Símbolos

El alfabeto griego

A	α	alfa	H	η	eta	N	ν	ni	T	τ	tau
B	β	beta	Θ	θ,ϑ	theta	Ξ	ξ	xi	Y	υ	ípsilon
Γ	γ	gamma	I	ι	iota	O	o	ómicron	Φ	φ	phi
Δ	δ	delta	K	κ	kappa	Π	π	pi	X	χ	chi
E	ε	épsilon	Λ	λ	lambda	P	ρ	rho	Ψ	ψ	psi
Z	ζ	dseta	M	μ	mi	Σ	σ	sigma	Ω	ω	omega

Comparaciones

$=$	igual	$<$	menor que
$\neq$	desigual	$>$	mayor que
$\approx$	más o menos igual	$\leq$	menor o igual que
$\sim$	equivalente (o semejante)	$\geq$	mayor o igual que

Operaciones

$+$	sumar	$\div$, $/$	dividir
$-$	restar	$\wedge$	potenciar
$\cdot$, $\times$, $*$	multiplicar	$\sqrt{\ }$	radicar

Σ sumar varios sumandos: $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

Π multiplicar varios factores: $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$

Conjuntos de números

$\mathbb{N}$ los números naturales
$\mathbb{Z}$ los números enteros
$\mathbb{Q}$ los números racionales
$\mathbb{R}$ los números reales
$\mathbb{C}$ los números complejos

Lógica

$\Rightarrow$ eso implica
$\Leftrightarrow$ es equivalente a
$\vee$ o
$\wedge$ y

Formulario matemático

Grupo 220-A

Michael Barot

Algebra

Orden de evaluación

expresiones en parántesis $\longrightarrow$ potencias y raíces $\longrightarrow$ multiplicación y división $\longrightarrow$ adición y subtracción

Leyes generales para números, variables y expresiones

Asociatividad. $a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Conmutatividad. $a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a$

Distributividad. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Binomios. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (primer binomio)

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (segundo binomio)

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ (tercer binomio)

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

coeficientes binomiales $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

donde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (n factorial)

Ley de multiplicación de signos

$$+ \cdot + = +, \quad + \cdot - = -, \quad - \cdot + = -, \quad - \cdot - = +$$

Fracciones

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd} \qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Ecuaciones

Ecuación lineal. $ax + b = 0$. Solución: $x = -\frac{b}{a}$.

Ecuación cuadrática. $ax^2 + bx + c = 0$. Discriminante $D = b^2 - ac$

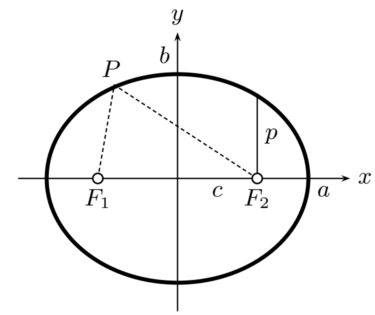
- Si $D > 0$ entonces hay dos soluciones: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
- Si $D = 0$ hay una solución: $x = \dfrac{-b}{2a}$
- Si $D < 0$ no hay ninguna solución.

Transformaciones de equivalencia de ecuaciones y desigualdades

$a = b$	ecuación dada / desigualdad dada	$a < b$
$a + m = b + m$	Sumar cualquier expresión m	$a + m < b + m$
$a \cdot c = b \cdot c$	Multiplicar por cualquier número $c \neq 0$	$\begin{cases} a \cdot c < b \cdot c & \text{si } c > 0 \\ a \cdot c > b \cdot c & \text{si } c < 0 \end{cases}$
$\frac{a}{d} = \frac{b}{d}$	Dividir entre cualquier número $d \neq 0$	$\begin{cases} \frac{a}{d} < \frac{b}{d} & \text{si } d > 0 \\ \frac{a}{d} > \frac{b}{d} & \text{si } d < 0 \end{cases}$
$\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$	Invertir si $a \neq 0, b \neq 0$	$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
$b = a$	Voltear	$b > a$

Cónicas

Elipse.



Ecuación: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a \geq b)$

Distancia focal: $f = 2c$, $c^2 = a^2 - b^2$

Focos: $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$

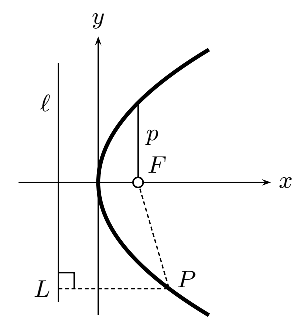
Excentricidad: $\varepsilon = \frac{c}{a}$ satisface $0 \leq \varepsilon < 1$

($\varepsilon = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ elipse es círculo)

Propiedad de distancia: $|F_1P| + |F_2P| = 2a$

Semilatus rectum $p = \frac{b^2}{a}$

Parábola.



Ecuación: $y^2 = 2px$

(p el semilatus rectum)

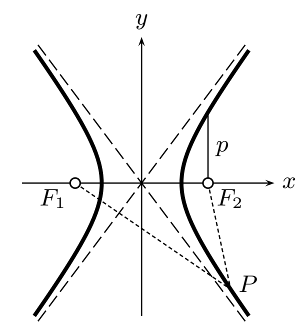
Foco: $F(\frac{p}{2}, 0)$

Excentricidad: $\varepsilon = 1$

Directrix ℓ: $x = -\frac{p}{2}$

Propiedad de distancia: $|FP| = |LP|$

Hipérbola.



Ecuación: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a \geq b)$

Distancia focal: $f = 2c$, $c^2 = a^2 + b^2$

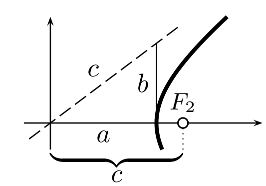
Focos: $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$

Excentricidad: $\varepsilon = \frac{c}{a}$ satisface $\varepsilon > 1$

Propiedad de distancia: $|F_1P| - |F_2P| = \pm 2a$

Semilatus rectum $p = \frac{b^2}{a}$

Asíntotas: $y = \pm \frac{b}{a} x$



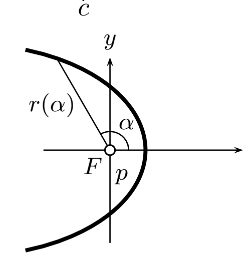
En coordenadas polares. $r(\alpha) = \dfrac{p}{1 + \varepsilon \cos \alpha}$

donde

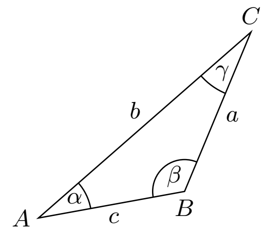
$r(\alpha)$: distancia desde el foco en dirección α

p: semilatus rectus

ε: excentricidad



Cálculo en el triángulo general.



$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma} \quad \text{(Teorema del seno)}$$

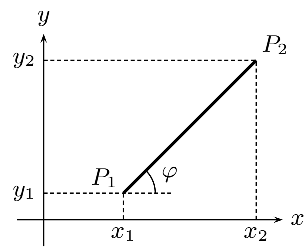
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma \quad \text{(Teorema del coseno)}$$

Geometría analítica

Distancia y pendiente.

La distancia entre dos puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ es

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$



La pendiente es

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\tan\varphi$$

Dos rectas g y g' con pendientes m y m':

$g\perp g' \quad \Leftrightarrow \quad mm'=-1$

Ecuaciones de la recta.

Ecuación *punto-pendiente* ($P(x_1,y_1)$ es un punto de la recta, m es la pendiente:

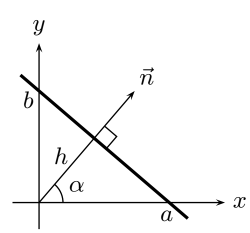
$y-y_1=m(x-x_1)$

Ecuación *estándar* (m es la pendiente, b es el valor donde la recta intersecta el eje y):

$y=mx+b$

Ecuación *normal* (el vector $\vec{n}=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$ es normal a la recta):

$Ax+By+C=0$



Ecuación *simétrica* (a y b son los valores donde se intersectan los ejes):

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

Forma *normal de Hesse* ($m=\tan\varphi$ es la pendiente, h la distancia al origen):

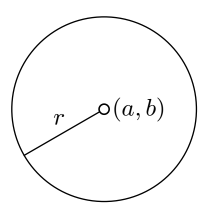
$x\cos\alpha+y\sin\alpha\pm h=0$

$H(x,y)=\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$

Ecuación del círculo.

con centro (a,b) y radio r:

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$



Potencias

Definiciones. $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ factores}}$, $\quad a^0=1$, $\quad a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, $\quad a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$

Leyes.

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n} \qquad \sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$$

$$a^m\cdot b^m=(a\cdot b)^m \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$$

$$\frac{a^m}{b^m}=\left(\frac{a}{b}\right)^m \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

$$(a^m)^n=a^{m\cdot n}$$

Logaritmos

Definición. $\log_a n=b \quad \Leftrightarrow \quad a^n=b, \quad \ln=\log_e, \quad \log=\log_{10}$

donde $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2.71828\ldots$ (número de Euler)

Leyes.

$$\log_a(u\cdot v)=\log_a u+\log_a v \qquad \log_a(u^n)=n\log_a u$$

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right)=\log_a u-\log_a v \qquad \log_a\left(\frac{1}{v}\right)=-\log_a v$$

$$\log_a u=\frac{\log_b u}{\log_b a}$$

Sucesiones y series

Definición. sucesión: $a_1,a_2,\ldots,a_k$,

serie: $s_1,s_2,\ldots,s_n$, $\quad$ donde $s_n=a_1+\ldots+a_n=\sum_{i=1}^n a_i$

Sucesión aritmética.

$a_k=a_{k-1}+d$ (recursiva)

$a_k=a_1+(k-1)d$ (explícita)

$s_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$

Sucesión geométrica.

$a_k=q\cdot a_{k-1},\ q\neq 0$ (recursiva)

$a_k=q\cdot a_1$ (explícita)

$s_n=a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}=a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$

serie infinita (para $|q|<1$):

$s=\lim\limits_{n\to\infty}s_n=a_1\cdot\frac{1}{1-q}$

Series especiales.

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

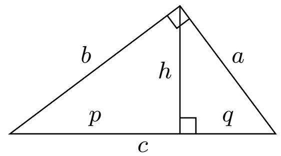
$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Geometría

Geometría sintética

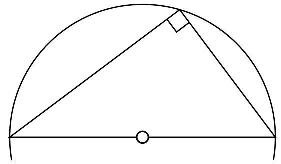
Triángulo rectángulo.

Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$
Euclides: $a^2 = c \cdot p, \quad b^2 = c \cdot q$
Altura: $h^2 = p \cdot q$



Teorema de Tales.

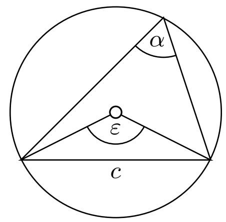
La hipotenusa de un triángulo rectángulo es el diámetro de la circunferencia circunscrita.
Si uno de los lados de un triángulo es el diámetro de la circunferencia circunscrita entonces el ángulo opuesto al diámetro es recto.



Teorema del ángulo inscrito.

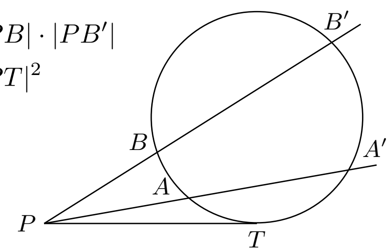
$\varepsilon = 2\alpha$

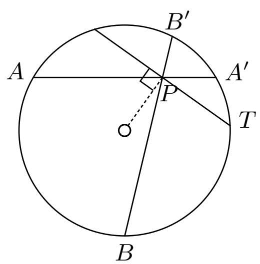
donde:
c : cuerda
α : ángulo inscrito
ε : ángulo central



Teoremas de cuerdas, secantes y tangentes.

$$|PA| \cdot |PA'| = |PB| \cdot |PB'| = |PT|^2$$

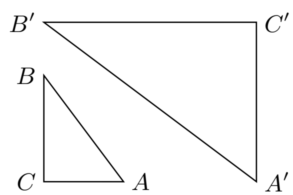




Semejanza

Dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son semejantes si la proporción de lados correspondientes es la misma para los tres lados:

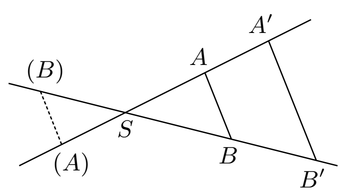
$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$$



Teorema de Tales.

Si AB es paralelo a $A'B'$ y S es el punto de intersección de AA' con BB' entonces:

$$\frac{|SA|}{|AA'|} = \frac{|SB|}{|BB'|}, \qquad \frac{|SA|}{|SA'|} = \frac{|SB|}{|SB'|}$$



Trigonometría

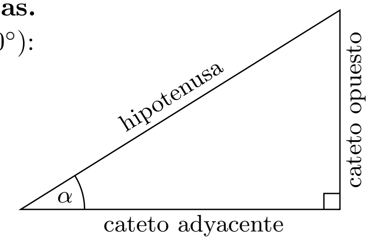
Medida de ángulos.

ángulo	cero	recto	llano	completo
grados	0°	90°	180°	360°
radianes	0	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Definición de las funciones trigonométricas.

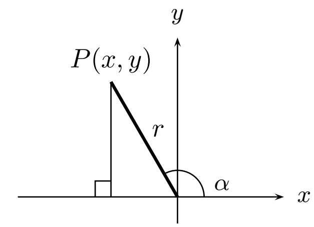
En el triángulo rectángulo (para $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$):

$$\sin\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$
$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$
$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

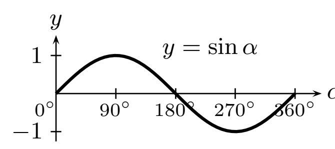


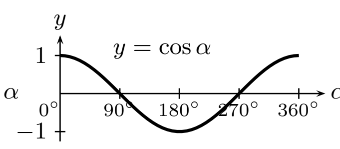
Para cualquier ángulo α:

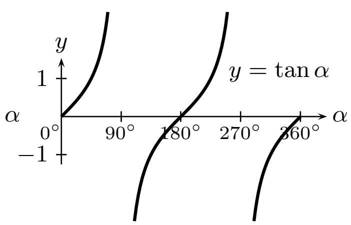
$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \tan\alpha = \frac{y}{x}$$



Gráficas.







Simetrías.

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \sin(90^\circ \pm \alpha) = \cos\alpha \qquad \cos(90^\circ \pm \alpha) = \mp\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \sin(180^\circ \pm \alpha) = \mp\sin\alpha \qquad \cos(180^\circ \pm \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha) \qquad \sin(360 \pm \alpha) = \pm\sin\alpha \qquad \cos(360 \pm \alpha) = \cos\alpha$$

Identidades trigonométricas.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\sin\alpha + \sin\beta = \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\alpha$$
$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$