20. Rectas y puntos notables

Lugares geométricos

En geometría es útil conocer varios *lugares geométricos*. Un lugar geométrico es un conjunto de puntos que satisfacen una cierta propiedad.

Ejemplo 1. El lugar geométrico de todos los puntos que están a distancia r de un punto M es la circunferencia con centro M y radio r.

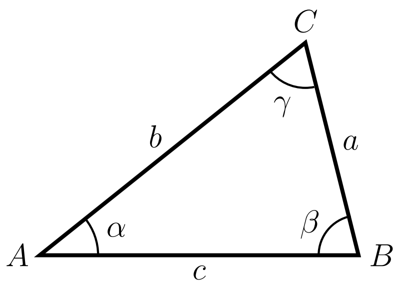
Ejemplo 2. El lugar geométrico de todos los puntos que están a distancia r de una recta g es un par de rectas paralelas a g.

Ejemplo 3. Si A y B son dos puntos dados, entonces el lugar geométrico de todos los puntos P tal que $|PA| = |PB|$ es una recta que es perpendicular al segmento AB y pasa por el punto medio de AB. Esta recta se llama *mediatriz* de A y B.

Ejemplo 4. Si g y h son dos rectas que se intersectan en el punto A entonces el conjunto de todos los puntos P tal que la distancia de P a g es la misma que de P a h es un par de rectas, perpendiculares entre si, con punto de intersección A y tal que cortan dos de los 4 ángulos formados por g y h en P a la mitad. Estas rectas se llaman *bisectrices*.

Rectas notables

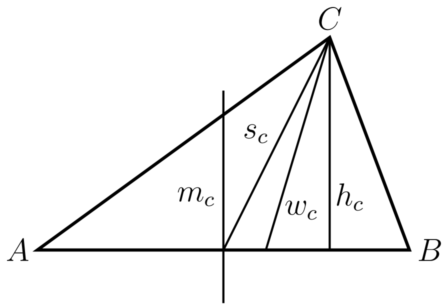
Fue Leonhard Euler (1707-1783) quien introdujo la siguiente *convención* para denotar las partes de un triángulo. En un triángulo ΔABC se denotan los lados opuestos a A, B y C con las mismas letras pero en minúscula: a, b y c, respectivmente. Los ángulos se denotan con la misma letra pero en griego: α, β y γ respectivamente.



En un triángulo hay cuatro triples de rectas notables:

- Las **mediatrices** m_a, m_b y m_c de los segmentos $a = BC$, $b = CA$ y $c = AB$, respectivamente.
- Las **bisectrices** w_a, w_b y w_c de los ángulos α, β y γ, respectivamente.
- Las **alturas** h_a, h_b y h_c son las perpendiculares a los lados a, b y c y pasan por A, B y C, respectivamente.
- Las **medianas** s_a, s_b y s_c son las rectas que unen una esquina con el punto medio del lado opuesto. Por ejemplo s_a une A con el punto medio de $a = BC$.

La siguiente ilustración muestra m_c, w_c, h_c y s_c en un caso particular.



Puntos notables

Si damos tres rectas en el plano tal que no hay paralelas entre ellas, entonces se forma un triángulo o estas tres rectas *inciden* en un punto. Lo segundo sucede en el caso de las rectas notables. A cada uno de los cuatro triples de rectas notables le corresponde un *teorema*: las tres rectas del triple se intersectan en un punto.

- Las mediatrices se intersectan en el **circuncentro** M.
- Las bisectrices se intersectan en el **incentro** W.
- Las alturas se intersectan en el **ortocentro** H.
- Las medianas se intersectan en el **baricentro** S.

Veamos por qué esto es así. Es decir, vamos a dar un *argumento*, una *demostración*.

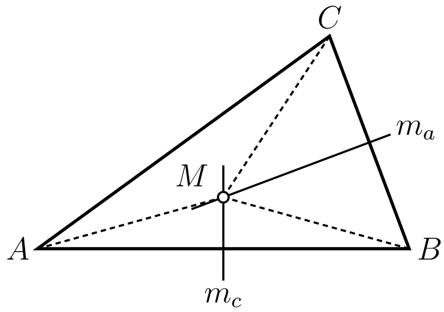
Intersección de mediatrices

Sea M el punto de intersección de m_a y m_c. Como M se encuentra en m_c está a la misma distancia de A que de B:

$$|MA| = |MB|. \tag{20.1}$$

Como M se encuentra en m_a está a la misma distancia de B que de C:

$$|MB| = |MC|. \tag{20.2}$$



Si combinamos (20.1) con (20.2) obtenemos

$$|MA| = |MB| = |MC|,$$

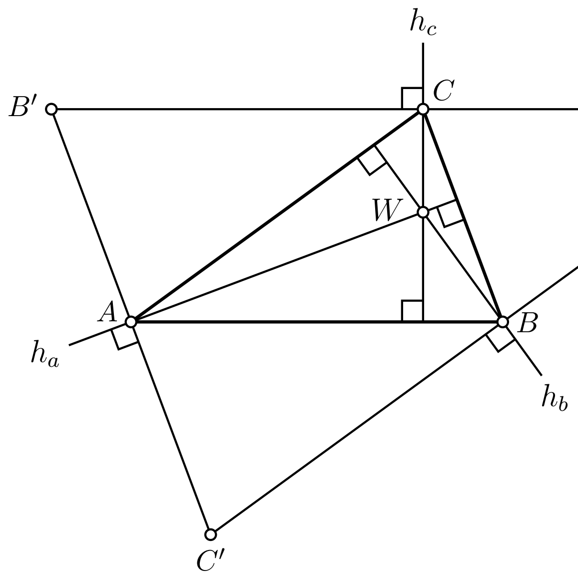
y esto significa que M se encuentra en la mediatriz de AC, es decir, en m_b. En otras palabras m_b pasa por M también.

Intersección de las bisectrices

Esto se hace muy similar a la demostración de que las mediatrices se intersectan y se deja como Ejercicio 2.

Intersección de las alturas

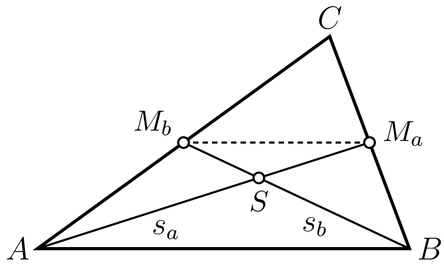
Para ver que las alturas se intersectan en un punto trazamos las paralelas a los lados por las esquinas opuestos. Así obtenemos un triángulo $\Delta A', B', C'$ con lados a', b' y c', ver la siguiente ilustración. Como h_a es perpendicular al lado $a = BC$ también es perpendicular al lado $a' = B'C'$. Además, h_a pasa por el punto A que el punto medio del segmento $B'C'$. Por ello h_a es la mediatriz de $B'C'$. De igual manera se ve que h_b es la mediatriz de $C'A'$ y h_c es la mediatriz de $A'B'$.



Ahora podemos concluir. Sabemos que las tres mediatrices de cualquier triángulo se intersectan en un punto. Como h_a, h_b y h_c son las mediatrices del triángulo $\Delta A'B'C'$ entonces h_a, h_b y h_c se intersectan.

Intersección de las medianas

Denotamos por M_a, M_b y M_c el punto medio del segmento $a = BC$, $b = CA$ y $c = AB$, respectivamente.



Por semejanza tenemos

$$\frac{|M_aM_b|}{|CM_a|} = \frac{|BA|}{|CB|} = \frac{|BA|}{2|CM_a|}$$

Por ello tenemos

$$2|M_aM_b| = |BA|. \tag{20.3}$$

Sea S el punto de intersección de las medianas s_a y s_b. Entonces $\sphericalangle M_aM_bB = \sphericalangle ABM_b$ por ser ángulos a paralelas y claramente $\sphericalangle M_bSM_a = \sphericalangle ASB$. Por ello los dos triángulos ΔASB y ΔM_bSM_a son semejantes. Entonces sigue que de (20.3) que

$$2|SM_a| = |SA| \quad \text{y} \quad 2|SM_b| = |SB|. \tag{20.4}$$

Eso quiere decir que la mediana s_b corta a s_a de tal manera que los dos segmentos en la proporción

$$|AS| : |SM_a| = 2 : 1.$$

Si repetimos el mismo argumento con s_a y s_c obtenemos que el punto de intersección S' (entre s_a y s_c) divide a s_a en dos segmentos en la misma proporción:

$$|AS'| : |S'M_a| = 2 : 1.$$

Esto implica que $S = S'$, es decir s_c corta a s_a en el mismo punto que s_b. En otras palabras, las tres medianas se intersectan en S.

Ejercicios

① Dados dos puntos A y B determina el lugar geométrico de todos los puntos P tal que $\sphericalangle APB = 90°$.

② Demuestra que las tres bisectrices de un triángulo se intersectan en un punto.

③ Demuestra que existe una circunferencia con centro M (el circuncentro del triángulo ΔABC) que pasa por los tres esquinas A, B y C.

④ Demuestra: si en un triángulo la mediatriz m_a coincide con alguna de las otras tres rectas notables h_a, w_a o s_a entonces el triángulo es isócseles.