24. Tamaños y distancias celestes

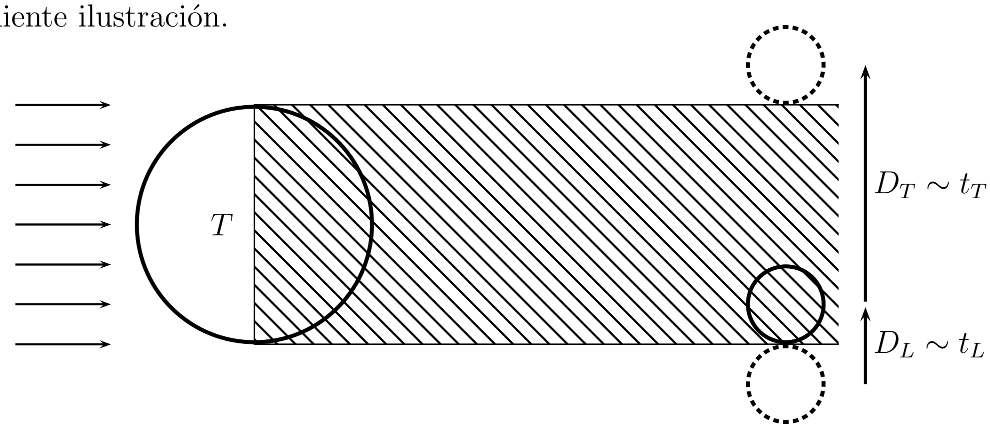
Introducción

Los griegos estaban muy interesados en los objetos que se encuentran a la vista en nuestro cielo. Fue **Aristarco de Samos** (ca. 310 a. C. – 230 a. C.) quien presentó el primer modelo con el Sol como el centro del sistema planetario (sólo se conocían los cinco planetas Mercuirio, Venus, Marte, Jupiter y Saturno en aquel entonces). El Sol, la Tierra, la Luna y los planetas los pensaban como esferas en el espacio tal como lo hacemos hoy día.

Basado en ello los griegos fueron capaces de medir el tamaño de la Tierra, de la Luna y del Sol y las distancias entre ellos. Los griegos no tuvieron a su alcance muchas herramientas, sino sólo unas observaciones hechas desde una pequeña parte de la superficie de nuestra planeta. En lo que sigue expondremos las principales ideas de estos logros. Se basan en usar buenas aproximaciones, geometría muy sencilla y unas ideas ingeniosas.

Tamaños relativos entre Tierra y Luna

Los griegos podían comparar el diámetro de la Tierra D_L con el diámetro de la Tierra D_T al observar un eclipse lunar total, en el cual la luna pasa por la sombra de la Tierra. Midieron el tiempo t_L desde que empieza a oscurecer la Luna hasta que quede totalmente oscurecido y lo compararon con el tiempo t_T desde este último momento hasta que vuelve a verse bien iluminada la Luna. El primer tiempo es proporcional a d_L y el segundo tiempo a d_T ya que es proporcional al tamaño de la sombra que forma un cilindro, ver la siguiente ilustración.



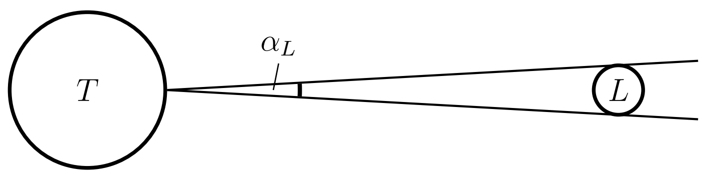
Aristarco encontró que

$$\frac{t_L}{t_T} = \frac{D_L}{D_T} = 0.36, \tag{24.1}$$

el factor que hoy se toma como correcto es $\frac{D_L}{D_T} = 0.27$.

Distancia relativa a la Luna y al Sol

El Sol y la Luna se ven desde la Tierra bajo cierto ángulo, que se llama *diámetro angular*. Podemos tratar de tapar el Sol o la Luna –que es más agradable– con una moneda en el brazo extendido. Al medir el diámetro de la moneda y la distancia de la moneda hasta los ojos se puede aproximar el ángulo. En ambos casos resulta un ángulo similar.



Aristarco midió los diámetros angulares, α_L para la Luna y α_S para el Sol, en 2°. En realidad el diámetro angular es para ambos –Luna y Sol– cerca de 0.53°. Que el ángulo es casi igual, $\alpha_L \approx \alpha_S$, es un coincidencia y no obedece a alguna ley secreta – de hecho, los dos ángulos varían, ya que la distancia al Sol y a la Luna varían.

Por ello se tiene (al menos en buena aproximación):

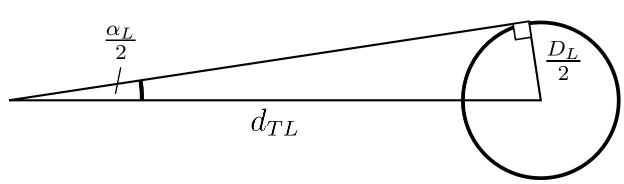
$$\frac{d_{TL}}{d_{TS}} = \frac{D_L}{D_S},$$

donde D_S es el diámetro del Sol, d_{TL} la distancia de la Tierra a la Luna y d_{TS} la distancia de la Tierra al Sol.

Relación entre el diámetro y la distancia hacia la Luna

Al tener el diámetro angular α_L podemos relacionar el diámetro D_L de la Luna con la distancia d_{TL}. Podríamos pensar que la relación matemáticamente correcta es

$$\sin\left(\frac{\alpha_L}{2}\right) = \frac{D_L/2}{d_{TL}}. \tag{24.2}$$

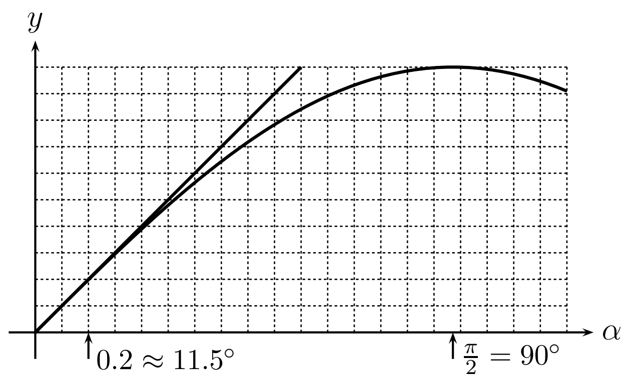


No es así, ya que el diámetro angular no se midió desde el centro de la Tierra. Pero si comparamos la exactitud con la cual podemos medir el diámetro angular, esto realmente no importa. El error que cometeremos será muy pequeño.

En efecto, lo que hizo Aristarco es tomar la aproximación

$$\sin \alpha \simeq \alpha \tag{24.3}$$

donde el ángulo se mide en radianes. Es muy buena aproximación para ángulos chicos. La siguiente gráfica muestra la gráfica $y = \sin(\alpha)$ junto con la de $y = \alpha$.



Hasta ángulos de 10° la aproximación es bastante buena. En nuestro ejemplo podemos calcular (gracias a las calculadoras de bolsillo que no tenía Aristarco) que

$$\begin{aligned} \alpha_L &= 0.5^\circ = 0.00872665 \\ \sin(\alpha_L) &= 0.00872653 \end{aligned}$$

Con la aproximación (24.3) la ecuación (24.2) se reescribe (después de multiplicar por 2 a ambos lados) como

$$\alpha_L = \frac{D_L}{d_{TL}}. \tag{24.4}$$

Si conocemos una de las dos distancias podemos calcular la otra.

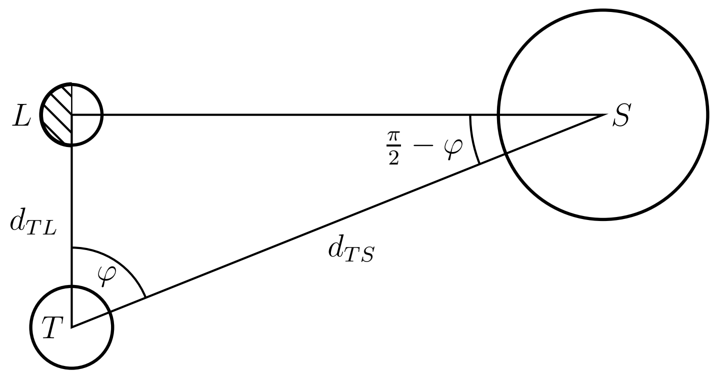
De manera similar tenemos

$$\alpha_S = \frac{D_S}{d_{TS}}. \tag{24.5}$$

Relacionar la distancia a la Luna con la distancia al Sol

Podría resultar sorprendente que hasta ahora no hemos obtenido ninguna estimación concreta, ni de un diámetro, ni de una distancia a uno de estos dos cuerpos celestes. Esto se debe a que seguimos el desarrollo histórico: seguimos primero a Aristarco y este sólo pudo establecer relaciones entre estas longitudes.

Para concluir y relacionar la distancia a la Luna con la distancia al Sol Aristarco necesitaba una idea más. Pensó que en el momento que nosotros vemos media luna el ángulo $\sphericalangle SLT$ es un ángulo recto. En este día midió el ángulo $\varphi = \sphericalangle LTS$ y pudo relacionar las distancias involucradas.



La idea de Aristarco es muy buena, excepto que tiene un problema de medición: el ángulo φ es muy cercano a un ángulo recto $90° = \frac{\pi}{2}$. Aristarco lo midió como 87°, pero en realidad es de 89.85°. Es mucho más fácil medir un ángulo pequeño que un ángulo cercano a 90° con buena precisión. Esto provocó que las distancias que estimaban los griegos salieran mucho más pequeñas de lo que son en realidad.

Ahora tenemos

$$\sin(\tfrac{\pi}{2} - \varphi) = \frac{d_{TL}}{d_{TS}}. \tag{24.6}$$

El ángulo $\frac{\pi}{2} - \varphi$ es muy pequeño, por lo que $\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) \approx \frac{\pi}{2} - \varphi$. Si sustituimos esta approximación en (24.6) obtenemos:

$$\frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{d_{TL}}{d_{TS}}. \tag{24.7}$$

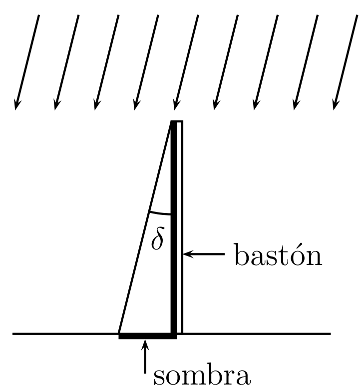
Esto concluye nuestro relato de las relaciones de distancias celestes que encontró Aristarco de Samos alrededor de 270 a. C.

Medición de la Tierra

Para encontrar todas las medidas que antes se mencionaban sólo hace falta medir el diámetro de la Tierra. Esto se le atribuye a **Eratóstenes** (276 a. C. – 194 a. C.), quien comparó el ángulo bajo el cual los rayos de Sol caen a la Tierra en dos ciudades distintas pero sobre el mismo meridiano. Las ciudades son Alejandría, ubicado en la desembocadura del Nilo y el centro científico del mundo griego en aquel entonces y Siena, al Sur de Alejandría, hoy se llama Asuán.

Las dos ciudades no se encuentran exactamente sobre el mismo meridiano (distan en 3°), pero hay que considerar que la medición de la longitud fue algo que no se podía hacer bien hasta finales del siglo XVIII con la producción de relojes muy precisos.

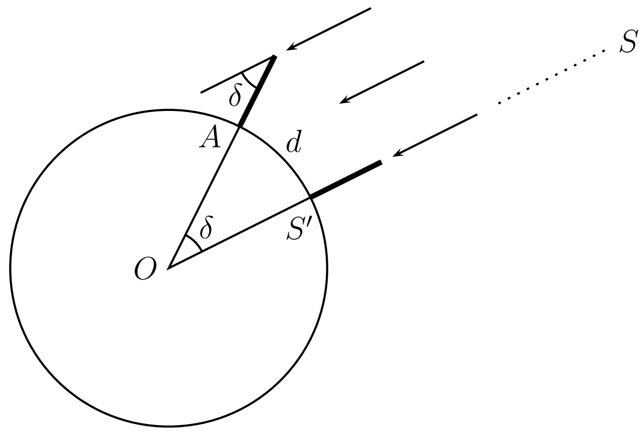
Eratóstenes sabía que el día del solisticio de verano (el día que alcanza el Sol la mayor altitud en el cielo) los rayos de Sol caen verticalmente en Siena. El solsticio de verano es igual en todos las ciudades del hemisferio norte. Así que medía ese día el ángulo δ bajo el cual caen los rayos de Sol en Alejandría.



La medición de Eratóstenes fue que δ era $\frac{1}{50}$ de un ángulo completo, es decir $\delta = \frac{360°}{50} = 7.2°$.

Para medir la distancia entre las dos ciudades se basó en los relatos de comerciantes que necesitaban 50 días con su caravana de camellos para hacer el viaje de una ciudad a otra. Estimó que en un día, la caravana avanza en promedio 100 *estadios*, una medida antigua que se estima que medía entre 157 m y 211 m.

De ahí podía concluir el diámetro de la Tierra D_T de la siguiente manera. Primero, el ángulo δ es igual al ángulo $\sphericalangle AOS = \sphericalangle AOS'$ donde A denota el Alejandría, O el centro de la Tierra, S el Sol y S' la ciudad Siena.



La distancia entre Alejandría y Siena es de $50 \times 100 = 5000$ estadios y esto corresponde a $\frac{1}{50}$ del perímetro de la Tierra. De esta manera, el perímetro medía

$$50 \times 5000\,\text{estadios} = 250\ 000\,\text{estadios}$$

y el diámetro

$$D_T = \frac{250\ 000\,\text{estadios}}{\pi} \approx 79617\,\text{estadios}\,.$$

Dado que es difícil saber la transformación entre los estadios que usó Eratóstenes y un metro, no podemos apreciar bien la exactitud de la estimación que hizo. Lo que queda claro es que aproximó el tamaño de la Tierra con sorprendente exactitud con solo hacer una medición sencilla y el empleo de las matemáticas.

Conclusión

Las ideas de Aristarco y Eratóstenes son bastante sencillas y tal vez justo por ello asombroso. Si ellos hubieran contado con mejores herramientas de medición hubieran alcanzado valores muy precisos. Esto muestra que las ideas y las aproximaciones que hicieron fueron muy acertados y no obstante los errores de medición encontraron valores no tan distantes de los reales.

Ejercicios

(1) Un estadio egiptico medía 157 m, un estadio griego 180 m, más tarde un estadio egiptico medía 211 m. Expresa la estimación de Eratóstenes sobre el perímetro de la Tierra en metros y toma en cuenta las diferentes medidas de los estadios. ¿Cuál de las tres expresiones se acreca mejor a la medida actual de 40 000 km?

(2) Usa la medición (24.1) de Aristarco para calcular el diámetro de la Luna. Compára esta medición con la que se obtiene al tomar el valor actualmente aceptado de 0.27. En ambos casos usa 40 000 km para el perímetro de la Tierra.

(3) Ahora usa la fórmula (24.4) de Aristarco para calcular la distancia hacia la Luna. Obtén dos aproximaciones: una que se basa en lo que medía Aristarco y otra moderna, es decir, usa primero la medición de Aristarco $\alpha_L = 2°$ y luego el valor actualmente aceptado $\alpha_L = 0.53°$ y compara los dos resultados.

(4) Con la fórmula (24.7) calcula la distancia D_{TS} al Sol. Nuevamente toma primero la medición de Aristarco $\varphi = 87°$ y luego el actualmente aceptado valor $\varphi = 89.85°$ y compara los dos resultados.

(5) Explica por qué los resultados en (4) son tan diferentes no obstante los ángulos 87° y 89.85° son muy similares. ¿Por qué usar el coseno en vez del seno no resuelve el problema?

(6) Finalmente usa (24.5) para calcular el diámetro del Sol D_S. Toma en cuenta el valor de Aristarco $\alpha_S = 2°$ y el valor moderno $\alpha_S = 0.53°$ para obtener dos estimaciones.

(7) Completa la siguiente tabla con las mediciones anteriores.

	según Aristarco	Tu aproximación	Valor moderno
D_T			12 742 km
D_L			3 476 km
D_S			1 392 000 km
d_{TL}			384 400 km
d_{TS}			149 597 871 km