

**Tarea 1****Ejercicio 1**

Demuestra las siguientes afirmaciones para un homomorfismo  $\varphi: G \rightarrow H$  en la categoría  $\mathcal{G}$  de grupos:

- (a)  $\varphi$  es inyectivo  $\iff \text{Ker}(\varphi) = \{e_G\} \iff \varphi$  es un monomorfismo.
- (b)  $\varphi$  es suprayectivo  $\iff \varphi$  es un epimorfismo.
- (c)  $\varphi$  es biyectivo  $\iff \varphi$  es un isomorfismo.

**Ejercicio 2**

Sea  $G = (G, \cdot)$  un grupo. Para  $g \in G$  sea  $\varphi_g \in \text{Aut}(G)$  el automorfismo interno con  $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$  para todo  $x \in G$ .

- (a) Verifica que el mapeo  $\alpha: G \rightarrow \text{Aut}(G), g \mapsto \varphi_g$  es efectivamente un homomorfismo de grupos.
- (b) Verifica que  $\text{Inn}(G) := \text{Im}(\alpha)$  es un subgrupo *normal* de  $\text{Aut}(G)$ .

**Ejercicio 3**

Sea  $G$  un grupo con dos subgrupos  $H$  y  $N$ , donde  $N$  es normal. Demuestra que las siguientes afirmaciones son equivalentes

- (a)  $G = N \cdot H$  y  $N \cap H = \{e\}$
- (b) Cada elemento de  $G$  se puede escribir de forma única como un producto de un elemento de  $N$  y un elemento de  $H$ .
- (c) Existe un homomorfismo de grupos  $\pi: G \rightarrow H$  que es la identidad sobre  $H$  y  $\text{Ker}(\pi) = N$ .

Demuestra, que en este caso tenemos un homomorfismo de grupos

$$\eta: H \rightarrow \text{Aut}(N), h \mapsto (n \mapsto hnh^{-1})$$

y  $G$  es isomorfo al producto semidirecto  $N \rtimes_{\eta} H$ .

**Ejercicio 4**

Sea  $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +)$  el grupo de los números reales con la adición usual.

- (a) Demuestra que el mapeo  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}), r \mapsto (x \mapsto e^r x)$  es un homomorfismo de grupos.
- (b) Sea  $(G, *) := \mathbb{R} \rtimes_{\phi} \mathbb{R}$ , y  $H := \{0\} \times \mathbb{R} < G$ . Calcula las clases laterales izquierdas y derechas de  $(a, 0) \in G$  con respecto a  $H$  para todo  $a \in \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 5**

Sea  $G$  un grupo, y  $H$  un subgrupo de  $G$ . Demuestra que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a)  $gH = Hg$  para todo  $g \in G$ .
- (b)  $gHg^{-1} \subset H$  para todo  $g \in G$ .
- (c)  $gHg^{-1} = H$  para todo  $g \in G$ .

**A discutir en la Ayudantía a partir del 23 de Agosto 2023**