

Tarea 5**Ejercicio 20**

Sea $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Demuestra:

- (a) Sean $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$ dos elementos diferentes. El grupo alternante \mathfrak{A}_n es generado por los 3-ciclos (a, b, k) con $k \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{a, b\}$. Pista: Es suficiente, expresar todo 3-ciclo como producto de los 3-ciclos mencionados. Distingue los casos (a, u, b) , (a, u, v) , (b, u, v) y (u, v, x) para $u, v, x \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{a, b\}$.
- (b) Sea $N \triangleleft \mathfrak{A}_n$ un subgrupo normal. Si N contiene un 3-ciclo, entonces $N = \mathfrak{A}_n$. Pista: Sea (a, b, c) un 3-ciclo. Encuentra para todo $k \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{a, b\}$ una permutación $\sigma_k \in \mathfrak{A}_n$ tal que $(a, b, k) = \sigma_k(a, b, c)\sigma_k^{-1}$.
- (c) Sea ahora $n \geq 5$ y $N \triangleleft \mathfrak{A}_n$. Si $N \neq \mathfrak{A}_n$ y $\sigma \in N \setminus \{\text{Id}_n\}$ entonces $\text{Mov}(\sigma) := |\{k = 1, 2, \dots, n \mid \sigma(k) \neq k\}| \geq 5$.
- (d) El grupo \mathfrak{A}_n es simple si $n \geq 5$. Pista: Sea $N \triangleleft \mathfrak{A}_n$ un subgrupo normal no trivial. Consideremos un $\sigma \in N \setminus \{\text{Id}_n\}$ tal que $\text{Mov}(\sigma)$ sea minimal en $N \setminus \{\text{Id}_n\}$. Escribimos σ como producto de ciclos ajenos, con los ciclos mas largos primero. Por (b) y (c) solo tenemos que distinguir los siguientes casos: $\sigma = (a, b, c, d, \dots) \cdots$, $\sigma = (a, b, c)(d, e, \dots) \cdots$ y $\sigma = (a, b)(c, d)(e, f) \cdots$. Estudia $\sigma' := \tau^{-1}\sigma^{-1}\tau\sigma \in N$ con $\tau = (b, c, d)$ para llegar a una contradicción.

Ejercicio 21

Un grupo G con elemento neutro e se llama *nilpotente* si tiene una serie central inferior finita, es decir una serie familia de subgrupos

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \cdots \triangleright G_n = \{e\} \quad \text{con} \quad G_i = [G, G_{i-1}] \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Demuestra:

- (a) G es nilpotente si y solamente tiene una serie central superior finita, es decir una serie de subgrupos

$$\{e\} = Z_0 \triangleleft Z_1 \triangleleft \cdots \triangleleft Z_m = G \quad \text{con} \quad Z_i/Z_{i-1} = Z(G/Z_{i-1}) \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

- (b) Un grupo nilpotente es soluble. Cada subgrupo y cada cociente de un grupo nilpotente es nilpotente.

- (c) Cada p -grupo finito es nilpotente (p un primo).
- (d) Para cada campo \mathbb{F} y $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ el grupo multiplicativo $U_n(\mathbb{F})$ de matrices $n \times n$ unitriangulares superiores con entradas en \mathbb{F} es nilpotente.
- (e) Un grupo *finito* es nilpotente si y solamente si es producto directo de sus subgrupos de Sylow.

Ejercicio 22

Consideramos los anillos cociente $\mathbb{Z}_m := \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ para $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

- (a) Demuestra: $k + m\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_m$ es una unidad si y solamente si $\text{mcd}(k, m) = 1$.
- (b) Demuestra que el grupo de unidades \mathbb{Z}_m^* es isomorfo al grupo de automorfismos $\text{Aut}(\mathbb{Z}_m, +)$ del grupo aditivo.
- (c) Demuestra que en caso $\text{mcd}(m_1, m_2) = 1$ se tiene $\mathbb{Z}_{m_1 \cdot m_2}^* \cong \mathbb{Z}_{m_1}^* \times \mathbb{Z}_{m_2}^*$.

A discutir en la Ayudantía a partir del **29 de Octubre**.