los dos factores* $(x-2)$ *ó* $(x+3)$ *tiene que ser cero*. Es decir tenemos

$$x-2=0 \quad \text{ó} \quad x+3=0 \tag{8.2}$$

es decir $x=2$ ó $x=-3$. La ecuación (8.1) tiene entonces *dos* soluciones.

Multiplicar es inverso a la factorización

El paso de (8.1) a (8.2) es una *simplificación*. Las dos ecuaciones que resultan son fáciles de resolver.

También es fácil *multiplicar* el lado izquierdo de (8.1). Se obtiene

$$\begin{aligned} (x-2)\cdot(x+3) &= 0 && (8.1)\\ x\cdot(x+3)-2\cdot(x+3) &= 0 \\ x^2+3x-2x-6 &= 0 \\ x^2+x-6 &= 0 && (8.3) \end{aligned}$$

Pero si el problema consiste en resolver la ecuación (8.3) entonces es asunto es más complicado por que "no se ve la factorización" (8.1). El proceso de ir de (8.3) a (8.1) se llama *factorizar*.

$$x^2+x-6 \underset{\text{Multiplicar}}{\overset{\text{Factorizar}}{\rightleftarrows}} (x-2)\cdot(x+3)$$

A veces hay que preparar la ecuación para que se pueda aplicar. Veamos unos ejemplos.

Ejemplo 1. *Resuelve la ecuación* $x^2-2x=0$.

Aquí, cada uno de los sumando izquierdos es un múltiplo de x. Por ello podemos *factorizar* x:

$$\begin{aligned} x^2-2x &= 0 && \mid \text{Factorizar } x\\ x\cdot(x-2) &= 0 && \mid \text{Separar los factores}\\ x=0 \quad \text{ó} \quad x-2 &= 0 && \mid \text{Resolver cada una de las ecuaciones}\\ x=0 \quad \text{ó} \quad x &= 2 && \mid \text{Resolver cada una de las ecuaciones} \end{aligned}$$

Ejemplo 2. *Resuelve la ecuación* $(x+1)(3x-6)=(x+1)x$.

La observación importante es que en ambos lados aparece el factor $(x+1)$. Si restamos $(x+1)x$ en ambos podemos después factorizar:

$$\begin{aligned} (x+1)(3x-6) &= (x+1)x && \mid -(x+1)x\\ (x+1)(3x-6)-(x+1)x &= 0 && \mid \text{Factorizar } (x+1)\\ (x+1)\left[(3x-6)-x\right] &= 0 && \mid \text{Separar los factores}\\ x+1=0 \quad \text{ó} \quad (3x-6)-x &= 0 && \mid \text{Resolver las ecuaciones}\\ x=-1 \quad \text{ó} \quad x &= 3 && \mid \text{Resolver las ecuaciones} \end{aligned}$$

Ideas para factorizar

No siempre es posible factorizar, pero a veces sí. Ahora vemos como es posible encontrar una factorización. Para encontrar una buena idea se observa primera con cuidado el proceso inverso: *multiplicar*:

$$\begin{aligned}(x+8)(x+7) &= x(x+7)+8(x+7)\\ &= x^2+7x+8x+7\cdot 8\\ &= x^2+(7+8)x+7\cdot 8\\ &= x^2+15x+56\end{aligned}$$

Se observa: $15 = 7+8$ es la suma de los dos números 7 y 8 mientras 56 es el producto de ellos.

Ahora intentamos un ejemplo.

Ejemplo 3. *Resuelve la ecuación* $x^2+8x+15$.

Debemos encontrar dos números cuya suma es 8 y cuyo producto es 15. Es más fácil observar que el producto 15 sólo se puede escribir de dos maneras como producto de enteros: $15 = 1\cdot 15 = 3\cdot 5$. La primera manera dará una suma de $1+15 = 16$ mientras la segunda factorización de 15 da $3+5 = 8$.

Por ello concluimos que

$$x^2+8x+15 = (x+3)(x+5).$$

Ahora bien, si queremos resolver la ecuación indicada podemos proceder como:

$$\begin{aligned}x^2+8x+15 &= 0 && \mid \text{Factorizar}\\ (x+3)(x+5) &= 0 && \mid \text{Separar los factores}\\ x+3=0 \quad &\text{ó} \quad x+5=0 && \mid \text{Resolver}\\ x=-3 \quad &\text{ó} \quad x=-5 &&\end{aligned}$$

Ejemplo 4. *Factoriza el siguiente término* $A^2+2A-15$.

Observamos que el producto de los dos números buscados es -15, así que uno de los dos factores debe ser negativo. Podemos probar con los siguientes factorizaciones de -15:

$$-15 = (-1)\cdot 15 = 1\cdot(-15) = (-3)\cdot 5 = 3\cdot(-5)$$

Probando obtenemos rápidamente que la solución es tomar -3 y 5, es decir

$$A^2+2A-15 = (A+5)(A-3).$$

Ejemplo 5. *Factoriza el siguiente término* $B^2 - 8B + 15$.

Observamos que el producto de los dos números buscados es 15, pero la suma es -8, así que *al menos uno* de los dos números tiene que ser negativo. Pero como el producto es positivo, no puede ser que uno sea negativo y el otro no. Ambos tienen que ser negativos. Podemos probar con las siguientes factorizaciones:

$$15 = (-1) \cdot (-15) = (-3) \cdot (-5).$$

Probando obtenemos rápidamente que la solución es tomar -3 y -5, es decir

$$B^2 - 8B + 15 = (B - 5)(B - 3).$$

No siempre funciona

El método de factorizar es útil pero no *universal*, es decir, no siempre funciona.

Ejemplo 6. *Factoriza el siguiente término* $T^2 + 3T - 15$.

Observamos que el producto de los dos números buscados es -15, así que uno de los dos factores debe ser negativo y el otro no. Podemos probar con los siguientes factorizaciones de -15:

$$-15 = (-1) \cdot 15 = 1 \cdot (-15) = (-3) \cdot 5 = 3 \cdot (-5)$$

Pero observemos cómo se comporta la suma en cada caso

números	-1, 15	1, -15	-3, 5	3, -5
producto	-15	-15	-15	-15
suma	14	-14	2	-2

En ningún caso, la suma es 3. El método no nos arrojó una factorización, así que no podemos resolver la ecuación dada usando el método de la factorización.

Más adelante veremos que sí podemos resolver la ecuación $T^2 + 3T - 15 = 0$.

Más ejemplos

A veces hay que "masajear" la ecuación antes de factorizar.

Ejemplo 7. *Resuelve la ecuación* $z^2 - 1 = 12(z - 3)$.

Lo mejor es primero multiplicar el lado derecho y luego restarlo.

$$
\begin{aligned}
z^2 - 1 &= 12(z - 3) && \mid \text{Multiplicar} \\
z^2 - 1 &= 12z - 36 && \mid -12z \\
z^2 - 12z - 1 &= -36 && \mid +36 \\
z^2 - 12z + 35 &= 0 && \mid \text{Factorizar} \\
(z - 5)(z - 7) &= 0
\end{aligned}
$$

Con ello se obtiene que $z = 5$ ó $z = 7$.

Ejercicios

① "Resuelve" las siguientes ecuaciones (es decir: "encuentra *todas* las soluciones):

(a) $(x + 2)(x - 6) = 0$.

(b) $(t - 1)(t + 1)(t + 2) = 0$.

(c) $\left(\frac{z-1}{2} - 3\right)(1 - 2 \cdot (z + 3)) = 0$.

(d) $u \cdot \left(\frac{u+1}{2} - 1\right) = 0$

② Es correcto la siguiente afirmación? Argumenta tu respuesta.

Si dos números multiplicados dan el resultado 1 *entonces uno de los dos factores tiene que ser* 1.

③ Resuelve las siguientes ecuaciones.

(a) $(x - 2)(x - 1) = 2(x - 2)$.

(b) $h^2 - 4h = 2h$.

(c) $x = x^2$.

(d) $u(u - 1)(u + 1) = (u - 1)u(u + 3)$.

④ Factoriza los siguientes términos.

(a) $x^2 + 16x + 63$.

(b) $y^2 + 4y + 4$.

(c) $z^2 + 10z + 9$.

(d) $e^2 + 34e + 64$

⑤ Factoriza los siguientes términos.

(a) $x^2 + 16x - 17.$

(b) $y^2 - 12y + 27.$

(c) $z^2 + 4z - 12.$

(d) $z^2 - 4z - 12.$

⑥ Resuelve las siguientes ecuaciones.

(a) $x^2 + 50x + 49 = 0.$

(b) $a^2 - 17a + 30 = 0.$

(c) $8 - 6z + z^2 = 0.$

(d) $24 + b^2 - 11b = 0.$

⑦ Resuelve las siguientes ecuaciones.

(a) $y^2 + 7y = 18.$

(b) $2w^2 = w^2 + 4.$

(c) $3t^2 + 12t + 12 = 0.$

(d) $\alpha^2 + 20(\alpha + 5) = 1.$

⑧ Resuelve las siguientes ecuaciones.

(a) $\dfrac{z^2}{3} + 3(z - 1) = 3z.$

(b) $m - 7 = \dfrac{30}{m}.$

(c) $x^3 - 3x(x - 2) = \dfrac{x^3 + x^2}{2}.$

(d) $y = 3\sqrt{y - 2}.$