Semestre 2024/1 Álgebra Moderna

Christof Geiss

Tarea 9

Ejercicio 34
Determina con el algoritmo de Euclides un máximo común divisor d de los polinomios $f := x^7 + x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x + 1$ y $g := x^7 - x^6 - x^5 - 5\,x^4 + 3\,x^3 + 4\,x^2 + 7\,x + 1$ en el anillo de polinomios $\mathbb{Q}[x]$. Encuentra polinomios $u, v \in \mathbb{Q}[x]$ con $u \cdot f + v \cdot g = d$.

Ejercicio 35
Considera el conjunto

$$Q := \{q \in \mathbb{Q} \mid \text{ existen } r, s \in \mathbb{Z} \text{ con } q = \frac{r}{s} \text{ y } \operatorname{mcd}(s, 30) = 1\},$$

Demuestra:

(a) Q es un subanillo de $\mathbb{Q}$.

(b) Q es un anillo de ideales principales con solo tres clases (modulo asociación) de primos.

Ejercicio 36

(a) Determina cuales de los siguientes polinomios en $\mathbb{Q}[X]$ son irreducibles: $X^4 + 1$, $X^4 + X + 1$, $X^4 - 6X^2 + 5$, $X^4 + 6X^2 + 1$, $X^5 - 10X^4 + 10X^3 - 80X^2 + 75X - 17$.

(b) Sea K un campo, $K(X, Y)$ el campo de fracciones del anillo de polinomios en dos indeterminadas $K[X, Y]$. Demuestra que $f_n := Z^n + X^2 + Y^3 \in K(X, Y)[Z]$ es irreducible para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 37
Sea R un anillo unitario. Un R-módulo (a izquierda) Q se llama *inyectivo* si para cada monomorfisomo $\iota\colon M \to N$ entre R-módulos, y cada homomorfismo $\phi\colon M \to Q$ de R-módulos, existe un único homomorfismo $\phi'\colon N \to Q$ con $\phi' \circ \iota = \phi$.

El criterio de Baer afirma, que un R-módulo Q es inyectivo si la propiedad universal en la definición se cumple para cada inclusión $\iota\colon I \to R$ de un submódulo I del módulo libre R.

(a) Sea R un dominio entero. Entonces decimos que un R-módulo M es *divisible* si para cada $m \in M$ y cada $r \in R \setminus \{0\}$ existe un $m' \in M$ con $x \cdot m' = m$. Utiliza el criterio de Baer para demostrar lo siguiente:

Si un R-módulo Q es libre de torsión y divisible, entonces Q es inyectivo.

(b) Sea R un dominio entero, entonces su campo de fracciones $\mathrm{Frac}(R)$ es inyectivo como R-módulo.

(c) Sea R un dominio de ideales principales, entonces cada módulo divisible es inyectivo. En este caso también $\mathrm{Frac}(R)/R$ es un R-módulo inyectivo.

A discutir en la Ayudantía del 9 de Noviembre.