

Tarea 1**Ejercicio 1**

Demuestra las siguientes afirmaciones para un homomorfismo $\varphi: G \rightarrow H$ en la categoría \mathcal{G} de grupos:

- (a) φ es inyectivo $\iff \text{Ker}(\varphi) = \{e_G\} \iff \varphi$ es un monomorfismo.
- (b) φ es suprayectivo $\iff \varphi$ es un epimorfismo.
- (c) φ es biyectivo $\iff \varphi$ es un isomorfismo.

Ejercicio 2

Sea $G = (G, \cdot)$ un grupo. Para $g \in G$ sea $\varphi_g \in \text{Aut}(G)$ el automorfismo interno con $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$ para todo $x \in G$.

- (a) Verifica que el mapeo $\alpha: G \rightarrow \text{Aut}(G), g \mapsto \varphi_g$ es efectivamente un homomorfismo de grupos.
- (b) Verifica que $\text{Inn}(G) := \text{Im}(\alpha)$ es un subgrupo *normal* de $\text{Aut}(G)$.

Ejercicio 3

Sea G un grupo con dos subgrupos H y N , donde N es normal. Demuestra que las siguientes afirmaciones son equivalentes

- (a) $G = N \cdot H$ y $N \cap H = \{e\}$
- (b) Cada elemento de G se puede escribir de forma única como un producto de un elemento de N y un elemento de H .
- (c) Existe un homomorfismo de grupos $\pi: G \rightarrow H$ que es la identidad sobre H y $\text{Ker}(\pi) = N$.

Demuestra, que en este caso tenemos un homomorfismo de grupos

$$\eta: H \rightarrow \text{Aut}(N), h \mapsto (n \mapsto hnh^{-1})$$

y G es isomorfo al producto semidirecto $N \rtimes_{\eta} H$.

Ejercicio 4

Sea $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +)$ el grupo de los números reales con la adición usual.

- (a) Demuestra que el mapeo $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}), r \mapsto (x \mapsto e^r x)$ es un homomorfismo de grupos.
- (b) Sea $(G, *) := \mathbb{R} \rtimes_{\phi} \mathbb{R}$, y $H := \{0\} \times \mathbb{R} < G$. Calcula las clases laterales izquierdas y derechas de $(a, 0) \in G$ con respecto a H para todo $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 5

Sea G un grupo, y H un subgrupo de G . Demuestra que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) $gH = Hg$ para todo $g \in G$.
- (b) $gHg^{-1} \subset H$ para todo $g \in G$.
- (c) $gHg^{-1} = H$ para todo $g \in G$.

A discutir en la Ayudantía a partir del 23 de Agosto 2023