Semestre 2024/1 Álgebra Moderna

Christof Geiss

Tarea 10

Ejercicio 38
Sea K un campo, y $\mathbf{m} := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, K)$. Demuestra:

(a) $R := \{\mathbf{x} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, K) \mid \mathbf{xm} = \mathbf{mx}\}$ es un subanillo conmutativo de $\mathrm{Mat}(2 \times 2, K)$.

(b) Existe un $f \in K[X]$ con $R \cong K[X]/(f)$.

(c) R es un campo para $K = \mathbb{Q}$ y $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, pero no es un campo para $K = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

Ejercicio 39
Sea K un campo, $K(X) := \mathrm{Frac}(K[X])$ el campo de funciones racionales sobre K, y $f \in K[X]$ un polinomio con $\deg(f) = n \geq 1$. Demuestra que $K(X) \supset K(f)$ es una extensión algebraica de grado n.

Ejercicio 40
Sea $L \supset K$ una extensión algebraica, y $f \in L[X]$. Demuestra:

(a) Si f es irreducible, entonces existe un único polinomio irreducible y mónico $g \in K[X]$, tal que $f \mid g$ en $L[X]$.

(b) Si f no es necesariamente irreducible y $\deg(f) \geq 1$ existe un polinomio $g \in K[X] \setminus \{0\}$ con $f \mid g$ en $L[X]$.

Ejercicio 41
El objetivo de este ejercicio es la construcción de la cerradura algebraica de un campo, siguiendo E. Artin. Para eso hay que extender el siguiente croquis: Sea k un campo y Σ el conjunto de polinomios irreducibles y mónicos en $k[X]$. Consideramos $S = k[X_f \mid_{f \in \Sigma}]$, es decir el anillo de polinomios cuyos indeterminadas estan parametrizados por los elementos de Σ. Sea $\mathfrak{a}$ el ideal de S que es generado por $\{f(X_f) \mid f \in \Sigma\}$. Demuestra que $1_S \notin \mathfrak{a}$. Utiliza el Lema de Zorn para demostrar que S tiene un ideal máximo $\mathfrak{m}$ que contiene a $\mathfrak{a}$. Demuestra que $K_1 := S/\mathfrak{m}$ es una extensión de campo de k de tal forma que todo elemento de Σ tiene un cero en K_1. Repite la construcción con K_1 en

lugar de k para obtener un campo K_2 etcétera. Demuestra que $L = \cup_{i \in \mathbb{N}} K_i$ es un campo algebraicamente cerrado. Entonces $\overline{k}$, el conjunto de los elementos de L que son algebraicos sobre k, es una cerradura algebraica de k.

A discutir en la Ayudantía a partir del 17 de Noviembre.