Introducción al Análisis Geométrico

Introducción

Este documento es la primer versión de las notas del curso de maestría de Análisis Geométrico que impartí en el Instituto de Matemáticas de la UNAM. Entre los meses de Febrero y Mayo de 2015. Fuerón escritas de manera conjunta con los estudiantes del curso:
Alejandro, Eduardo, Fernando, Gilberto, Irving y Miguel Angel.

Nos basamos en varios libros de autores destacados, sin embargo a veces es dificil llenar los detalles en diferentes temas. El objetivo de estas notas fué escribir más detalles explicitos para facilitar una segunda lectura sin tener que volver a rehacer el trabajo realizado para entender la teoría. También puede facilitar la lectura a quién estudie por primera ocasión estos temas.

Enero de 2016. Unam Juriquilla.
Gabriel R. H.

Teoremas de comparación:
Hessiano, Laplaciano, Gradiente

1 Hessiano y Laplaciano

Sea M una variedad Riemanniana completa de dimensión n. Denotamos por $\langle , \rangle$ la métrica Riemanniana, por ∇ la conexión de Levi-Civita asociada y por R el tensor de curvatura de M.
Dada una función $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2, podemos definir el Hessiano como

$$Hessf(z,w)_{|p} = \langle \nabla_Z(\nabla f), W\rangle = Z \cdot W \cdot f - \nabla_Z W \cdot f,$$

donde $p \in M$, $z, w \in T_pM$ y Z, W son cualesquiera dos campos vectoriales alrededor de p que son extensiones locales de u, v respectivamente. La definición no depende de estas extensiones.
Dado un punto $p \in M$, consideremos la función distancia $\rho : M \longrightarrow \mathbb{R}$ al punto p: $\rho(q) = d(p, q)$.

Lema 1.1. *Si $x \in M \setminus \{Cut(p)\}$ y $v \in T_xM$ entonces*

$$Hess\rho(v,v) = \int_0^r (|\nabla_{\sigma'(t)}V|^2 - \langle R(V,\sigma'(t))\sigma'(t), V\rangle)dt,$$

donde $\sigma : [0, r] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una geodésica minimizante de $p = \sigma(0)$ a $x = \sigma(r)$ y V es un campo de Jacobi a lo largo de σ tal que $V(p) = 0, V(x) = v$, $[V, \sigma'] = 0$.

Proof. $Hess\rho(v,v) = \langle V, \nabla_V(\nabla\rho)\rangle = \langle V, \nabla_V(\sigma')\rangle = \langle V, \nabla_{\sigma'}V\rangle$.
Como se puede observar, en los cálculos de arriba usamos la igualdad $\nabla\rho_{|\sigma} = \sigma'$. Ya que estamos suponiendo que $|\sigma'| = 1$ en $[0, r]$ y como es minimizante es ortogonal a las hipersuperficies de nivel de ρ. La funcion distancia ρ también es ortogonal a sus hipersuperficies de nivel y $|\nabla\rho| = 1$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} Hess\rho(v,v) &= \int_0^r \frac{d}{dt}(\langle V, \nabla_{\sigma'}V\rangle)dt \\ &= \int_0^r(\langle \nabla_{\sigma'}V, \nabla_{\sigma'}V\rangle + \langle V, \nabla_{\sigma'}\nabla_{\sigma'}V\rangle)dt. \end{aligned}$$

Además, como V es campo de Jacobi se cumple que $\nabla_{\sigma'}\nabla_{\sigma'}V+R(V,\sigma)\sigma = 0$.
Entonces,

$$Hess\rho(v,v) = \int_0^r (|\nabla_{\sigma'}V|^2 - \langle R(V,\sigma')\sigma', V\rangle)dt.$$

□

Teorema 1.1. *Sean M_1, M_2 dos variedades Riemannianas completas de dimensión n. Para $i = 1,2$, sea*

- $\gamma_i : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ *geodésica parametrizada por longitud de arco tal que* $\gamma_i([0,a]) \subset M \setminus \{Cut(\gamma_i(0))\}$.
- $\rho_i : M_i \longrightarrow \mathbb{R}$ *la función distancia al punto* $\gamma_i(0)$.
- K_i *la curvatura seccional de* M_i.

Supongamos que para cualquier $t \in [0,a]$ y cualquier vector $v_i \in T_{\gamma(t)}M$ ortogonal a $\gamma_i'(t)$ con $|v_i| = 1$,

$$K_1(v_1, \gamma_1'(t)) \geq K_2(v_2, \gamma_2'(t))$$

en $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$ respectivamente. Entonces, en $\gamma_i(a)$

$$Hess\rho_1(w_1,w_1) \leq Hess\rho_2(w_2,w_2),$$

para todo $w_i \in T_{\gamma_i(a)}M$ ortogonal $\gamma_i'(a)$ con $|w_i| = 1$.

Proof. Sean $E_1^2, \cdots, E_n^2$ campos paralelos a lo largo de γ_i con

$$E_n^2(\gamma(t)) := \gamma_2'(t).$$

Por el Lema 1.1,

$$Hess\rho_i(w_i,w_i) = \int_0^r (|\nabla_{\sigma_i'(t)}V_i|^2 - \langle R(V_i,\sigma_i'(t))\sigma_i'(t), V_i\rangle)dt,$$

donde V_i es un campo de Jacobi a lo largo de γ_i con $V_i(\gamma_i(0)) = 0$ y $V_i(\gamma_i(a)) = w_i$.
Por el lema de Gauss, $0 = \langle v_2, \gamma_2'(0)\rangle = \langle V_2(t), \gamma_2'(t)\rangle = \langle V_2(t), E_n^2(\gamma(t))\rangle$.

Esto prueba que V_2 es ortogonal a E_n^2 a lo largo de γ_2.
En particular, V_2 se puede representar como

$$V_2 = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j(t) E_j^2.$$

Ahora pedimos la siguiente condición inicial en $t = a$: Definimos $E_n^1(\gamma(t)) := \gamma_1'(t)$, $\{E_1^1(\gamma_1(a)), \cdots, E_{n-1}^1(\gamma_1(a))\}$ tal que

$$w_1 = V_1(a) = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j(a) E_j^1(\gamma_1(a)).$$

Y extendemos estos vectores a campos paralelos a lo largo de γ_1. Analogamente al caso anterior, V_1 es ortogonal a E_n^1 a lo largo de γ_1.
Definimos el campo vectorial Z a lo largo de γ_1:

$$Z = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j(t) E_j^1.$$

En consecuencia,

$$Z(0) = V_1(0), Z(a) = V_1(a), |Z| = |V_2|.$$

Además,

$$|\nabla_{\gamma_2'} V_2| = |\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j'(t) E_j^2| = |\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j'(t) E_j^1| = |\nabla_{\gamma_1'} Z|.$$

Ahora usamos la propiedad de que los campos de Jacobi minimizan la forma del indice para campos vectoriales:

$$\begin{array}{rcl} Hess\rho_1(w_1, w_1) & = & Hess\rho_1(V_1(a), V_1(a)) = I_0^a(V_1) \leq I_0^a(Z) \\ & = & \int_0^a (|\nabla_{\sigma_1'(t)} Z|^2 - \langle R(Z, \sigma_1'(t))\sigma_1'(t), Z\rangle) dt \\ & = & \int_0^a (|\nabla_{\gamma_2'} V_2|^2 - K_1(Z, \gamma_1')) dt \\ & \leq & \int_0^a (|\nabla_{\gamma_2'} V_2|^2 - K_2(V_2, \gamma_2')) dt \\ & = & Hess\rho_2(w_2, w_2). \end{array}$$

$\square$

Corolario 1.1. *Sea M una variedad riemanniana completa de dimensión n con $Ric \geq -(n-1)k^2, (k \geq 0)$. Sea N un espacio de curvatura seccional constante $-k^2$ simplemente conexo de dimensión n. Sean ρ_M, ρ_N las funciones distancia (con respecto a algunos puntos fijos) de M y N respectivamente. Si $x \in M$ y ρ_M es diferenciable en x, entonces para cuaquier $y \in N$ con $\rho_N(y) = \rho_M(x)$*

$$\triangle \rho_M(x) \leq \triangle \rho_N(y).$$

Proof. □

Lema 1.2. *La solución de la ecuación diferencial $f''(t) = k^2 f(t)$ con condición inicial $f(0) = 0$, $f(p) = 1$ esta dada por*

$$f(t) = \frac{\sinh(kt)}{\sinh(k\rho)}.$$

Proof. La solución general es: $f(t) = ae^{kt} + be^{-kt}$.
La condición inicial implica que, $0 = f(0) = a + b$ y entonces $b = -a$. Es decir, $f(t) = a(e^{kt} - e^{-kt})$. Además, $1 = f(\rho) = a(e^{k\rho} - e^{-k\rho})$. Despejando, $a = \frac{1}{e^{k\rho} - e^{-k\rho}}$. Finalmente,

$$f(t) = \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{e^{k\rho} - e^{-k\rho}} = \frac{\sinh(kt)}{\sinh(k\rho)}.$$

□

Lema 1.3. *Sea M una variedad riemanniana completa, de dimensón n, simplemente conexa y de curvature seccional constante $-k^2$. Sea $\gamma : [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ una geodésica minimizante en M que pasa por $p = \gamma(a) \in M$ y sea X un campo paralelo a lo largo de γ tal que $\langle X(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0, X(\gamma(0)) = 0, X(a) = 0$. Entonces el campo de Jacobi a lo largo de γ con condiciones iniciales $Y(0) = 0$ y $Y(p) = X(p)$ es de la forma $Y(\gamma(t)) = f(t)X(\gamma(t))$, donde f satisface la ecuación diferencial*

$$f''(t) - k^2 f(t) = 0$$

con condición inicial $f(0) = 0$ y $f(a) = 1$.

Proof. El campo Y debe satisfacer la ecuación de Jacobi:

$$\nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} Y + R(Y, \gamma')\gamma' = 0.$$

Ahora usamos la hipótesis de que M tiene curvatura seccional constante $-k^2$.

$$R(Y,\gamma')\gamma' = fR(X,\gamma')\gamma' = -k^2 f(X - \langle X,\gamma'\rangle\gamma') = -k^2 fX,$$

$$\nabla_{\gamma'}\nabla_{\gamma'}Y = f''(t)X.$$

Por lo tanto, $(f''(t)-k^2f(t))X=0$. Como X es paralelo tenemos que f debe ser solución de la ecuación diferencial. Además Y debe cumplir la condición inicial:

$$0 = Y(\gamma(0)) = f(0)X(\gamma(0)), \quad 0 = Y(\gamma(a)) = f(a)X(\gamma(a)) = f(a)Y(\gamma(a)),$$

es decir $f(0)=0$ y $f(a)=1$. □

Como aplicación de campos de Jacobi se puede calcular el laplaciano de la función distancia en curvatura constante.

Proposición 1.1. *Sea M una variedad riemanniana completa, de dimensón n, simplemente conexa y de curvature seccional constante $-k^2$. El laplaciano de la función distancia $\rho : M \longrightarrow \mathbb{R}$ en M a un punto p esta dado por*

$$\triangle\rho = (n-1)k\coth(k\rho).$$

Proof. Por el Lema 1.1,

$$Hess\rho(v,v) = \int_0^a (|\nabla_{\gamma'(t)}V|^2 - \langle R(V,\gamma'(t))\gamma'(t),V\rangle)dt,$$

donde V es un campo de Jacobi a lo largo de la geodésica minimizante $\gamma : [0,a] \longrightarrow M$ tal que $p=\gamma(0)$, $V(\gamma(0))=0$ y $V(\gamma(a)) = v \in T_{\gamma(a)}M$. Esto muestra que para calcular el laplaciano necesitamos construir campos de Jacobi a lo largo de γ que cumplan las condiciones iniciales anteriores para alguna base ortonormal de vectores para poder tomar la traza del Hessiano en cualquier punto.
Sea $v \in T_{\gamma(a)}M$ tal que $\langle v,\gamma'(a)\rangle = 0$. Sea $X : [0,a] \longrightarrow TM$ el campo paralelo a lo largo de γ que extiende a v. Por los Lemas 1.3 y 1.2, sabemos que

$$Y = f(t)X, \text{ donde } f(t) := \frac{\sinh(kt)}{\sinh(k\rho(\gamma(t)))}.$$

Si $\{\gamma', X_1(a), \cdots, X_{n-1}(a)\}$ es una base ortonormal de $T_{\gamma(a)}M$ y son paralelos a lo largo de γ entonces $V_i = f(t)X_i$ es el campo de Jacobi con $V_i(a) =$

$X_i(a) = v_i$.
Ahora tenemos los ingredientes para calcular el laplaciano:

$$\begin{array}{rcc}
\triangle\rho & = & \sum_{i=1}^{n-1} Hess\rho(v_i, v_i) \\
& = & \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^a (|\nabla_{\gamma'(t)} V_i|^2 - \langle R(V_i, \gamma'(t))\gamma'(t), V_i\rangle)dt \\
& = & \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^a (|f'(t)X_i|^2 - (\langle -k^2 f^2(t)X_i, X_i\rangle)dt \\
& = & (n-1)\int_0^a (|f'(t)|^2 + k^2 f^2(t))dt \\
& = & (n-1)\int_0^a k^2 \frac{\cosh^2(kt)}{\sinh^2(k\rho)}dt + (n-1)\int_0^a k^2 \frac{\sinh^2(kt)}{\sinh^2(k\rho)}dt \\
& = & \frac{(n-1)k^2}{\sinh^2(k\rho)}(\int_0^a \cosh^2(kt)dt + \int_0^a \sinh^2(kt))dt \\
& = & \frac{(n-1)k^2}{\sinh^2(k\rho)}(\int_0^a (2\sinh^2(kt) + 1)dt \\
& = & \frac{(n-1)k^2}{\sinh^2(k\rho)}[(-t + \frac{\sinh(2kt)}{2k})|_0^a + t|_0^a] \\
& = & \frac{(n-1)k^2}{\sinh^2(k\rho)}\frac{\sinh(2ka)}{2k} = \frac{(n-1)k}{2\sinh^2(k\rho)} 2\cosh(ka)\sinh(ka) \\
& = & (n-1)k\frac{\cosh(k\rho)}{\sinh(k\rho)} = (n-1)k\coth(k\rho).
\end{array}$$

Donde usamos las igualdades: $f'(t) = k^2 \frac{\cosh^2(kt)}{\sinh^2(k\rho)}$. Además se uso la igualdad: $Hess\rho(\gamma', \gamma') = 0$. □

Observación 1.1. *Nótese que la anterior fórmula para el laplaciano es válida para $k \neq 0$. Cuando $k = 0$, tenemos que $M = \mathbb{R}^n$ y aqui podemos hacer un cáculo directo: La función distancia al punto $p = (b_1, \cdots, b_n)$ es $\rho(x) = \sqrt{(x_1 - b_1)^2 + \cdots + (x_n - b_n)^2}$. Entonces, es un ejercicio probar que*

$$\triangle\rho = n - 1.$$

Aprovechando el ejemplo, se puede ver que $|\nabla\rho| = 1$. Es decir, ρ es eikonal.

2 Estimación del Gradiente

....en proceso

3 Desigualdades: Isoperimétrica vs Sobolev

Desigualdad de Sobolev
Sea M una variedad riemanniana compacta con frontera de dimensión n. Entonces existe una constante C tal que

$$C\left(\int_M f^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \int_M |\nabla f|, \tag{1}$$

para todo $f \in H$.

Desigualdad Isoperimétrica
Sea M una variedad Riemanniana de dimensión n. Sea Ω un dominio con cerradura compacta en M. Entonces existe una constante C independiente de Ω tal que

$$C(Vol(\Omega))^{\frac{n-1}{n}} \leq Vol(\partial\Omega). \tag{2}$$

Observación 3.1. *Cuando $M = \mathbb{R}^n$ la desigualdad isoperimétrica es*

$$(Vol(\Omega))^{\frac{n-1}{n}} \leq Vol(\partial\Omega).$$

Fórmula de Co-Area

Lema 3.1. *Sea M una variedad Riemanniana compacta con frontera. Entonces para cualquier función medible $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$*

$$\int_M g = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{\{f=\sigma\}} \frac{g}{|\nabla f|}\right) d\sigma.$$

Proposición 3.1. *La desigualdad de Sobolev es equivalente a la desigualdad isoperimétrica.*

Proof. Sobolev implica Isoperimétrica:
Definimos $\partial\Omega^\epsilon = \{\ x \in \Omega|\ d(x, \partial\Omega) \leq \epsilon\}$. Consideremos la función

$$f_\epsilon = \begin{cases} 1 & x \in \Omega \setminus \partial\Omega^\epsilon \\ \frac{d(x,\partial\Omega)}{\epsilon} & x \in \partial\Omega^\epsilon \\ 0 & x \in M \setminus \Omega. \end{cases}$$

Vamos a aplicar la desigualdad de Sobolev a esta función f_ϵ. Necesitamos la norma de su gradiente

$$|\nabla f_\epsilon| = \begin{cases} 0 & x \in \Omega \setminus \partial\Omega^\epsilon \\ \frac{1}{\epsilon} & x \in \partial\Omega^\epsilon \\ 0 & x \in M \setminus \Omega. \end{cases}$$

Por la desigualdad de Sobolev

$$\begin{aligned} & C\left(Vol(\Omega \setminus \partial\Omega^\epsilon) + \textstyle\int_{\partial\Omega^\epsilon}\left(\frac{d(x,\partial\Omega)}{\epsilon}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \\ = & \quad C\left(\textstyle\int_{\Omega\setminus\partial\Omega^\epsilon} 1 + \int_{\partial\Omega^\epsilon}\left(\frac{d(x,\partial\Omega)}{\epsilon}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \\ = & \quad C\left(\textstyle\int_M f_\epsilon^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \int_M |\nabla f_\epsilon| = \int_{\partial\Omega^\epsilon} \frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} Vol(\partial\Omega^\epsilon). \end{aligned}$$

Finalmente, tomamos el limite cuando $\epsilon \to 0$:

$$Vol(\Omega \setminus \partial\Omega^\epsilon) \to Vol(\Omega),\ \frac{1}{\epsilon} Vol(\partial\Omega^\epsilon) \to Vol(\partial\Omega),\ Vol(\partial\Omega^\epsilon) \to 0.$$

Además, como $\frac{d(x,\partial\Omega)}{\epsilon} \leq 1$

$$\int_{\partial\Omega^\epsilon}\left(\frac{d(x,\partial\Omega)}{\epsilon}\right)^{\frac{n}{n-1}} \leq Vol(\partial\Omega^\epsilon).$$

Esto prueba que la desigualdad de arriba converge a

$$C(Vol(\Omega))^{\frac{n-1}{n}} \leq Vol(\partial\Omega)$$

cuando $\epsilon \to 0$.

Desigualdad Isoperimétrica implica Desigualdad de Sobolev:
Por la fórmula de coarea si $f \geq 0$,

$$\int_M |\nabla f| = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{\{f=\sigma\}} 1\right) d\sigma = \int_0^\infty Area(\partial\Omega_\sigma),$$

donde $\Omega_\sigma = \{x \in M |\ f(x) > \sigma\}$. Por la desigualdad isoperimétrica aplicada a Ω_σ.

$$\int_0^\infty Area(\partial\Omega_\sigma) d\sigma \geq C \int_0^\infty Vol(\Omega_\sigma)^{\frac{n-1}{n}} d\sigma.$$

En consecuencia:

$$\int_M |\nabla f| = C\int_0^\infty Vol(\Omega_\sigma)^{\frac{n-1}{n}}d\sigma.$$

Por otro lado,

$$\int_M |f|^{\frac{n}{n-1}} = \int_0^\infty Vol(f^{\frac{n}{n-1}} > \lambda)d\lambda = \frac{n}{n-1}\int_0^\infty Vol(\Omega_\sigma)\sigma^{\frac{1}{n-1}}d\sigma.$$

Para deducir la desigualdad de Sobolev basta probar que

$$\int_0^\infty Vol(\Omega_\sigma)^{\frac{n-1}{n}}d\sigma \geq C\left(\int_0^\infty Vol(\Omega_\sigma)\sigma^{\frac{1}{n-1}}d\sigma\right)^{\frac{n-1}{n}},$$

para alguna constante C. Para establecer la anterior desigualdad procedemos como sigue: Consideremos las funciones

$$\begin{array}{rcl} F(\sigma) & = & Vol(\Omega_\sigma), \\ \varphi(t) & = & \int_0^t (F(\sigma))^{\frac{n-1}{n}}, \\ \psi(t) & = & \left(\int_0^t F(\sigma)\sigma^{\frac{1}{n-1}}d\sigma\right)^{\frac{n-1}{n}}. \end{array}$$

Observesé que $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$ y que F es monotona decreciente ya que $\Omega_{\sigma_2} \subset \Omega_{\sigma_1}$ cuando $\sigma_1 \leq \sigma_2$.
Afirmación:

$$\varphi'(t) \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\psi'(t). \tag{3}$$

Como F es decreciente, $F(\sigma) > F(t)$ para todo $\sigma \in [0,t]$. Entonces

$$\begin{array}{rcl} & & F(\sigma)\sigma^{\frac{1}{n-1}} > F(t)\sigma^{\frac{1}{n-1}} \\ \int_0^t F(\sigma)\sigma^{\frac{1}{n-1}} & > & \int_0^t F(t)\sigma^{\frac{1}{n-1}} = F(t)\int_0^t \sigma^{\frac{1}{n-1}} \\ & = & \frac{n-1}{n}F(\sigma)\sigma^{\frac{n}{n-1}}|_0^t = \frac{n-1}{n}F(t)t^{\frac{n}{n-1}}. \end{array}$$

Por el teorema fundamental del cálculo

$$\begin{array}{rcl} \varphi'(t) & = & (F(t))^{\frac{n-1}{n}}, \\ \psi'(t) & = & \frac{n-1}{n}F(t)t^{\frac{1}{n-1}}\left(\int_0^t F(\sigma)\sigma^{\frac{1}{n-1}}d\sigma\right)^{\frac{-1}{n}} \\ & < & \frac{n-1}{n}F(t)t^{\frac{1}{n-1}}\left(\frac{n-1}{n}F(t)t^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{-1}{n}} \\ & = & \frac{n-1}{n}F(t)t^{\frac{1}{n-1}}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{-1}{n}}F(t)^{\frac{-1}{n}}t^{\frac{-1}{n-1}} \\ & = & \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n-1}{n}}F(t)^{\frac{n-1}{n}}. \end{array}$$

Esto prueba la afirmación:

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} \psi'(t) < F(t)^{\frac{n-1}{n}} = \varphi'(t).$$

Para obtener la desigualdad de Sobolev hay que integrar de ambos lados $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} \psi(\infty) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} \int_0^\infty \psi'(t)dt < \int_0^\infty \varphi'(t)dt = \varphi(\infty)$. Como

$$\psi(\infty) = \left(\int_0^\infty Vol(\Omega_\sigma)\sigma^{\frac{1}{n-1}} d\sigma\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

y

$$\varphi(\infty) = \int_0^\infty (Vol(\Omega_\sigma))^{\frac{n-1}{n}}$$

hemos probado la afirmación (3). $\square$

4 Constante de Cheeger

Definición 4.1. Cheeger
Sea M una variedad Riemanniana compacta. Si $\partial M \neq \emptyset$ definimos

$$h_D(M) = inf\left\{\frac{Vol(\partial\Omega)}{Vol(\Omega)} |\ \Omega \subset M\right\}.$$

Lema 4.1. *Sea $\mu > 0$ tal que para toda $\varphi \in C^\infty(M)$ con $\varphi_{|\partial M} = 0$ se satisface la desigualdad*

$$\int_M |\nabla\varphi| \geq \mu \int_M |\varphi|.$$

Entonces

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{4}\mu^2.$$

Proof. Sea f una función propia del primer valor propio λ_1 del problema de Dirichlet. Es decir, $\triangle f = -\lambda_1 f$ y $f_{\partial M} = 0$. Multiplicando de ambos lados por f e integrando:

$$\int_M f\triangle f = -\lambda_1 \int_M f^2.$$

Como f se anula en ∂M, la integración por partes implica

$$\int_M |\nabla f|^2 = -\int_M f\triangle f = \lambda_1 \int_M f^2. \tag{4}$$

Sea $\varphi = f^2$. Tenemos que $\nabla\varphi = \nabla f^2 = 2f\nabla f$. Por la hipótesis:

$$2\left(\int_M f^2\right)^{1/2}\left(\int_M |\nabla f|^2\right)^{1/2} \geq 2\int_M |f||\nabla f| = \int_M |\nabla f^2| \geq \mu \int_M f^2.$$

Ahora sustituimos la igualdad (4)

$$2\left(\int_M f^2\right)^{1/2}\left(\lambda_1 \int_M f^2\right)^{1/2} \geq \int_M |\nabla f^2| \geq \mu \int_M f^2.$$

Por lo tanto,

$$2\lambda_1^{1/2} \geq \mu.$$

□

Teorema 4.1. (Cheeger)
Sea M una variedad Riemanniana compacta. Entonces $\lambda_1 \geq \frac{1}{4}h_D^2$.

Proof. Vamos a probar que $h_D(M)$ satisface las hipótesis del Lema 4.1. Definimos $M_\sigma := \{x \in M |\ f(x) \geq \sigma\}$. Por la fórmula de coarea

$$\begin{array}{rcc}
\int_M |\nabla\varphi| & = & \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{\partial M_\sigma} 1\right) d\sigma \\
& = & \int_{-\infty}^{\infty} Area(\partial M_\sigma) d\sigma \\
& = & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Area(\partial M_\sigma)}{Vol(M_\sigma)} Vol(M_\sigma) d\sigma \\
& \geq & inf_\sigma \frac{Area(\partial M_\sigma)}{Vol(M_\sigma)} \int_{-\infty}^{\infty} Vol(M_\sigma) d\sigma \\
& = & inf_\sigma \frac{Area(\partial M_\sigma)}{Vol(M_\sigma)} \int_M |\varphi| \\
& \geq & h_D(M) \int_M |\varphi|.
\end{array}$$

Como $h_D(M)$ cumple la misma hipótesis del Lema 4.1 que cumpia μ, podemos concluir la desigualdad

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{4} h_D(M)^2.$$

□

5 Fórmula de Reilly (Introducción)

Lema 5.1. Sean $\{x^1, \cdots, x^m\}$ las coordenadas usuales de $\mathbb{R}^m$, X el vector posición y Y cualquier campo C^∞. Entonces:

$$D_Y X = Y \text{ ; donde } D \text{ es la conexin usual de } \mathbb{R}^m.$$

Proof. La prueba se hace computando directamente el valor de $D_Y X$ para cualquier campo Y diferenciable. Siendo así, $X = x^\beta \partial_\beta$ en la base usual de $\mathbb{R}^m$ y, $Y = Y^\gamma \partial_\gamma$. Entonces:

$$\begin{aligned} D_Y X &= Y x^\beta \partial_\beta = Y^\gamma (\partial_\gamma x^\beta) \partial_\beta \\ &= Y^\beta \partial_\beta = Y \end{aligned}$$

□

Teorema 5.1. Sean $\{x^1, \cdots, x^m\}$ las coordenadas usuales de $\mathbb{R}^{\gtrdot}$ y X el vector posición. Entonces, si M es una subvariedad de $\mathbb{R}^{\gtrdot}$ con la métrica inducida y se denota por II y H a la segunda forma fundamental y al vector de curvatura media de M se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}_M X &= II \\ \Delta_M X &= -nH \end{aligned}$$

Proof. Para esta demostracin calcularé de manera explicita las componentes de $\mathrm{Hess}_M x^k$ usando que $x^k = \langle X, e_k \rangle$, donde $\{e_i\}$ es la base usual. Para distinguir, denotaré D la conexin de $\mathbb{R}^m$ y ∇ a la conexin de M. Sea $\{E_i\}$ un marco ortonormal en M y usando el Lema 60 se tiene:

$$\begin{aligned} (\mathrm{Hess}_M x^k)_{ij} &= E_i E_j \langle X, e_k \rangle - (\nabla_{E_\beta} E_\beta) \langle X, e_k \rangle \\ &= E_i \langle D_{E_j} X, e_k \rangle - \langle D_{\nabla_{E_i} E_j} X, e_k \rangle \\ &= E_i \langle X, e_k \rangle - \langle \nabla_{E_i} E_j, e_k \rangle \\ &= \langle \nabla_{E_i} E_j + II(E_i, E_j), e_k \rangle - \langle \nabla_{E_i} E_j, e_k \rangle \\ &= \langle II(E_i, E_j), e_k \rangle \end{aligned}$$

Como $(\mathrm{Hess}_M X)_{ij} = (\mathrm{Hess}_M x^k)_{ij} e_k = \langle II(E_i, E_j), e_k \rangle e_k$, se tiene finalmente que:

$$\mathrm{Hess}_M X = II \ .$$

Y como el Laplaciano se define como $-\mathrm{tr}(\mathrm{Hess})$ se obtiene el resultado buscado.

□

Es claro con esto que tanto el Hessiano de X como su Laplaciano se definen en sus coordenadas, y el siguiente corolario no necesita demostración.

Corolario 5.1. Una subvariedad M de $\mathbb{R}^m$ es mínima si y sólo si sus funciones coordenadas son armónicas.

Si además consideramos a las subvariedades sin frontera, usando el principio del máximo se tiene que las únicas subvariedades de $\mathbb{R}^m$ mínimas compactas son puntos aislados.

Teorema 5.2. Sea M^m una subvariedad de la esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. M es mínima si y sólo si todas las funciones coordenadas de S^n son eigenfunciones de M tal que:

$$\Delta_M X = -mX. \tag{5}$$

Proof. Tomando a S^n como subvariedad de $\mathbb{R}^{n+1}$, por el Teorema 61 se tiene que:

$$\begin{aligned}(\mathrm{Hess}_{S^n} X)_{ij} &= II_{ij}, \\ &= \delta_{ij} X,\end{aligned}$$

ya que X es unitario en S^n y normal a esta; adems, la esfera es una superficie umbílica con curvaturas principales unitarias.

Sea $\{E_i\}$ un marco ortonormal en M. Entonces:

$$\begin{aligned}(\mathrm{Hess}_{S^n} x^k)_{ij} &= E_i E_j x^k - \nabla_{E_i} E_j x^k \\ &= E_i E_j x^k - \tilde{\nabla}_{E_i} E_j x^k - II(E_i, E_j) x^k \\ &= (\mathrm{Hess}_M x^k)_{ij} - II(E_i, E_j) x^k\end{aligned}$$

Conociendo ya el Hessiano de las funciones coordenadas en S^n y notando que el último término de la ecuación pasada es la k-ésima coordenada de la segunda forma fundamental de M se obtiene:

$$\delta_{ij} X = (\mathrm{Hess}_M X)_{ij} - (II_M)_{ij}.$$

Multiplicando por -1 y obteniendo la traza sobre M de la expresión se obtiene finalmente:

$$-mX = \Delta_M X + H_M.$$

Si M es una subvariedad mínima se cumple la ecuación (5) y las coordenadas de $\mathbb{R}^{n+1}$ son eigenfunciones de M. Por otro lado, si se cumple la ecuación (5) resulta que $H_M = 0$ y M es mínima.

$\square$

6 Teorema de Reilly

Teorema 1. *Sea D una variedad de dimensión m+1 cuya frontera esta dada por una variedad C^∞, m-dimensional M. Supongamos que f es una función definida en D que satisface.*

$$\triangle f = g \ \ en \ D$$

y

$$f = u \ \ en \ M$$

Entonces

$$\frac{m}{m+1}\int_D g^2 \geq \int_M H f_v^2 + 2\int_M f_v \triangle_M u + \int_M \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} h_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta + \int_D R_{ij} f_i f_j \quad (6)$$

Donde H y $h_{\alpha\beta}$ denotan la curva media y la segunda forma fundamental de M con respecto al vector unitario nomal exterior ν, $\triangle_M$ es el laplaciano en M y R_{ij} es la curvatura de Ricci de D. Más aún la igualdad se satisface si y solo si

$$f_{ij} = \frac{g\delta_{ij}}{m+1}$$

Proof. Por la fórmula de Bochner tenemos que

$$\tfrac{1}{2}\triangle|\nabla f|^2 = f_{ij}^2 + < \nabla f, \nabla g > + R_{ij} f_i f_j$$

Usando la desigualdad

$$\sum_{i,j=1}^{m+1} f_{ij}^2 \geq \frac{(\sum_{i=1}^{m+1} f_{ii})^2}{m+1} = \frac{(\triangle f)^2}{m+1} = \frac{g^2}{m+1}$$

Tememos que

$$\frac{1}{2}\triangle|\nabla f|^2 \geq \frac{g^2}{m+1} + < \nabla f, \nabla g > + R_{ij} f_i f_j$$

Integrando la desigualdad anterior sobre D

$$\frac{1}{2}\int\limits_D \triangle|\nabla f|^2 \geq \frac{1}{m+1}\int\limits_D g^2 + \int\limits_D < \nabla f, \nabla g > + \int\limits_D R_{ij} f_i f_j \tag{7}$$

Integramos por partes

$$\int\limits_D < \nabla f, \nabla g >= -\int\limits_D g\triangle f + \int\limits_M g f_v = -\int\limits_D g^2 + \int\limits_M g f_v$$

Donde v es el vector normal unitario exterior a M. Así (2) se convierte en

$$\frac{1}{2}\int\limits_D \triangle|\nabla f|^2 \geq -\frac{m}{m+1}\int\limits_D g^2 + \int\limits_M g f_v + \int\limits_D R_{ij} f_i f_j \tag{8}$$

Por otro lado, sea $e_1, e_2, ..., e_{m+1}$ un marco ortonormal cerca de la frontera de D tal que $e_1, e_2, ..., e_m$ son tangentes a M, $v = e_{m+1}$ y además $\nabla_{e_{m+1}} e_{m+1} = 0$.

Como $\nabla f = \sum_{i=1}^{m+1}(e_i f)e_i$ entonces $|\nabla|^2 =< \nabla f, \nabla f >= \sum_{i=1}^{m+1}(e_i f)^2$. De aquí y por el Teorema de la Divergencia obtenemos

$$\frac{1}{2}\int\limits_D \triangle|\nabla f|^2 = \frac{1}{2}\int\limits_D div(\nabla(|\nabla f|^2)) = \frac{1}{2}\int\limits_M < \nabla(|\nabla f|^2, e_{m+1} >$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_M e_{m+1}(\sum_{i=1}^{m+1}((e_i f)_2) = \int\limits_M \sum_{i=1}^{m+1}(e_i f)(e_{m+1} e_i f)$$

Pero

$$\sum_{i=1}^{m+1}(e_i f)(e_{m+1} e_i f) = (e_{m+1} f)(e_{m+1} e_{m+1} f) + \sum_{\alpha=1}^{m}(e_\alpha f)(e_{m+1} e_\alpha f)$$

$$= (e_{m+1}f)(\triangle f - \sum_{\alpha=1}^{m} f_{\alpha\alpha}) + \sum_{\alpha=1}^{m}(e_\alpha f)(e_{m+1}e_\alpha f)$$

$$= f_v(g - Hf_v - \triangle_M u) + \sum_{\alpha=1}^{m}(e_\alpha f)(e_{m+1}e_\alpha f)$$

Pues

$$f_{\alpha\alpha} = e_\alpha e_\alpha f - \nabla_{e_\alpha} e_\alpha f = e_\alpha e_\alpha f - (\nabla_{e_\alpha} e_\alpha f + Hf)$$
$$= (e_\alpha e_\alpha f - \nabla_{e_\alpha} e_\alpha f) + Hf_v = \triangle_M u + Hf_v$$

Pero

$$e_{m+1}e_\alpha f = e_\alpha e_{m+1} f + \nabla_{e_{m+1}} e_\alpha f - \nabla_{e_\alpha} e_{m+1} f$$

$$= e_\alpha e_{m+1} f + \sum_{\beta=1}^{m} < \nabla_{e_{m+1}} e_\alpha, e_\beta > f_\beta - \sum_{\beta=1}^{m} < \nabla_{e_\alpha} e_{m+1}, e_\beta > f_\beta$$

Ya que

$$< \nabla_{e_{m+1}} e_\alpha, e_{m+1} >= - < e_\alpha, \nabla_{e_{m+1}} e_{m+1} >= 0$$

y

$$< \nabla_{e_\alpha} e_{m+1}, e_{m+1} >= \frac{1}{2} e_\alpha |e_{m+1}|^2 = 0$$

Usando lo anterior y el hecho de que $< \nabla_{e_\alpha} e_{m+1}, e_\beta >= - < e_{m+1}, \nabla_{e_\alpha} e_\beta >$ tenemos que

$$\frac{1}{2}\int_D \triangle|\nabla f|^2 = \int_M g f_v - \int_M H f_v^2 - \int_M f_v \triangle_M u$$

$$+ \int_M \sum_{\alpha=1}^{m}(e_\alpha f)(e_\alpha e_{m+1} f) + \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \int_M < \nabla_{e_{m+1}} e_\alpha, e_\beta > f_\alpha f_\beta - \int_M \sum_{\alpha,\beta=1} h_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta (4)$$

Ahora calcularemos las siguientes integrales

$$\int_M \sum_{\alpha=1}^{m}(e_\alpha f)(e_\alpha e_{m+1} f) = -\int_M \sum_{\alpha=1}^{m}(e_\alpha e_\alpha f) f_v = -\int_M \sum_{\alpha=1}^{m}(\nabla f) f_v$$

y

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \int_M < \nabla_{e_{m+1}} e_\alpha, e_\beta > f_\alpha f_\beta = -\int_M \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} < e_\alpha, \nabla_{e_{m+1}} e_\beta > f_\alpha f_\beta$$

$$= -\int_M \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} < \nabla_{e_\beta} e_\beta, e_\alpha > f_\alpha f_\beta$$

Combinando (3) y (4) tenemos que

$$-\int_M H f_v^2 - 2\int_M f_v \triangle_M u - \int_M \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} h_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta \geq -\frac{m}{m+1}\int_D g^2 + \int_D R_{ij} f_i f_j$$

De aquí se concluye (1).

Para la ultima parte. Primero supongamos que $f_{ij} = \dfrac{g\delta_{ij}}{m+1}$. Notemos que

$$\sum_{i,j}^{m+1} f_{ij}^2 = \sum_{i,j}^{m+1} (\frac{g\delta_{ij}}{m+1})^2 = \frac{g^2}{(m+1)^2} \sum_{i,j}^{m+1} \delta_{ij} = \frac{g^2}{m+1}$$

De aquí $\frac{1}{2}\triangle|\nabla f|^2 = \frac{g^2}{m+1} + < \nabla f, \nabla g > + R_{ij} f_i f_j$ lo cual implica la igualdad de (1).
Ahora la igualdad de (1) implica $\frac{1}{2}\triangle|\nabla f|^2 = \frac{g^2}{m+1} + < \nabla f, \nabla g > + R_{ij} f_i f_j$. Pero $\frac{1}{2}\triangle|\nabla f|^2 = f_{ij}^2 + < \nabla f, \nabla g > + R_{ij} f_i f_j$, entonces $\sum_{i,j=1}^{m+1} f_{ij}^2 = \frac{g^2}{m+1}$ y esto implica

$$(\sum_{i,j=1}^{m+1} f_{ii})^2 = (\sum_{i,j=1}^{m+1} f_{ij}^2)(\sum_{i,j=1}^{m+1} \delta_{ij})$$

Por desigualdad de Cauchy-Schwars existe x número real tal que $f_{ij} = x\delta_{ij}$. Pero

$$\frac{g^2}{m+1} = \sum_{ij=1}^{m+1} (x\delta_{ij})^2 = x^2 \sum_{ij=1}^{m+1} \delta_{ij} = x^2(m+1)$$

Por lo tanto $x = \dfrac{g}{m+1}$.

□

7 Teorema de Alexandrov

Lema 7.1. *Sea $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ una hipersuperficie inmersa.*
Sea $X = (X_1, \cdots, X_{m+1})$ el vector de posición de un punto en $\mathbb{R}^{m+1}$. Entonces

$$\triangle_M |X|^2 = 2\langle \triangle_M X, X\rangle + 2|\nabla_M X|^2,$$

y

$$\triangle |X|^2 = 2\langle \triangle X, X\rangle + 2|\nabla X|^2,$$

donde este último laplaciano se cálcula en $\mathbb{R}^{m+1}$.

Proof. Recordemos que $\triangle_M X = (\triangle_M X_1, \ldots, \triangle_M X_{m+1})$ y que $|\nabla_M X|^2 = \sum_{i=1}^{m+1} |\nabla_M X_i|^2$. Vamos a calcular el laplaciano de cada termino de la suma $|X|^2 = \sum_{i=1}^{m+1} X_i^2$:
$\triangle_M X_i^2 = 2X_i \triangle_M X_i + 2\langle \nabla_M X_i, \nabla_M X_i\rangle$. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \triangle_M |X|^2 & = & \sum_{i=1}^{m+1} \triangle_M X_i^2 = 2\sum_{i=1}^{m+1} X_i \triangle_M X_i + 2\sum_{i=1}^{m+1} |\nabla_M X_i|^2 \\ & = & 2\langle \triangle_M X, X\rangle + 2|\nabla_M X|^2. \end{array}$$

Analogamente el otro laplaciano. □

Lema 7.2. *Sea $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ una hipersuperficie compacta encajada. Sea ν el campo vectorial ortogonal a M orientado al exterior de M y de longitud constante uno.*
Sea $X = (X_1, \cdots, X_{m+1})$ el vector de posición de un punto en $\mathbb{R}^{m+1}$. Entonces

$$\langle \nabla |X|^2, \nu\rangle = 2\langle X, X_\nu\rangle = 2\langle X, \nu\rangle$$

y

$$|\nabla X|^2 = m + 1 \text{ y } |\nabla_M X|^2 = m.$$

donde el gradiente se cálcula en el ambiente euclidiano $\mathbb{R}^{m+1}$.

Proof. Por definición, $X_\nu = \nu \cdot X = (\nu \cdot X_1, \cdots, \nu \cdot X_{m+1})$. Además, $\nu \cdot X_i = \langle \nabla X_i, \nu\rangle = \langle E_i, \nu\rangle = \nu_i$ con $E_1, \cdots, E_{m+1}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^{m+1}$. De esta forma obtenemos que $X_\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_{m+1}) = \nu$. Esto implica que, $\langle X, X_\nu\rangle = \langle X, \nu\rangle$.
Por otro lado
$\nabla |X|^2 = \sum_{i=1}^{m+1} \nabla X_i^2 = 2\sum_{i=1}^{m+1} X_i \nabla X_i = 2\sum_{i=1}^{m+1} X_i E_i = 2X$. Esto prueba la primera parte.
Un cálculo directo: $|\nabla X|^2 = \sum_{i=1}^{m+1} |\nabla X_i|^2 = \sum_{i=1}^{m+1} |E_i|^2 = m + 1$.

Por último, aplicamos la relación $\nabla X_i = \nabla_M X_i + (\nu \cdot X_i)\nu$ de donde derivamos $|\nabla X_i|^2 = |\nabla_M X_i|^2 + (\nu \cdot X_i)^2 = |\nabla_M X_i|^2 + (\nu_i)^2$. Podemos ahora deducir que

$$\begin{array}{rcl} m+1 & = & \sum_{i=1}^{m+1} |\nabla X_i|^2 = \sum_{i=1}^{m+1} (|\nabla_M X_i|^2 + (\nu_i)^2) \\ & = & |\nabla_M X|^2 + |\nu|^2 = |\nabla_M X|^2 + 1. \end{array}$$

□

Teorema 7.1. *(Alexandrov)*
Cualquier hipersuperficie $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ compacta encajada con curvatura media constante es una esfera estandar.

Proof. Sea $H = \langle H, \nu \rangle$ la curvatura media constante de M. Vamos a probar que $H > 0$:
Sea $p \in M$ el máximo de la función $|X|^2$ en M, entonces en p

$$\nabla_M |X|^2 = 0, \triangle_M |X|^2 \leq 0.$$

Por la primera igualdad del Lema 7.1, obtenemos
$-H|X| = \langle -H, |X|\nu \rangle = \langle -H, X \rangle = \langle \triangle_M X, X \rangle \leq 0$ en p. Usamos el hecho de que X es ortogonal a M en p y por tanto es un múltiplo de ν .
Esto prueba $-H < 0$ ya que si $H = 0$ la hipersuperficie M sería compacta y mínima en $\mathbb{R}^{m+1}$ lo cual no es posible.
Como $H > 0$ podemos reescalar y suponer que $H = m$. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^{m+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función lisa que satisface

$$\triangle f = -1$$

y

$$f = 0 \text{ en } M = \partial D,$$

donde D es el dominio acotado que determina M por ser compacta sin forntera y encajada.
Por el Teorema de O'Reilly:

$$\frac{m}{m+1} V(D) = \frac{m}{m+1} \int_D (-1)^2 \geq \int_M m f_\nu^2,$$

es decir

$$V(D) \geq \int_M (m+1) f_\nu^2. \tag{9}$$

Podemos obtener tambén la siguiente desigualdad aplicando la desigualdad de Schwarz:

$$A(M)\int_M f_\nu^2 = \int_M 1\cdot\int_M f_\nu^2 \geq (\int_M f_\nu)^2 = (\int_D \triangle f)^2 = (\int_D -1)^2 = (V(D))^2. \tag{10}$$

Aqui usamos el teorema de la divergencia:
$\int_D \triangle f = \int_M \langle \nabla_M f, \nu\rangle$ y $f_\nu = \langle \nabla_M f, \nu\rangle$.
Combinando las ecuaciones (9) y (10),

$$A(M) \geq (m+1)V(D). \tag{11}$$

Recordemos el hecho que la curvatura media es $H = -\langle H,\nu\rangle\nu = -H\nu = -m\nu$. Además $\triangle X = (\triangle X_1,\ldots,\triangle X_{m+1}) = 0$. Entonces

$$\begin{array}{rcc} 0 & = & 2\int_D\langle X,\triangle X\rangle = \int_D \triangle|X|^2 - 2\int_D|\nabla X|^2 = \int_D div(\nabla|X|^2) - 2\int_D|\nabla X|^2 \\ & = & \int_M\langle\nabla|X|^2,\nu\rangle - 2\int_D|\nabla X|^2 = 2\int_M\langle X,\nu\rangle - 2\int_D(m+1) \\ & = & -\frac{2}{m}\int_M\langle X,\triangle_M X\rangle - 2(m+1)V(D) = \frac{2}{m}\int_M|\nabla_M X|^2 - 2(m+1)V(D) \\ & = & 2\int_M 1 - 2(m+1)V(D) = 2A(M) - 2(m+1)V(D), \end{array}$$

donde aplicamos la igualdad $\nu = -\frac{1}{m}\triangle_M X$ y los Lemas 7.1 y 7.2, es decir que $|\nabla X|^2 = m+1$ y $|\nabla_M|^2 = m$. También aplicamos el teorema de la divergencia en el segundo renglón de igualdades. Esto prueba que $A(M) = (m+1)V(D)$. Hemos probado que la desigualdad (11) es una igualdad. Ello implica que las desigualdades que usamos para obtener (11) son todas igualdades.
En particular, es igualdad la desigualdad (9). Que es la desigualdad del teorema de O'Reilly. Por el teorema de O'Reilly podemos concluir que en el caso de igualdad, para todo $i,j\in\{1,\cdots,m+1\}$

$$f_{ij} = \frac{g\delta_{ij}}{m+1} = -\frac{\delta_{ij}}{m+1} \tag{12}$$

en D. Ya que en nuestro caso $g=-1$. Si $i = m+1$ y $j\in\{1,\cdots,m\}$, concluimos que $f_{(m+1)j} = 0$, es decir f_{m+1} es constante en M pues sus derivadas en la dirección de M son cero.
Finalmente, consideremos un punto $q\in D$ donde f alcanza su máximo en D. Como $\triangle f = -1 < 0$, por el principio del máximo f en D alcanza su mínimo en M y sabemos que $f_{|M} = 0$. Es decir, el mínimo de f en D es cero ó dicho de manera equivalente $f\geq 0$ en D. Una consecuencia es que el máximo de f en D se alcanza en un punto interior y por definición ese punto donde se

alcanza el máximo es q. Esto prueba que q es un punto interior de D. Este punto critico de f en D es un punto aislado : ya que M es compacta y por la ecuación (12) el determinante del hessiano de f es no cero y por tanto q es no degenerado. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que $q = 0$ es el origen de $\mathbb{R}^{m+1}$. Notemos que la función

$$g = -\frac{|X|^2}{2(m+1)}$$

tiene un máximo en q con $g(q) = 0$.
Justificación: Como $g_i = -\frac{X_i}{m+1}$ entonces $\nabla g_{|a} = 0$ si y sólo si $a = 0 = q$. Es decir el origen es el único punto critico de g. Además q es máximo de g ya que $g(q) = 0$ y fuera de q, $g < 0$. Esto implica que el mínimo de $-g$ se alcanza en q.
Por otro lado, el hessiano de g esta dado por

$$g_{ij} = -\frac{\delta_{ij}}{m+1}.$$

Por lo tanto, $\triangle(f - g) = 0$ ya que sus hessianos son iguales. Así que la función $f - g$ es ármonica.
Vamos a aplicar el principio del máximo: El mínimo (ó máximo) de una función ármonica en D es igual al mínimo (ó máximo) de la función en la frontera $M = \partial D$ ó si el mínimo (ó máximo) se alcanza en un punto interior entonces la función es constante. Queremos probar que $f - g$ es constante. Si lo es no hay nada que probar. Si no es constante procedemos como sigue. Como $f = 0$ en M, entonces el mínimo (ó máximo) de $f - g$ en M se alcanzan en el mínimo (ó máximo) de $-g$ en M. Aplicando esta observación obtenemos que

$$\begin{array}{rcl} min(f-g)_D & = & min(f-g)_M = min(-g)_M \\ & \geq & min(-g)_D = max(g)_D = 0 \text{ en } q \\ min(f-g)_D & = & max(-f+g)_D = max(-f+g)_M = max(g)_M \\ & \leq & max(g)_D = 0 \text{ en } q. \end{array}$$

Esto nos permite concluir que el mínimo de $f - g$ en D es cero. Por lo tanto $f - g$ alcanza su mínimo en algún punto interior en D, ya que en la frontera $M = \partial D$ sabemos que $f - g = -g$ y $-g > 0$ en M. Pues $-g$ sólo puede valer cero en $q = 0$ y es una función positiva en todo lo demás.

Por el principio del máximo, $f - g$ es constante en D. Se sigue que $f - g$ es constante en M y por lo tanto $-g$ es constante en M. Es decir en M,

$$g = -\frac{|X|^2}{2(m+1)} = c$$

donde c es una constante. Esto concluye la prueba. $\square$

8 La Fórmula de Bochner

Sean $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ una variedad riemanniana y $f : M \to \mathbb{R}$ una función lisa. La Fórmula de Bochner expresa al laplaciano de $|\nabla f|^2$ en térmios geométricos familiares:

$$\frac{1}{2}\Delta\left(|\nabla f|^2\right) = |\mathrm{Hess} f|^2 + \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f), \tag{13}$$

en donde $\nabla f, \mathrm{Hess} f$ y $|\mathrm{Hess} f|$ denotan al gradiente, al hessiano y a la norma del hessiano de f, respectivamente. Recordemos que $\mathrm{Hess} f$ es la función $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathscr{C}^\infty(M)$ que se puede definir de cualquiera de las dos siguientes maneras equivalentes

$$\mathrm{Hess} f(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle = XYf - (\nabla_X Y)f.$$

Para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ se cumple $\mathrm{Hess} f(X, Y) = \mathrm{Hess} f(Y, X)$, es decir, el hessiano es simétrico. Si $\{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ es un marco ortonormal local de M, podemos expresar a la norma del hessiano en el dominio del marco como

$$|\mathrm{Hess} f|^2 = \sum_{i,j} \mathrm{Hess} f(E_i, E_j)^2.$$

Por otro lado, recordemos que el laplaciano es el operador $\Delta : \mathscr{C}^\infty(M) \to \mathscr{C}^\infty(M)$ dado por

$$\Delta f = \mathrm{div}(\nabla f) = \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle = \mathrm{Hess} f(E_i, E_i).$$

Prueba de la Fórmula de Bochner.

Consideraremos un punto p en M y probaremos que (13) se cumple en p. Para esto, será conveniente usar un marco ortonormal local $\{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ geodésico en p, es decir, tal que $\nabla_X E_i = 0$ en p para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Todas la expresiones que siguen estarán evaluadas en p. Si denotamos $g = |\nabla f|^2$, se tiene lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta g &= \frac{1}{2}\mathrm{Hess}g(E_i,E_i) = \frac{1}{2}(E_iE_ig - (\nabla_{E_i}E_i)g) = \frac{1}{2}E_iE_i\left\langle \nabla f, \nabla f\right\rangle \\
&= E_i\left\langle \nabla_{E_i}\nabla f, \nabla f\right\rangle = E_i\mathrm{Hess}f(E_i,\nabla f) = E_i\mathrm{Hess}f(\nabla f, E_i) \\
&= E_i\left\langle \nabla_{\nabla f}\nabla f, E_i\right\rangle = \left\langle \nabla_{E_i}\nabla_{\nabla f}\nabla f, E_i\right\rangle \\
&= \left\langle R(E_i,\nabla f)\nabla f, E_i\right\rangle + \left\langle \nabla_{\nabla f}\nabla_{E_i}\nabla f, E_i\right\rangle + \left\langle \nabla_{[E_i,\nabla f]}\nabla f, E_i\right\rangle \\
&= \mathrm{Ric}(\nabla f,\nabla f) + \left\langle \nabla_{\nabla f}\nabla_{E_i}\nabla f, E_i\right\rangle + \left\langle \nabla_{[E_i,\nabla f]}\nabla f, E_i\right\rangle .
\end{aligned} \tag{14}
$$

Ahora analizaremos por separado los dos sumandos finales del último renglón. Primero tenemos que

$$
\begin{aligned}
\left\langle \nabla_{\nabla f}\nabla_{E_i}\nabla f, E_i\right\rangle &= \nabla f\left\langle \nabla_{E_i}\nabla f, E_i\right\rangle - \left\langle \nabla_{E_i}\nabla f, \nabla_{\nabla f}E_i\right\rangle \\
&= \nabla f\left(\mathrm{Hess}f(E_i,E_i)\right) = \nabla f(\Delta f) \\
&= \left\langle \nabla f, \nabla\Delta f\right\rangle .
\end{aligned} \tag{15}
$$

Por otro lado, como $\nabla_{E_i}E_j = 0$, entonces $\mathrm{Hess}f(E_i,E_j) = E_iE_jf$ y por lo tanto se sigue que

$$
\begin{aligned}
\left\langle \nabla_{[E_i,\nabla f]}\nabla f, E_i\right\rangle &= [E_i,\nabla f]\left\langle \nabla f, E_i\right\rangle - \left\langle \nabla f, \nabla_{[E_i,\nabla f]}E_i\right\rangle = (\nabla_{E_i}\nabla f - \nabla_{\nabla f}E_i)\left\langle \nabla f, E_i\right\rangle \\
&= (\nabla_{E_i}\nabla f)\left\langle \nabla f, E_i\right\rangle = \left\langle \nabla_{\nabla_{E_i}\nabla f}\nabla f, E_i\right\rangle = \mathrm{Hess}f(\nabla_{E_i}\nabla f, E_i) \\
&= \mathrm{Hess}f(E_i,\nabla_{E_i}\nabla f) = \left\langle \nabla_{E_i}\nabla f, \nabla_{E_i}\nabla f\right\rangle = \left\langle \nabla_{E_i}(E_jfE_j), \nabla_{E_i}(E_kfE_k)\right\rangle \\
&= \left\langle E_iE_jfE_j, E_iE_kfE_k\right\rangle = \sum_{i,j}(E_iE_jf)^2 = \sum_{i,j}\mathrm{Hess}f(E_i,E_j)^2 \\
&= \left|\mathrm{Hess}f\right|^2
\end{aligned} \tag{16}
$$

Sustituyendo (63) y (55) en (61), se obtiene (13), con lo cual se concluye la prueba.

Mapeos Armónicos

9 Conexiones

Para comenzar el estudio de las conexiones necesitamos de un haz vectorial $\pi : E \longrightarrow M$ donde $(M, \langle , \rangle)$ una variedad riemanniana y E una variedad diferenciable, definimos $\Gamma(E) := \{s : M \longrightarrow E : s$ es diferenciable y $\pi \circ s = Id_M\}$ dotado con una estructura de espacio vectorial infinita y $\Gamma(TM) := \{s : M \longrightarrow TM : s$ es diferenciable y $\pi \circ s = Id_M\}$.

Definición 9.1. *Una conexión es un haz vectorial* $\pi : E \longrightarrow M$ *es un mapeo* $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ *dado como* $(X, \phi) \longmapsto \nabla(X, \phi) := \nabla_X \phi$. *que satisface las siguientes propiedades:*

- *Para* $X, Y \in \Gamma(TM), \phi \in \Gamma(E)$ *y* $f \in \Gamma(M \times \mathbb{R})$
$$\nabla_{(fX+Y)}\phi = f\nabla_X\phi + \nabla_Y\phi;$$
- *Para* $X \in \Gamma(TM)$ *y* $\phi, \psi \in \Gamma(E)$
$$\nabla_X(\phi + \psi) = \nabla_X\phi + \nabla_X\psi;$$
- *Para* $X \in \Gamma(TM), \phi \in \Gamma(E)$ *y* $f \in \Gamma(M \times \mathbb{R})$
$$\nabla_X f\phi = X(f)\phi + f\nabla_X\phi.$$

Notemos que en un punto $p \in M$, $\nabla_X\phi|_p$ solo depende del vector X_p y de la curva $\phi|\gamma(I)$ donde $\gamma : I \longrightarrow M$ es tangente a X_p en p, es decir, si $Y \in \Gamma(TM)$ y $Y_p = X_p$ entonces $\nabla_X\phi|_p = \nabla_Y\phi|_p$ y si $\psi \in \Gamma(E)$ y $\phi|\gamma(I) = \psi|\gamma(I)$ entonces $\nabla_X\phi|_p = \nabla_X\psi|_p$.

Definición 9.2. *La curvatura de la conexión se define como el mapeo* $R : \Gamma(\wedge^2 TM) \times \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ *dado como* $(X, Y, \phi) \longmapsto R(X, Y)\phi$.

Donde $R(X, Y)\phi := -\nabla_X(\nabla_Y\phi) + \nabla_Y(\nabla_X\phi) + \nabla_{[X,Y]}\phi$ y $\wedge^2 TM := \{R \in \tau^2 TM : R(X, Y) = -R(Y; X)\}$.
Ahora mostraremos que en $\Gamma(M \times \mathbb{R})$ la curvatura de la conexión es lineal en X, Y y ϕ respectivamente.

- Sean $f, g \in \Gamma(M \times \mathbb{R})$, $\phi \in \Gamma(E)$ y $X, Y \in \Gamma(TM)$ entonces;

$$\begin{aligned}
R(fX, gY)\phi &= -\nabla_{fX}(\nabla_{gY}\phi) + \nabla_{gY}(\nabla_{fX}\phi) + \nabla_{[fX,gY]}\phi. \\
&= -f\nabla_X(g\nabla_Y\phi) + g\nabla_Y(f\nabla_X\phi) + \\
&\quad \nabla_{(fg[X,Y]+fX(g)Y-gY(f)X)}\phi. \\
&= -f[X(g)\nabla_Y\phi) + g\nabla_X(\nabla_Y\phi)] + \\
&\quad g[Y(f)\nabla_X\phi) + f\nabla_Y(\nabla_X\phi)] + \\
&\quad fg\nabla_{[X,Y]} + \nabla_{fX(g)Y} - \nabla_{gY(f)X)}\phi. \\
&= -fX(g)\nabla_Y\phi) - fg\nabla_X(\nabla_Y\phi) + gY(f)\nabla_X\phi) + \\
&\quad gf\nabla_Y(\nabla_X\phi) + fg\nabla_{[X,Y]} + \nabla_{fX(g)Y} - \nabla_{gY(f)X)}\phi. \\
&= fg[-\nabla_X(\nabla_Y\phi) + \nabla_Y(\nabla_X\phi) + \nabla_{[X,Y]}]. \\
&= fgR(X,Y)\phi.
\end{aligned}$$

- Sean $\phi \in \Gamma(E)$ y $X, YeZ \in \Gamma(TM)$ entonces;

$$\begin{aligned}
R(X+Y, Z)\phi &= -\nabla_{X+Y}(\nabla_Z\phi) + \nabla_Z(\nabla_{X+Y}\phi) + \nabla_{[X+Y,Z]}\phi. \\
&= -\nabla_X(\nabla_Z\phi) - \nabla_Y(\nabla_Z\phi) + \nabla_Z(\nabla_X\phi + \nabla_Y\phi) + \\
&\quad \nabla_{[X,Z]}\phi + \nabla_{[X,Z]}\phi. \\
&= -\nabla_X(\nabla_Z\phi) - \nabla_Y(\nabla_Z\phi) + \nabla_Z(\nabla_X\phi) + \nabla_Z(\nabla_Y\phi) + \\
&\quad \nabla_{[X,Z]}\phi + \nabla_{[X,Z]}\phi. \\
&= -\nabla_X(\nabla_Z\phi) + \nabla_Z(\nabla_X\phi) + \nabla_{[X,Z]}\phi - \\
&\quad \nabla_Y(\nabla_Z\phi) + \nabla_Z(\nabla_Y\phi) + \nabla_{[X,Z]}\phi. \\
&= R(X,Z)\phi + R(Y,Z)\phi.
\end{aligned}$$

Análogamente los hacemos con la segunda entrada.

- Sean $f \in \Gamma(M \times \mathbb{R})$, $\phi \in \Gamma(E)$ y $X, Y \in \Gamma(TM)$ entonces;

$$\begin{aligned}
R(X,Y)f\phi &= -\nabla_X(\nabla_Y f\phi) + \nabla_Y(\nabla_X f\phi) + \nabla_{[X,Y]} f\phi. \\
&= -\nabla_X(Y(f)\phi + f\nabla_Y\phi) + \nabla_Y(X(f)\phi + f\nabla_X\phi) + \\
&\quad \nabla_{XY} f\phi - \nabla_{YX} f\phi. \\
&= -\nabla_X(Y(f)\phi) - \nabla_X(f\nabla_Y\phi) + \\
&\quad \nabla_Y(X(f)\phi) + \nabla_Y(f\nabla_X\phi) + \\
&\quad X(Y(f))\phi + \nabla_{XY}\phi - Y(X(f))\phi - \nabla_{YX}\phi. \\
&= -X(Y(f))\phi - Y(f)\nabla_X\phi - X(f)\nabla_Y\phi - f\nabla_X\nabla_Y\phi + \\
&\quad Y(X(f))\phi + X(f)\nabla_Y\phi + Y(f)\nabla_X\phi + f\nabla_Y\nabla_X\phi + \\
&\quad X(Y(f))\phi - Y(X(f))\phi + \nabla_{XY-YX}\phi. \\
&= -f\nabla_X\nabla_Y\phi + f\nabla_Y\nabla_X\phi + \nabla_{[X,Y]}\phi. \\
&= fR(X,Y)\phi.
\end{aligned}$$

- Sean $\phi, \psi \in \Gamma(E)$ y $X, Y \in \Gamma(TM)$ entonces;

$$\begin{aligned}
R(X,Y)f\phi &= -\nabla_X(\nabla_Y f\phi) + \nabla_Y(\nabla_X f\phi) + \\
&\quad \nabla_{[X,Y]} f\phi. \\
&= -\nabla_X(Y(f)\phi + f\nabla_Y\phi) + \\
&\quad \nabla_Y(X(f)\phi + f\nabla_X\phi) + \\
&\quad \nabla_{XY} f\phi - \nabla_{YX} f\phi. \\
&= -\nabla_X(Y(f)\phi) - \nabla_X(f\nabla_Y\phi) + \\
&\quad \nabla_Y(X(f)\phi) + \nabla_Y(f\nabla_X\phi) + \\
&\quad X(Y(f))\phi + \nabla_{XY}\phi - Y(X(f))\phi - \nabla_{YX}\phi. \\
&= -X(Y(f))\phi - Y(f)\nabla_X\phi - X(f)\nabla_Y\phi - f\nabla_X\nabla_Y\phi + \\
&\quad Y(X(f))\phi + X(f)\nabla_Y\phi + Y(f)\nabla_X\phi + f\nabla_Y\nabla_X\phi + \\
&\quad X(Y(f))\phi - Y(X(f))\phi + \nabla_{XY-YX}\phi. \\
&= -f\nabla_X\nabla_Y\phi + f\nabla_Y\nabla_X\phi + \nabla_{[X,Y]}\phi \\
&= fR(X,Y)\phi.
\end{aligned}$$

Ahora definiremos unas conexiones en haces particulares con los cuales trabajaremos en estas notas, para esto sean $\pi_1 : E_1 \longrightarrow M$ y $\pi_2 : E_2 \longrightarrow M$ haces vectoriales.

- Definimos la conexión en el haz $\pi : E_1 \oplus E_2 \longrightarrow M$, llamado el haz suma directa como: $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E_1 \oplus E_2) \longrightarrow \Gamma(E_1 \oplus E_2)$ dado como $(X, \phi \oplus \psi) \longmapsto \nabla_X \phi \oplus \psi := \nabla_X^{E_1} \phi \oplus \nabla_X^{E-2} \psi$, donde $X \in \Gamma(TM)$, $\phi \in \Gamma(E_1)$ y $\psi \in \Gamma(E_2)$

- Definimos la conexión en el haz $\pi : E_1 \otimes E_2 \longrightarrow M$, llamado el haz producto tensorial como: $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E_1 \otimes E_2) \longrightarrow \Gamma(E_1 \otimes E_2)$ dado como $(X, \phi \otimes \psi) \longmapsto \nabla_X \phi \otimes \psi := (\nabla_X^{E_1} \phi) \otimes \psi + \phi \otimes (\nabla_X^{E-2} \psi$, donde $X \in \Gamma(TM)$, $\phi \in \Gamma(E_1)$ y $\psi \in \Gamma(E_2)$.

- Definimos la conexión en el haz $\pi : E_1^* \longrightarrow M$, llamado el haz dual de E_1^* como: $\nabla^* : \Gamma(TM) \times \Gamma(E_1^*) \longrightarrow \Gamma(E_1^*)$ dado como $(X, \phi^*) \longmapsto (\nabla_X^* \phi^*)\phi := X(\phi^*(\phi)) - \phi^*(\nabla_X^{E_1} \phi)$, donde $X \in \Gamma(TM)$, $\phi \in \Gamma(E_1)$ y $\phi^* \in \Gamma(E_1^*)$.

- Definimos la conexión en el haz $\pi : Hom(E_1, E_2) \longrightarrow M$, llamado el haz de mapeos lineales como: $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(Hom(E_1, E_2)) \longrightarrow \Gamma(Hom(E_1, E_2))$ dado como $(X, A) \longmapsto (\nabla_X A)\phi := -A(\nabla_X^{E_1} \phi) + \nabla_X^{E_2}(A\phi))$, donde $X \in \Gamma(TM)$, $\phi \in \Gamma(E_1)$ y $A \in \Gamma(Hom(E_1, E_2))$.

Definición 9.3. *Una métrica en un haz diferenciable $\pi : E \longrightarrow M$ es una sección $a \in \Gamma(\odot^2 E^*)$ tal que a en un punto $p \in M$ es una forma bilineal, antisimétrica y positiva definida.*

Definición 9.4. *Sean $\pi : E \longrightarrow M$, $a \in \Gamma(\odot^2 E^*)$ y ∇ una conexión en $\pi : E \longrightarrow M$, si a es paralelo con respecto a la conexión ∇, es decir, $\nabla_X a = 0$ para cualquier $X \in \Gamma(TM)$ entonces diremos que $\pi : E \longrightarrow M$ con a y ∇ forman un haz vectorial riemanniano.*

Por último tomemos $\phi, \psi \in \Gamma(E)$, $X \in \Gamma(TM)$ y $a(\phi, \psi) = \langle \phi, \psi \rangle$ entonces

$$(\nabla_X a)(\phi, \psi) = X\langle \phi, \psi \rangle - \langle \nabla_X \phi, \psi \rangle - \langle \phi, \nabla_X \psi \rangle$$

Si $\nabla_X a = 0$, es decir, es paralelo tenemos

$$X\langle \phi, \psi \rangle = \langle \nabla_X \phi, \psi \rangle + \langle \phi, \nabla_X \psi \rangle$$

esto nos dice que la conexión es compatible con la métrica.

10 Propiedades Básicas de los mapeos Armónicos

10.1 Principio del Máximo

Se generalizará el Principio del Máximo para las funciones armónicas. Consideremos primero la segunda forma fundamental,

$$B_{XY}(f) := (\nabla_X df)(Y) \in \Gamma(f^{-1}TN),$$

para la composición de dos funciones suaves entre variedades Riemannianas. Sean M, N y P variedades Riemannianas y $f : M \to N$, $g : N \to P$, funciones suaves. Recordemos, además, que la conexión inducida para el haz de mapeos lineales está dado por:

$$(\nabla_X \mathcal{A})\phi_1 := \nabla_X^{E_2}(\mathcal{A}\phi_1) - \mathcal{A}(\nabla_X^{E_1}\phi_1),$$

en donde $\mathcal{A} \in \Gamma(\mathrm{Hom}(E_1, E_2))$, $\phi_1 \in \Gamma(E_1)$ y $X \in \Gamma(TM)$. Para la composición $g \circ f : M \to P$, tenemos la siguiente fórmula: Sean $X, Y \in \Gamma(TM)$

$$\begin{aligned}
B_{XY}(g \circ f) &:= (\nabla_X d(g \circ f))(Y) \\
&= (\nabla_X (dg \circ df))(Y) \\
&= \nabla_X (dg \circ df(Y)) - d(g \circ f)(\nabla_X Y) \\
&= (\nabla_{df(X)} dg)(df(Y)) + dg(\nabla_X df(Y)) - dg \circ df(\nabla_X Y) \\
&= (\nabla_{df(X)} dg)(df(Y)) + dg((\nabla_X df(Y)) - df(\nabla_X Y)) \\
&= (\nabla_{df(X)} dg)(df(Y)) + dg((\nabla_X df)(Y)) \\
&= B_{df(X)df(Y)}(g) + dg(B_{XY}(f)). \qquad (17)
\end{aligned}$$

Si elegimos un marco ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^n$ y trazamos respecto a esta base (anclada en un punto) a la ecuación 17, obtenemos el campo de tensión para la composición $g \circ f$:

$$\tau(g \circ f) = B_{df(e_i)df(e_i)}(g) + dg(\tau(f)). \qquad (18)$$

Proposición 10.1. *Si f y g son mapeos totalmente geodésicos, entonces (i) $g \circ f$ es totalmente geodésico y, (ii) Si f es armónico y g es totalmente geodésico, entonces $g \circ f$ es armónica.*

Proof. (i) Recordemos que f es totalmente geodésico si y sólo si $B(f) \equiv 0$ y f es hamónico si $\tau(f) \equiv 0$. Por tanto,

$$B_{XY}(g \circ f) = \cancel{B_{df(X)df(Y)}(g)} + dg(\cancel{B_{XY}(f)}) = 0.$$

De manera análoga para (ii),

$$\tau(g \circ f) = \cancel{B_{df(e_i)df(e_i)}(g)} + dg(\cancel{\tau(f)}) = 0.$$

□

Si ahora consideramos el caso especial $f : M \to N$ y $g : N \to \mathbb{R}$, la segunda forma fundamental de g coincide con el Hessiano $\mathrm{Hess}(g)(X, Y)$, con $X, Y \in \Gamma(TN)$, ya que

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}(g)(X,Y) = \nabla(dg) = h(\nabla_X gradg, Y) &= Xh(gradg, Y) - h(gradg, \nabla_X Y) \\ &= X(Y(g)) - (\nabla_X Y)(g) \\ &= B_{XY}(g). \end{aligned} \tag{19}$$

Definamos ahora a las funciones *convexas*. Si para todo $X \in \Gamma(TN)$, $Hess(g)(X,X) \geq 0$ (respectivamente > 0), llamaremos a g función convexa sobre N (fuertemente convexa, respectivamente). Si $\Delta_N g \geq 0$, a g se le llamará función *subarmónica* sobre N. La interpretación geométrica de las funciones convexas puede construirse de la manera siguiente: Sea $M = (-\epsilon, \epsilon)$ y $f = \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to N$ una curva geodésica parametrizada a longitud de arco sobre N. Entonces,

$$\frac{d^2(g \circ \gamma)}{ds^2} = B_{\gamma', \gamma'}(g) + dg(\tau(\gamma)) = Hess(g)(\gamma', \gamma'),$$

en donde γ' denota el vector tangente a la geodésica γ. Consecuentemente, g es una función convexa sobre N si sólo si su restricción a cualquier curva geodésica sobre N es una función convexa sobre una variable. Demostremos ahora algunas propiedades en torno a las funciones convexas.

Proposición 10.2. *Sea $f : M \to N$ un mapeo suave. (i) f es totalmente geodésico si y sólo si la composición $g \circ f$ es convexa para toda función convexa g definida en alguna vecindad de $f(M)$. (ii) f es armónica si y sólo si la composición $g \circ f$ es subarmónica para toda función convexa g definida en alguna vecindad de $f(M)$.*

Proof. (i) Para la ida, supongamos que f es totalmente geodésica, entonces $B(f) = 0$ y $Hess(g)(X,X) \geq 0$, por hipótesis,

$$\begin{aligned} B_{XX}(g \circ f) &= B_{df(X)df(X)}(g) + dg(\cancel{B_{XX}(f)}) \\ &= Hess(g)(df(X, df(X))) \geq 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $B_{XX}(g \circ f) \geq 0$; i e. es convexa. Para el regreso, procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que f no es totalmente geodésica, i e. existen $x_0 \in M$ y $v \in T_{x_0}M$ tales que $B_{vv}(f) \neq 0$. Definamos $w := B_{vv}(f)|_{x_o} \in T_{f(x)}N$. Elijamos coordenadas normales y^α alrededor del punto $f(x_0)$ y definamos a la siguiente función

$$g = b_\alpha y^\alpha + \sum (y^\alpha)^2, \tag{20}$$

en donde b_α se determinará más adelante. Observemos que cerca del punto $f(x_0)$, g es convexa y $Hess(g)|_{f(x_0)} = \mathrm{Id}$ (matriz identidad). Consideremos a $w = \sum w^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$, entonces $d(g) = \sum b_\alpha dy^\alpha$ y

$$dg(w) = \sum_{\alpha,\beta} b_\alpha w^\beta dy^\alpha (\frac{\partial}{\partial y^\beta}) = \sum b_\alpha w^\alpha.$$

Elijamos además que $\sum b_\alpha w^\alpha < -|dg(w)|^2$, con la ayuda de b_α. Así,

$$\begin{aligned} B_{vv}(g \circ f)|_{x_0} &= Hess(g)(dfv, dfv)|_{f(x_0)} + dg(w)|_{f(x_0)} \\ &= |df(v)|^2 + \sum b_\alpha w^\alpha < 0. \end{aligned} \tag{21}$$

La ecuación 21 contradice nuestra hipótesis inicial de que $g \circ f$ es convexa cerca de x_0.

(ii) Supongamos que f es armónica y g convexa, entonces

$$\begin{aligned} \Delta(g \circ f) &= \tau(g \circ f)(e_i, e_i) \\ &= B_{df(e_i)df(e_i)}(g) + dg(\cancel{\tau(f)}) \\ &= Hess(g)(e_i, e_i) \geq 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Para demostrar la condición necesaria supongamos por reducción al absurdo que f no es armónica, i e. $\tau(f)|_{x_0} \neq 0 =: w$ y $Hess(g)(X,X) \geq 0$.

Ahora elijamos a una función convexa g, cerca del punto $f(x_0)$, de manera tal que

$$dg(w) < -2e(f)(x_0)$$

y

$$Hess(g)|_{f(x_0)} = \text{Id}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \Delta(g \circ f)|_{x_0} &= \tau(g \circ f)(e_i, e_i)|_{x_0} \\ &= B_{df(e_i)df(e_i)}(g) + dg(\tau(f)) \\ &= 2e(f)(x_0) + dg(w) < 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Por tanto, $\Delta(g \circ f)|_{x_0} < 0$, lo que contradice la hipótesis de que la composición es subarmónica. □

Finalmente enunciemos el Principio del Máximo como sigue

Teorema 10.1. *Sea $f : M \to N$ armónico con $f(M) \subset V \subset N$ ($\partial M \neq \emptyset$). Además $g : V \to \mathbb{R}$ convexa. Si $g \circ f$ alcanza su máximo en algún punto interior de M, entonces $g \circ f$ es constante.*

Probemos el siguiente corolario,

Corolario 10.1. *Sea M compacta y sin frontera, $f : M \to N$ armónica tal que $f(M) \subset V \subset N$. Asumamos que existe $g : V \to \mathbb{R}$ fuertemente convexa. Entonces f es constante.*

Proof. Por reducción al abasurdo. Supongamos que f no es constante. Entonces existe $x_0 \in M$ y $X \in T_{x_0}M$ tal que $dfX \neq 0$. Sea g fuertemente convexa, entonces $Hess(g)(dfX, dfX) > 0$. Como M es compacta en $g \circ f(M)$ alcanza su máximo en el interior (pues no tiene forntera M), entonces por el teorema 10.1, $g \circ f$ es constante. Por otro lado,

$$\begin{aligned} 0 = \tau(g \circ f) &= B_{dfe_idfe_i}(g) + dg\cancel{\tau(f)} \\ &= B_{dfe_idfe_i}(g) > 0 \end{aligned} \tag{24}$$

Lo que contradice que g es fuertemente convexa. Por tanto f es constante. □

10.2 La formula de Bochner y sus aplicaciones

Teorema 10.2. *Supongamos M y N tales que existen a y b constantes reales positivas tales que $Ric^M \geq a$ $Riem^N \leq b$ donde Ric^M denota la curvatura de Ricci con M compacta y $Riem^N$ denota la curvatura seccional de N. Dado $f : M \to N$ mapeo armonico con el $max(rangf) \leq p$, $p \geq 2$. Si la densidad de energia satisface que $e(f) \leq \frac{pa}{2(p-1)b}$ entonces f es un mapeo constante o mapeo totalmente geodesico, en particular si $e(f) \leq \frac{a}{2b}$, f es un mapeo constante.*

Proof. Tomemos $f : M \to N$ mapeo armonico usando la formula (1.3.5 del libro)

$$\Delta e(f) = |B(f)^2|^2 - < R^N(f_*e_i, f_*e_j)f_*e_i, f_*e_j > + < f_*Ric^M e_i, f_*e_i >$$

demostrada por Irvin y la relacion $< f_*Ric^M e_i, f_*e_j >= R_{ij} < f_*e_i, e_j >$ tenemo que

$$\begin{aligned} \Delta e(f) = |B(f)|^2 + R_{ij} < f_*e_i, f_+e_j > \\ -(|f_*e_i|^2|f_*e_j|^2 - < f_*e_i, f_*e_j >< f_*e_i, f_*e_j >)Riem^N(f_*e_i, f_*e_j). \end{aligned} \tag{25}$$

Sea $x \in M$ y tomemos un marco local ortonomal $\{e_i\}$ tal que la primera forma fundamental de N sea diagonal en el punto $f(x)$ o en otras palabras $< f_*e_i, f_*e_i >= \lambda_i\delta_{ij}$ y supongamos que el rango de f es q y tenemos $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_q$ con lo cual tenemos que $|f_*e_i| = 2e(f)$, con esto la ecuacin 25 se reduce

$$\Delta e(f) = |B(f)|^2 - (4(e(f))^2 - \lambda_i^2\delta_{ij})Riem^N(f_*e_i, f_*e_j) + R_{ij}2e(f). \tag{26}$$

Con lo que conluimos que

$$\Delta e(f) \geq |B(f)|^2 - b(4(e(f))^2 - \sum_{i=1}^{q} \lambda_i^2) + 2ae(f). \tag{27}$$

Usando la desigualdad de Schwarz nos dice que

$$(\lambda_1 + \cdots + \lambda_q)^2 \leq q(\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_q^2) \leq p(\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_q^2)$$

por lo tanto

$$-(\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_q^2) \leq -\frac{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_q)^2}{p} = -\frac{(2e(f))^2}{p}$$

el ultimo paso usando la definicion de $e(f)$ para un marco local ortonormal, con esto la desigualdad 27 queda

$$\Delta e(f) \geq |B(f)|^2 + 2e(f)(a - \frac{2(p-1)b}{p}e(f)) \geq 0, \tag{28}$$

recordando que por hipotesis sabemos que $a > \frac{2(p-1)b}{p}$. Concluimos que $e(f)$ es una funcin sub armnica sobrela M, por lo tanto $e(f)$ es constante, con esto $\Delta e(f) = 0$ por 28 tenemos que

$$B(f) \equiv 0 \quad y \quad e(f)(a - \frac{2(p-1)b}{p}e(f)) = 0$$

Si $e(f) = 0$ el mapeo f es contaste, supongamos que f no es un mapeo constante entonces $B(f) = 0$ con lo cual f es totalmente geodesico, ahora como $e(f) \neq 0$ tenemos que $e(f) = \frac{ap}{2b(p-1)}$ por lo tanto si $e(f) \leq \frac{a}{2b}$ implica que $e(f) < \frac{ap}{2b(p-1)}$ y concluimos que $e(f) = 0$ por lo tanto $e(f) \equiv 0$. $\square$

Para el caso en que M es completa pero no es compacta tenemos el resultado analogo se obtiene pidiendo que la energia de f sea finita.

Teorema 10.3. *Sea M una variedad completa no compacta con cuvatura de Rcci no negativa y N con curvatura seccinal no positiva. Si $f : M \to N$ es armnica con energuia finita entonces f es un mapeo constate.*

De la ecuacui 25 tenemos que

$$\Delta e(f) \geq |B(f)|^2. \tag{29}$$

Sea $x \in M$ tomemos $\{e_i\}$ un marco geodesio en alrededor de x, por lo tanto

$$\nabla_{e_i} e(f) = \nabla_{e_i} \frac{1}{2} < df, df >=< \nabla_{e_i} df, df > \tag{30}$$

con lo cual

$$|\nabla e(f)|^2 =< (\nabla_{e_i} e(f))e_i, (\nabla_{e_j} e(f))e_j > \tag{31}$$
$$=< \nabla_{e_i} df, df >< \nabla_{e_j} df, df >< e_i, e_j >=< \nabla_{e_i} df, df >^2$$

usando la desigualda de Cuachy tenemos

$$|\nabla e(f)|^2 \leq |\nabla e_i df|^2 |df|^2 = 2e(f)|B(f)|^2 \tag{32}$$

Sea $\epsilon > 0$, Consideremos funciones $f : M \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la formula para el laplaciano de $g \circ f$ es

$$\Delta g \circ f(m) = \frac{d^2 g}{dx^2}(f(m))|\nabla f| + \frac{dg}{dx}(f(m))\Delta f$$

tenemos que

$$\Delta\sqrt{e(f)+\epsilon} = -\frac{1}{4}(e(f)+\epsilon)^{-\frac{3}{2}}|\nabla f| + (e(f)+\epsilon)^{-\frac{1}{2}}\Delta e(f) \tag{33}$$

Usando 60 y 61 tenemos que

$$\Delta\sqrt{e(f)+\epsilon} \geq -\frac{1}{2}(e(f)+\epsilon)^{-\frac{3}{2}}2e(f)|B(f)|^2 + (e(f)+\epsilon)^{-\frac{1}{2}}|B(f)|^2, \tag{34}$$

$$= \frac{1}{2}(e(f)+\epsilon)^{\frac{-1}{2}}|B(f)|^2(1 - \frac{e(f)}{e(f)+\epsilon}) \leq 0. \tag{35}$$

Consideremos η una funcion arbitraria En M con soporte compacto, por el resultadoa anterior tenemos que

$$0 \leq \int_M \eta^2\sqrt{e(f)+\epsilon}\Delta\sqrt{e(f)+\epsilon} * 1 \tag{36}$$

usando la integracion por partes o tambien llamda formula Green

$$\int_M f\Delta g * 1 = -\int < \nabla f, \nabla g > *1.$$

De 36 tenemos que

$$= -\int_M \eta < \nabla(\eta^2\sqrt{e(f)+\epsilon}), \nabla\sqrt{e(f)+\epsilon} > *1 \tag{37}$$

$$= -2\int_M \eta\sqrt{e(f)+\epsilon} < \nabla\eta, \nabla\sqrt{e(f)+\epsilon} * 1 - \int_M \eta^2|\nabla\sqrt{e(f)+\epsilon}|^2 * 1. \tag{38}$$

Tomemos $x_0 \in M$ y las bolas geodesicas B_r y B_{2r} con ctro en x_0 y la funcin chipote

$$\eta(x) \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B_r \\ 0 & \text{si } x \in M - B_{2r} \end{cases}$$

con $0 \leq \eta \leq 1$, $|\nabla \eta| \leq \frac{d}{r}$ donde d es una constate positiva, de la desigualdad 63 tenemos

$$0 \leq -2\int_{B_{2r}} \eta\sqrt{e(f)+\epsilon} < \nabla\eta, \nabla\sqrt{e(f)+\epsilon} > *1 - \int_{B_{2r}} \eta^2|\nabla\sqrt{e(f)+\epsilon}|^2 * 1.$$

pero si $x \in B_r$ tenemos que $\eta(x) = 1$ es constante por lo que $\nabla\eta(x) = 0$

$$= -2\int_{B_{2r}-B_r} < \sqrt{e(f)+\epsilon}\nabla\eta, \eta\nabla\sqrt{e(f)+\epsilon} > *1$$

$$-\int_{B_{2r}-B_r} \eta^2|\nabla\sqrt{e(f)+\epsilon}|^2 * 1 - \int_{B_r} |\nabla\sqrt{e(f)+\epsilon}|^2 * 1.$$

Usando la desigualda de holder en la prima integral tenemos que

$$\leq -2(\int_{B_{2r}-B_r} (e(f)+\epsilon)|\nabla\eta|^2 * 1)^{\frac{1}{2}}(\int_{B_{2r}-B_r} \eta^2|\nabla\sqrt{e(f)+\epsilon}|^2 * 1)^{\frac{1}{2}} \quad (39)$$

$$-\int_{B_{2r}-B_r} \eta^2|\nabla\sqrt{e(f)+\epsilon}|^2 * 1 - \int_{B_r} |\nabla\sqrt{e(f)+\epsilon}|^2 * 1$$

Estas expresion se puede releer como una desigualda cuadratica sobre

$$\int_{B_{2r}-B_r} \eta^2|\nabla\sqrt{e(f)+\epsilon}|^2 * 1$$

donde lo lemos dela forma $a = -1$, $b = 2(\int_{B_{2r}-B_r}(e(f)+\epsilon)|\nabla\eta|^2 * 1)^{\frac{1}{2}}$ y $c = -\int_{B_r} |\nabla\sqrt{e(f)+\epsilon}|^2$ por lo tanto

$$0 \leq b^2 - 4ac = 4\int_{B_{2r}-B_r} (e(f)+\epsilon)|\nabla\eta|^2 * 1 - 4\int_{B_r} |\nabla\sqrt{e(f)+\epsilon}|^2 * 1$$

$$\int_{B_r} |\nabla\sqrt{e(f)+\epsilon}|^2 * 1 \leq \int_{B_{2r}-B_r} (e(f)+\epsilon)|\nabla\eta|^2 * 1$$

$$\leq \frac{d^2}{r^2}\int_{B_{2r}-B_r} (e(f)+\epsilon) * 1 \quad (40)$$

pero $|\nabla\sqrt{e(f)+\epsilon}|^2 = \frac{|\nabla(e(f)+\epsilon)|^2}{4(e(f)+\epsilon)}$ tomando el conjuto $B'_r = B_r - \{x \in M | e(f)(x) = 0\}$ tenmos que 55 se convierte en

$$\int_{B'_r} \frac{|\nabla(e(f)+\epsilon)|^2}{4(e(f)+\epsilon)} * 1 \leq \frac{d^2}{r^2} \int_{B_{2r}-B_r} (e(f)+\epsilon) * 1 \tag{41}$$

si $\epsilon \to 0$ tenemos que

$$\int_{B'_r} \frac{|\nabla e(f)|^2}{4(e(f))} * 1 \leq \frac{d^2}{r^2} \int_{B_{2r}-B_r} e(f) * 1 \tag{42}$$

Gracias al hecho de la eneregia es finita podemos tomar $r \to \infty$ y concluimos

$$\int_{M-\{e(f)=0} \frac{|\nabla e(f)|^2}{4(e(f))} * 1 \leq 0 \tag{43}$$

Con esto concliomos que $e(f)$ es constante, si $e(f) \neq 0$ tenemos que $E(f) = \int_M e(f) = e(f)Vol(M)$ pero la energia es finita por lo tanto el volumen es fininito por lo que tenemos una contradiccin, concluimos que $e(f) \neq 0$, por lo tanto f es constante.

Corolario 10.2. *Podemos ver de aqui que si $M = \mathbb{C}$, $N = \mathbb{C}$ y f una funcin armnica entre las variedades en otras palabras una funcin holomorfa, tal que su energia sea finita entonces f es la funcin constante 0. Esto es muy parecido al teorema de Liuville ya que al tener energia finita tiene que estar acotada en el infinito, no podemos deducir el teorema de Liuville tal cual por que no toda funci'on contante tiene energua finita.*

10.3 Más aplicaciones de Principio del Máximo

Comenzaremos la sección mencionando la fórmula de composición que es la siguiente:

$$B_{XY}(\bar{f} \circ f) = B_{f_*Xf_*Y}(\bar{f}) + d\bar{f}(B_{XY}(f)); \tag{44}$$

y tomando la traza de (44) tenemos

$$\tau(\bar{f} \circ f) = B_{f_*e_if_*e_i}(\bar{f}) + d\bar{f}(\tau(f)) \tag{45}$$

Una aplicación de la fórmula de composición ocurre cuando N es una subvariedad de $\bar{N}$, para esto sean $f : M \to N$ una mapeo suave y $i : N \hookrightarrow \bar{N}$ una inmersión isométrica, ahora definamos $F = i \circ f$, de (45) se tiene la siguiente propisición

Proposición 10.3. *f es armónica $\Leftrightarrow$ $\tau(F)$ esta contenido en el espacio normal de N en $\bar{N}$.*

Proof. $\Rightarrow$] Supongamos que f es armónica. Aplicando (45) a F se tiene

$$\begin{aligned} \tau(F) &= \tau(i \circ f) \\ &= B_{f_*e_i f_*e_i}(i) + di(\tau(f)) \\ &= (\nabla_{i_*f_*e_i} i_* f_* e_i)^N \end{aligned}$$

por lo que $\tau(F)$ esta contenido en el espacio normal de N en $\bar{N}$.
$\Leftarrow$] Supongamos que $\tau(F)$ esta contenido en el espacio normal de N en $\bar{N}$, se tiene

$$\begin{aligned} \tau(F) &= \tau(i \circ f) \\ &= B_{f_*e_i f_*e_i}(i) + di(\tau(f)) \end{aligned}$$

y de aqui deducimos que $\tau(f) = 0$, por tanto armónica. $\square$

Ahora en el caso cuando $\mathbb{S}^n = N$ se tiene la siguiente observación.

Observación 10.1. *Dada $f : M \to \mathbb{S}^n$ que es armónica $\Leftrightarrow$ $\Delta_M F$ es paralelo a F en cada punto, donde $F : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ y $\Delta_M F = (\Delta_M F_1, ..., \Delta_M F_{n+1})$.*

Ocuparemos la observación anterior para probar el siguiente resultado.

Proposición 10.4. *Sea $f : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un mapeo definido por lo polonomios homogeneos armonicos de grado k, entonces $f|_{\mathbb{S}^n}$ es armónico.*

Antes recordemos la siguiente definiciónla cual nos ayudará a probar la proposición.

Definición 10.1. *Sea (M^m, g) una variedad riemmaniana, definimos el operador laplaciano como $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ dado por $f \mapsto \Delta f$, donde $\Delta f := e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i) f$ y $\{e_i\}_{i=1}^m$ es un marco ortonormal en M*

Proof. Comenzamos la prueba tomando un marco ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^m$ en $\mathbb{S}^m$ y $\nu = x$ el campo vectorial normal a lo larno de $\mathbb{S}^m$, entonces

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbb{S}^m} f &= e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i) f \\ &= e_i(e_i(f)) + \nu(\nu(f)) - (\bar{\nabla}_{e_i} e_i) f \\ &- (\bar{\nabla}_\nu \nu) f + B_{e_i e_i}(f) - \nu(\nu(f)) + (\bar{\nabla}_\nu \nu) f \\ &= \Delta_{\mathbb{R}^{m+1}} f + mH(f) - \nu(\nu(f)) \\ &= mH(f) - \nu(\nu(f)). \end{aligned}$$

donde $H = -\nu$ es la curvatura media de $\mathbb{S}^m$ en $\mathbb{R}^m$, entonces tenemos

$$\Delta_{\mathbb{S}^m} f = -m\nu(f) - \nu(\nu(f)). \tag{46}$$

Al ser f un polinomio homogéneo, se tiene

$$\begin{aligned} \nu(f(x))|_{\mathbb{S}^m} &= \frac{\partial}{\partial t} f(tx)|_{t=1} \\ &= kf. \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} \nu(\nu(f(x)))|_{\mathbb{S}^m} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(tx)|_{t=1} \\ &= k(k-1)f. \end{aligned}$$

Sustituyendo lo anterior en (46) se tiene

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbb{S}^m} f &= -mkf - k(k-1)f \\ &= fk(m + (k-1)). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\Delta_{\mathbb{S}^m} f$ es un eigenfunción con eigenvalor $k(m + (k-1))$. □

Lema 10.1. *Sea N' una hipersuperficie en N, supongamos que la segunda forma fundamental B de N' en N es definida en $y_0 \in N'$, entonces existe una funcion fuertemente convexa $\bar{f} : V \subset N \to \mathbb{R}$ con $y_0 \in V$ talq ue $\bar{f}^{-1}(0) = N' \cap V$ y $\bar{f} < 0$ esta en lado cóncavo.*

Observación 10.2. *La segunda forma fundamenta el llamada definida en el punto y_0 si para cualquier $X, Y \in T_{y_0}N'$ existe $\lambda > 0$ tal que $B(X, X) = \lambda B(Y, Y)$. El lado orientado por la dirección de $B(X, X)$ es llamado el lado cóncavo.*

Proof. Primero daremos la construccion que haremos con palabras y depués lo ilustraremos con un dibujo, para aterrizar bien la idea, entonces comencemos, sabemos que existen coordenadas geodesicas paralelas a la hipersuperficie N' en una vecindad $V \subset N$ de y_0, es decir, las coordenadas locales $(u_1, ..., u_2)$ en V tal que $N' \cap V$ tienen la propiedad que $u_n = 0$, la curva de coordenas a lo largo de U_n es geodésica con longitud de arco $|u_n|$ a partir de la hipersuperficie N', sin pérdida de generalidad podemos asumir que en lado cóncavo de N' la coordenada u_n es negativa. Se tiene que existen

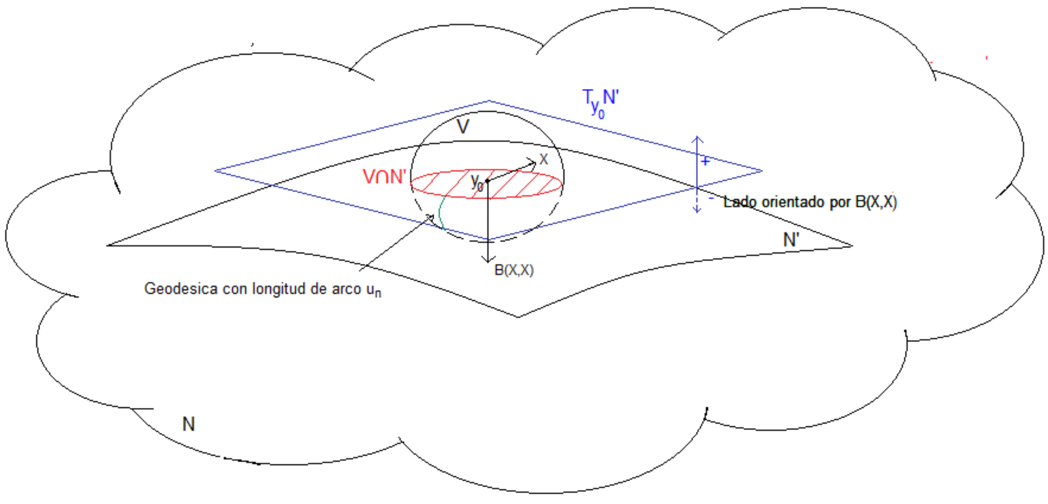

Figure 1: Idea de la construcción

las coordenadas inducidas $(u_1, ..., u_n) \in N' \cap V$ tomando el encaje canónico $N' \cap V \hookrightarrow N$ definido como $(u_1, ..., u_{n-1}) \to (u_1, ..., u_{n-1}, 0)$. Ahora definimos $u_n : N \to \mathbb{R}$ como $(u_1, ..., u_n) \mapsto u_n$, es decir, la proyección en le n-ésima coordenada. Al hacer la composicion de u_n con i se tiene

$$\begin{aligned} (u_n \circ i)(u_1, ..., u_{n-1}) &= u_n(i(u_1, ..., u_{n-1})) \\ &= u_n(u_1, ..., u_{n-1}, 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

ahora aplicando (44) a $(u_n \circ i)$ obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= B_{XX}(u_n \circ i) \\ &= B_{i_*Xi_*X}(u_n) + d(u_n)(B_{XX}(i)) \\ &= Hess(u_n)(i_*X, i_*X) + d(u_n)(B_{XX}(i)) \end{aligned}$$

entonces $Hess(u_n)(i_*X, i_*X) = -d(u_n)(B_{XX}(i))$ donde $X \in T_{y_0}N'$ y $X \neq 0$. Recordemos que la derivada de u_n en la dirección $B_{XX}(i)$ es negativa, entonces $d(u_n)(B_{XX}(i)) > 0$, esto nos dice que $Hess(u_n)(i_*X, i_*X) > 0$

también, además notemos que

$$\begin{aligned} Hess(u_n)(\frac{\partial}{\partial u_n},\frac{\partial}{\partial u_n}) &= \frac{\partial}{\partial u_n}\left(\frac{\partial}{\partial u_n}u_n\right)+\nabla_{\frac{\partial}{\partial u_n}}\frac{\partial}{\partial u_n}(u_n) \\ &= \frac{\partial}{\partial u_n}(1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Definamos

$$\bar{f}: V\subset N\to\mathbb{R}$$

como $u_n\mapsto(u_n+1)^2-1$, ahora para $Y\in T_{y_0}N$ calculamos el $Hess(\bar{f})(Y,Y)$

$$\begin{aligned} Hess(\bar{f})(Y,Y) &= Y(Y((u_n+1)^2-1))-(\nabla_Y Y)((u_n-1)^2-1) \\ &= Y(2(u_n+1)Y(u_n))-2(u_n-1)(\nabla_Y Y)(u_n) \\ &= 2Y(u_n)^2+2(u_n+1)Y(Y(u_n))-2(\nabla_Y Y)(u_n)^2+(\nabla_Y Y)(u_n) \\ &= 2Y(u_n)^2+2u_nY(Y(u_n))+2u_nY(Y(u_n))-2(\nabla_Y Y)(u_n)^2+(\nabla_Y Y)(u_n) \end{aligned}$$

pero evaluando en y_0 se tiene

$$\begin{aligned} Hess(\bar{f})(Y,Y)|_{y_0} &= 2u_nY(Y(u_n))-2(\nabla_Y Y)(u_n)^2+(\nabla_Y Y)(u_n) \\ &= 2\left((\nabla_Y Y)(u_n)^2+Hess(u_n)(Y,Y)\right) \end{aligned}$$

Así pues de lo anterior, es fácil deducir, que para $X\in T_{y_0}N'$ con $X\neq 0$ tenemos

$$\begin{aligned} Hess(\bar{f})(X,X)|_{y_0} &= 2Hess(u_n)(X,X) \\ &> 0. \end{aligned}$$

y que

$$Hess(\bar{f})(\frac{\partial}{\partial u_n},\frac{\partial}{\partial u_n})|_{y_0} = 2.$$

Lo último prueba que $\bar{f}$ es fuertemente convexa en y_0 y por como la construimos se tiene que cumple con las condiciones anteriores. $\square$

Teorema 10.4. *Supongamos que $f: MN$ es no constante y armónica con M compacta, sea N' una hipersuperficie en N con la segunda forma fundamental B definida en un punto $y_0=f(x_0)\in N'$, entonces no existe $U\subset M$ co $x_0\in U$ tal que $f(U)$ se encuentra en el lado cóncavo de N'*

Proof. La idea de la prueba es hacerla por contradicción, para esto sea $V \subset N'$ una vecindad de y_0 y tomemos la función $\bar{f} = (u_n + 1)^2 - 1$ la cual es fuertemente convexa por el lema (10.1), entonces se tiene que existe una vecidad U de x_0 y que además $f(U)$ se encuentra en el lado cóncavo de $\bar{f}^{-1}(0) = N' \cap V$, entonces para cualquier $x \in U$ tenemos que $\bar{f}(f(x)) \leq 0 = \bar{f}(f(x_0))$, lo anterior nos dice que x_0 es un punto máximo de $\bar{f} \circ f$ en U, aplicando el teorema 1.4.3[1] se tiene que $\bar{f} \circ f$ es constante en U.

Aplicando la fórmula (45) a $\bar{f} \circ f$ tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \tau(\bar{f} \circ f) \\ &= B_{f_* e_i f_* e_i}(\bar{f}) + d\bar{f}(\tau(f)) \\ &= B_{f_* e_i f_* e_i}(\bar{f}) \\ &= Hess(\bar{f})(f_* e_i, f_* e_i) \end{aligned}$$

Entonces se tiene que $Hess(\bar{f})(f_* e_i, f_* e_i) = 0$ lo cual es una contradicción, ya que por hipótesis $\bar{f}$ es fuertemente convexa, es decir, $Hess(\bar{f})(f_* e_i, f_* e_i) > 0$. Por lo tanto dicha vecindad U no puede existir. $\square$

[1]Este teorema esta en la notas de la 2da exposicion de Gilberto

11 Funcional de Hilbert-Einstein

11.1 Métrica inducida en formas bilineales

Definición 11.1. *Sea (M, g) una variedad riemanniana y sean $G, H \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ dos campos tensoriales de formas bilineales simétricas. Sea $x = (x_1, \cdots, x_n)$ coordenadas locales de M. Definimos la métrica inducida:*

$$(G, H) = \sum_{i,j,r,s} g^{ir} g^{js} G_{ij} H_{rs} \tag{47}$$

donde en tales coordenadas locales G y H se escriben como $G = \sum_{ij} G_{ij} dx_i \otimes dx_j$ y $H = \sum_{rs} G_{rs} dx_r \otimes dx_r$. Usamos la notación estandar $G_{ij} = G(\frac{\partial}{\partial_i}, \frac{\partial}{\partial_j})$ y $H_{ij} = H(\frac{\partial}{\partial_r}, \frac{\partial}{\partial_s})$.

Observación 11.1. *La motivación para la definición 11.1, parte del hecho $g(dx_i, dx_r) = g^{ir}$ y de $g(dx_i \otimes dx_j, dx_r \otimes dx_r) = g(dx_i, dx_r) g(dx_j, dx_s) = g^{ir} g^{js}$.*

12 Ecuación de Euler-Lagrange

Definición 12.1. *Sea M una variedad lisa de dimensión n. Definimos el espacio de métricas riemannianas en M:*

$$\mathcal{M} = \{g \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M) | g \text{ es positiva definida y simétrica } \}. \tag{48}$$

La funcional de Hilbert-Einstein $\mathcal{E} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ se define como

$$\mathcal{E}(g) = \int_M S(g) dv(g), \tag{49}$$

donde $S(g)$ y $dv(g)$ denotan la curvatura escalar y la forma de volumen de g, respectivamente.

Lema 12.1. *Dada una métrica g consideremos $g(t) = g(t) + th$ donde h es una forma bilineal simétrica. Entonces*

$$(S(g(0)))' = -\triangle(trh) + \delta^2(h) - g(Ric, h). \tag{50}$$

Lema 12.2. *Sea $B : (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow M(n, \mathbb{R})$ es una curva de matrices invertibles. Entonces*

$$(detB(t))' = det(B(t)) tr[B(t)^{-1} B'(t)]. \tag{51}$$

Corolario 12.1. $\frac{d}{dt}\left(\sqrt{detg(t)}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{detg(t)}g(h,g)$.

Proof. Por el Lema 12.2,

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}(\sqrt{detg(t)}) &= \frac{det(g(t))tr[g(t)^{-1}g'(t)]}{2\sqrt{detg(t)}} \\
&= \tfrac{1}{2}\sqrt{detg(t)}tr[g(t)^{-1}h] \\
&= \tfrac{1}{2}\sqrt{detg(t)}\textstyle\sum_{i,j} g^{ij}h_{ji} = \tfrac{1}{2}\sqrt{detg(t)}g(h,g).
\end{aligned}$$

□

Proposición 12.1. *Si M es compacta sin frontera y $n \geq 3$, entonces una métrica riemanniana $g \in \mathcal{M}$ es un punto critico de $\mathcal{E}$ si y sólo si la curvatura de Ricci de g es cero.*

Proof. □

13 Teorema de Rayleigh

Sean X y Y campos vectoriales sobre una variedad suave M. Para estos se define el producto:

$$(X,Y) := \int_M \langle X, Y\rangle \; dV \ ,$$

y la norma:

$$\|X\|^2 = \int_M |X|^2 \; dV \ . \tag{52}$$

Claramente se pide que la integral en (60) sea finita. Esto da a lugar a un espacio L^2 el se quiere *completar* a otro que por el momento se denotará como $\mathcal{L}^2$, el cual será un espacio de Hilbert. Esto se puede hacer pensando en funciones reales sobre M tal que sus componentes son funciones medibles.

De la misma forma se puede dar un producto en un espacio de funciones como:

$$(f,g) = \int_M fg \; dV \ ,$$

induciendo una norma (finita) de la misma forma y por supuesto una métrica, la cual nos da un espacio L^2.

Sea $f \in C^k(M)$ y X un campo también $C^k(M)$, entonces se cumple la siguiente identidad:

$$\mathrm{div}(fX) = f(\mathrm{div}X) + \langle \mathrm{grad}f, X\rangle \tag{53}$$

En caso de ser $k = 1$ la identidad se sigue cumpliendo, además, si f y X tienen soporte compacto se tiene que:

$$(\mathrm{grad}f, X) = -(f, \mathrm{div}X)$$

Esto sirve para motivar la siguiente definición.

Definición 13.1. Sea $f \in L^2(M)$, se dice que $Y \in \mathcal{L}^2(M)$ es una *derivada débil* de f si:

$$(Y,X) = -(f, \mathrm{div}X)$$

para todo X campo vectorial C^1 tal que tenga soporte compacto en M.

En el caso que $f \in C^1(M)$, la existencia de Y queda demostrada por las consideraciones anteriores. Así, como f en general no se puede derivar se denota $Y =$Grad$f$.

Se denota $\mathcal{H}(M)$ al subespacio de funciones en $L^2(M)$ tal que poseen una derivada débil. Este es un espacio de Sobolev.

En $\mathcal{H}(M)$ se define el producto interior:

$$(f, g)_1 := (f, g) + (\text{Grad} f, \text{Grad} h) \ ,$$

con norma:

$$\|f\|_1^2 = \|f\|^2 + \|\text{Grad} f\|^2. \tag{54}$$

Definición 13.2. Se define la *integral de Dirichlet* o de *energía* como:

$$D[f, h] = (\text{Grad} f, \text{Grad} h) \tag{55}$$

Como el Gradiente es lineal sobre los reales la integral de Dirichlet que acabo de definir es bilinieal; además, como el producto interior sobre M es simétrico se tiene que D es simétrico también.

Sobre una variedad se consideran diferentes problemas de eigenvalores y se busca que en todos ellos sea válida la siguiente expresión.

$$(\Delta\phi, f) = -D[\phi, f] \tag{56}$$

- Problema cerrado

En este caso se tiene M compacta y es válida la siguiente fórmula de Green.

$$\int_M f\Delta\phi \ dV = -\int_M \langle \text{grad} f, \text{grad}\phi\rangle \ dV$$

Y la ecuación (56) es válida cuando $\phi \in C^2(M)$ y $f \in C^\infty(M)$. Además, para $\phi \in C^2(M)$ la ecuación (56) define un funcional lineal F_ϕ que actúa en $C^\infty(M)$ como subespacio de $\mathcal{H}(M)$ y que satisface:

$$|F_\phi(f)| \leq \|\text{grad}\phi\| \ \|\text{grad} f\| \leq \|\text{grad}\phi\| \ \|f\|_1.$$

Dónde la primera desigualdad se da por Cauchy-Schwarz, y la segunda por la definición de la norma $\|\cdot\|_1$.

Entonces F_ϕ es un funcional lineal acotado en $C^\infty(M)$ y por lo tanto se puede extender a $\mathcal{H}(M)$ con la misma cota. Con esto la ecuación (56) es válida para $\phi \in C^2(M)$ y $f \in \mathcal{H}(M)$.

Para cada problema de eigenvalores la ecuación (56) es válida para distintos espacios así que para referirnos a todos de una sola vez se hablará del espacio de *funciones admisibles* $\mathfrak{H}(M)$, el cual se define como el domino donde esta ecuación es válida.

Teorema 13.1. Sea M un dominio normal con un problema de eigenvalores fijo con el espacio $\mathfrak{H}(M)$ y eigenvalores:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \ ,$$

dónde cada eigenvalor se repite el número de veces de su multiplicidad. Entonces para cualquier $f \in \mathfrak{H}(M)$ tal que $f \neq 0$ se cumple la desigualdad:

$$\lambda_1 \leq \frac{D[f,f]}{\|f\|^2} \ ,$$

alcanzando la igualdad si y sólo si f es la eigenfunción correspondiente a λ_1. Si $\{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$ es una base ortonormal completa de $L^2(M)$ tal que ϕ_j es eigenfunción para el valor λ_j con $j = 1, 2, \ldots$, entonces para $f \in \mathfrak{H}(M)$ distinta de la función cero que satisface:

$$(f, \phi_1) = \cdots = (f, \phi_{k-1}) = 0 \ , \tag{57}$$

se cumple la desigualdad

$$\lambda_k \leq \frac{D[f,f]}{\|f\|} \ ,$$

alcanzando la igualdad cuando f es la respectiva eigenfunción.

Proof. Si ϕ es una eigenfunción y $f \in \mathfrak{H}(M)$ la ecuación (56) es válida.

Para cualquier f en $\mathfrak{H}(M)$ se define $\alpha_j := (f, \phi_j)$, de tal forma que la condición (57) se puede escribir como $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0$. Entonces, para toda $k = 1, 2, \ldots$ y $r = k, k+1, \ldots$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
0 &\leq D[f - \sum_{j=k}^{r} \alpha_j \phi_j, f - \sum_{j=k}^{r} \alpha_j \phi_j] \\
&= D[f,f] - 2\sum_{j=k}^{r} \alpha_j D[f, \phi_j] + \sum_{j,l=k}^{r} \alpha_j \alpha_l D[\phi_j, \phi_l] \\
&= D[f,f] + 2\sum_{j=k}^{r} \alpha_j (f, \Delta\phi_j) - \sum_{j,l=k}^{r} \alpha_j \alpha_l (\phi_j, \Delta\phi_l) \\
&= D[f,f] + 2\sum_{j=k}^{r} \lambda_j \alpha_j (f, \phi_j) - \sum_{j,l=k}^{r} \lambda_l \alpha_j \alpha_l (\phi_j, \phi_l) \ .
\end{aligned}$$

Como $\{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$ es una base ortonormal y por definición de las funciones α_j se tiene:

$$\sum_{j=k}^{r} \lambda_j \alpha_j^2 \leq D[f, f].$$

Como esta desigualdad se da para toda r se puede concluir que el límite converge. Entonces:

$$D[f, f] \geq \sum_{j=k}^{\infty} \lambda_j \alpha_j^2 \geq \lambda_k \sum_{j=k}^{r} \alpha_j^2 = \lambda_k \|f\| \ , \tag{58}$$

donde en la última igualdad se usa la hipótesis de que la base sea completa.

Esás desigualdades demuestran ambos casos, solo falta demostrar la igualdad.

Para todos los casos se cumple la siguiente fórmula de Green:

$$\int_M h \Delta f = -\int_M \langle \mathrm{Grad} f, \mathrm{Grad} h \rangle \ .$$

Aplicándola para $h = f = \phi$, dónde ϕ es una eigenfunción, se obtiene la igualdad. Sólo falta ver que la igualdad implica que f es eigenfunción.

Suponiendo la igualdad, se obtiene de la ecuación (58) lo siguiente:

$$\sum_{j=k}^{\infty} (\lambda_j - \lambda_k) \alpha_j^2 = \sum_{j=r}^{infty} (\lambda_j - \lambda_k) \alpha_j^2 = 0 \ ,$$

dónde r depende de la multiplicidad de λ_k. Como $\lambda_k < \lambda_j$ para $j \geq r$, los valores α_j^2 deben anularse para $j \geq r$. Entonces:

$$f = \lambda_k \sum_{j=k}^{r-1} \alpha_j^2 \ ,$$

lo cual hace a f una eigenfunción.

$\square$

14 Teorema Min-Max

En lo subsecuente nos ocuparemos de la validez de la ecuación

$$(\triangle \phi, f) = -D[\phi, f] \tag{59}$$

Para el problema de eigenvalores de Neumann, la validez de (1) para $\phi \in C^2(\overline{M})$ que satisface $\nu\phi = 0$ en ∂M y $f \in C^\infty$, nos la da la fórmula de Green

$$\int_M [f\triangle\phi + \langle\nabla f, \nabla\phi\rangle]dv = \int_{\partial M} f(\nu\phi)dA = 0$$

Para el problema de eigenvalores de Dirichlet, la validez de (1) para $\phi \in C^2(\overline{M})$ que satisface $\phi = 0$ en ∂M y $f \in C^\infty(M)$ con soporte compacto, nos la da la misma fórmula de Green

$$\int_M [f\triangle\phi + \langle\nabla f, \nabla\phi\rangle]dv = \int_{\partial M} f(\nu\phi)dA = 0$$

Para el problema de eigenvalores mixtos, la validez de (1) para $\phi = 0$ en $\partial M - N$, $\nu\phi = 0$ en N y f en la completación de funciones en $C^\infty(\overline{M})$ con soporte compacto en $M \cup N$, también esta dada por la formula de Green.

Definición 14.1. *Dado el problema de eigenvalores anteriores, definimos el espacio de funciones admisibles $h(M)$, que en el caso de el problema de eigenvalores cerrados y de Neumann es precisamente $H(M)$, para el problema de Dirichlet es la completación de las funciones C^∞ con soporte compacto en M y por último para el problema mixto se trata de la completación de funciones C^∞ con soporte compacto en $M \cup N$.*

Teorema 14.1. *(Min-Max)*
Sean $v_1, v_2, ..., v_{k-1} \in L^2(M)$ y

$$\mu = inf \frac{D[f,f]}{|f|^2}$$

donde f varia sobre los subespacios de (menos el origen)de funciones en $h(M)$ ortogonales a $v_1, v_2, ..., v_{k-1}$ en $L^2(M$. Entonces para eigenvalores $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ...$ tenemos que $\mu < \lambda_k$. Además si $v_1, v_2, ..., v_{k-1}$ son ortonormales, con cada v_i eigenfunción de λ_i, $i = 1, 2, ..., k-1$ entonces $\mu = \lambda_k$.

Proof. Consideremos la función f de la forma

$$f = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \phi_j$$

donde $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_k$ son ortogonales y cada ϕ_j es eigenfunción de λ_j, $j = 1, 2, ..., k$ y f es ortogonal a $v_1, ..., v_{k-1}$ en $L^2(M)$ esto es

$$0 = \langle f, v_i \rangle = \langle \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \phi_j, v_i \rangle = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \langle \phi_j, v_i \rangle \quad i = 1, 2, ..., k-1$$

Ahora si consideramos a los α_j como incógnitas y a $\langle \phi_j, v_i \rangle$ como coeficientes entonces tenemos más incógnitas que ecuaciones y por lo tanto existe una solución no trivial, por lo que mi función esta bien definida. Así

$$\mu |f|^2 \leq D[f,f] = -(\triangle f, f) = -(\textstyle\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \triangle \phi_j, \sum_{l=1}^{k} \alpha_l \phi_l)$$

$$= -\textstyle\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \sum_{l=1}^{k} \alpha_l (\triangle \phi_j, \phi_l) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \sum_{l=1}^{k} \alpha_l (\lambda_j \phi_j, \phi_l)$$

$$= \textstyle\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \lambda_j \sum_{l=1}^{k} \alpha_l (\phi_j, \phi_l) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \lambda_j \sum_{l=1}^{k} \alpha_l \delta_{ij}$$

$$= \textstyle\sum_{j=1}^{k} \alpha_j^2 \lambda_j \leq \lambda_k \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^2 = \lambda_k |f|^2$$

Por lo tanto $\mu \leq \lambda_k$

Para la igualdad. Supongamos que $v_1, v_2, ..., v_{k-1}$ son ortonormales, con cada v_i eigenfunción de λ_i, $i = 1, 2, ..., k-1$ de aquí $v_1, v_2, ..., v_{k-1}, \psi_k, \psi_{k+1}, ...$ es base de $L^2(M)$ donde ψ_2 es eigenfunción de λ_i para $i \geq k$. Sea

$$f = \sum_{j=k}^{\infty} \alpha_j \psi_j$$

con $\alpha_j = (f, \psi_j)$ Por otra parte como $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_{k-1} \lambda_k \leq ...$ Entonces

$$\sum_{j \geq k} \lambda_k \alpha_j^2 \leq \sum_{j \geq K} \lambda_j \alpha_j^2$$

De aquí

$$\lambda_k \leq \frac{\sum_{j \geq K} \lambda_j \alpha_j^2}{\sum_{j \geq K} \alpha_j^2} = \frac{D[f,f]}{|f|^2}$$

Lo cual implica que $\lambda_k \leq \mu$. Por lo tanto $\lambda_k = \mu$

$\square$

15 La Desigualdad de Poincaré y el primer valor propio de Laplaciano

Empezaremos eneunciando dos teoremas que usaremos más adelante.

Teorema 15.1. *Sea M^n una variedad riemanniana completa tal que existe una constante $K > 0$ de manera que para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$*

$$Ric(X, X) \geq (n-1)K|X|^2.$$

1. ***(Myers)*** *Entonces M es compacta y su diámetro d está acotado superiormente*
$$d \leq \frac{\pi}{K}.$$
2. ***(Cheng)*** *Si $d \leq \frac{\pi}{K}$, entonces M es isométrica a la $n-$esfera estándar de radio $\frac{1}{\sqrt{K}}$.*

Teorema 15.2. *Sea M^n una variedad riemanniana compacta y sin frontera tal que existe una constante $K > 0$ de manera que para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$*

$$Ric(X, X) \geq (n-1)K|X|^2.$$

Entonces el primer valor propio λ_1 del Laplaciano cumple $\lambda_1 \geq nK$. La igualdad se alcanza si y sólo si M es isométrica a la $n-$esfera de radio $\frac{1}{\sqrt{K}}$.

Proof. Sea $u : M \to \mathbb{R}$ una función lisa no constante tal que $\Delta u = -\lambda_1 u$. Consideremos

$$Q = |\nabla u|^2 + \frac{\lambda_1}{n} u^2$$

y calculemos ΔQ ayudándonos de la Fórmula de Bochner:

$$\begin{aligned}\Delta Q &= 2|\mathrm{Hess}u|^2 + \langle \nabla u, \nabla \Delta u \rangle + 2\mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u) + \frac{\lambda_1}{n}(2u\Delta u + 2|\nabla u|^2) \\ &= 2|\mathrm{Hess}u|^2 - 2\lambda_1 |\nabla u|^2 + 2\mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u) - 2\frac{\lambda_1^2}{n}u^2 + 2\frac{\lambda_1}{n}. \qquad (60)\end{aligned}$$

Si $\{E_i\}$ es un marco ortonormal local, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$|\mathrm{Hess}u|^2 = \sum_{i,j} \mathrm{Hess}u(E_i, E_j)^2 \geq \sum_i \mathrm{Hess}u(E_i, E_i)^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum_i \mathrm{Hess}u(E_i, E_i)\right)^2 = \frac{(\Delta u)^2}{n},$$

y combinando lo anterior con la cota de la curvatura de Ricci en (60) llegamos a que

$$\begin{aligned}\Delta Q &\geq \frac{2\lambda_1^2}{n}u^2 - 2\lambda_1|\nabla u|^2 + 2(n-1)K|\nabla u|^2 - 2 \geq \frac{2\lambda_1^2}{n}u^2 + \frac{\lambda_1}{n}|\nabla u|^2 \\ &= 2|\nabla u|^2((n-1)K + \frac{\lambda_1}{n} - \lambda_1) = 2(n-1)\left(K - \frac{\lambda_1}{n}\right)|\nabla u|^2. \quad (61)\end{aligned}$$

Si $\lambda_1 \geq nK$ ya terminamos, entonces supongamos que $\lambda_1 \leq nK$ y veremos que esto implica que $\lambda_1 = nK$. Por (61) sabemos que $\Delta Q \geq 0$, así que el Principio del Máximo nos garantiza que Q es constante. Entonces

$$0 = \Delta Q \geq 2(n-1)\left(K - \frac{\lambda_1}{n}\right)|\nabla u|^2 \geq 0,$$

de donde $\left(K - \frac{\lambda_1}{n}\right)|\nabla u|^2 = 0$, pero como u no es constante, hay un punto en M en donde ∇u no se anula, por lo tanto $\lambda_1 = nK$.

Sean $\mathscr{M} = \max u(M), m = \min u(M)$ y x_+, x_- puntos de M en donde u alcanza sus valores máximo y mínimo, respectivamente. Como ∇u se anula en estos puntos, tenemos que

$$K\mathscr{M}^2 = Q(x_+) = Q(x_-) = Km^2, \quad (62)$$

así que $\mathscr{M} = -m$. Observemos ahora que $\mathscr{M} \neq 0 \neq m$, de lo contrario u sería constante 0. Podemos entonces suponer (multiplicando por una constante adecuada de ser necesario) que elegimos u de tal forma que $\mathscr{M} = 1$ y $m = -1$, así $Q \equiv K$, por lo que para puntos en donde $u \neq \pm 1$ se tiene que

$$\frac{|\nabla u|}{\sqrt{1-u^2}} = \sqrt{K}.$$

Los puntos x_+ y x_- se pueden elegir de tal forma que si $\gamma : [0, s] \to M$ es un segmento gedésico minimizante de velocidad unitaria que los une, entonces $u(\gamma(t))^2 \neq 1$ para todo $t \in (0, s)$. De este modo, si d es el diámetro de M, tenemos que

$$\begin{aligned}\sqrt{K}d \geq \sqrt{K}d(x_+, x_-) &= \frac{|\nabla u|}{\sqrt{1-u^2}}\ell(\gamma) = \int_\gamma \frac{|\nabla u||\dot{\gamma}|}{\sqrt{1-u^2}} = \int_0^s \frac{|\nabla u||\dot{\gamma(t)}|}{\sqrt{1-u^2}} \\ &\geq \int_0^s \frac{\langle \nabla u, \dot{\gamma}(t)\rangle}{1-u^2}dt = \int_0^s \frac{du/dt}{\sqrt{1-u^2}}dt = \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \pi,\end{aligned}$$

es decir, $d \geq \frac{\sqrt{K}}{\pi}$, pero también $d \leq \frac{\sqrt{K}}{\pi}$, pues M cumple las hipótesis de Teorema de Myers, entonces $d = \frac{\sqrt{K}}{\pi}$. Finalmente, el Teorema de Cheng garantiza que M es isométrica a la $n-$esfera de radio $\frac{1}{\sqrt{K}}$.

$\square$

El resultado anterior nos proporciona una cota para λ_1 cuando la curvatura de Ricci de nuestra variedad está acotada inferiormente por una constante positiva. Haremos ahora algo similar, pero para variedades con curvatura de Ricci no negativa.

Observación 15.1. *Si M es una variedad compacta sin frontera y $\varphi' \in \mathscr{C}^\infty(M)$ es una función propia correspondiente a λ_1, tenemos que*

$$0 = \int_M \Delta\varphi' dV = \int_M -\lambda_1\varphi' dV = -\lambda_1 \int_M \varphi' dV,$$

pero como $\lambda_1 \neq 0$, entonces $\int_M \varphi' dV = 0$. Esto quiere decir que φ' toma valores positivos y negativos, así que existe una contante C tal que $\varphi = C\varphi'$ cumple

$$a + 1 = \max\varphi(M), a - 1 = \min\varphi(M),$$

para alguna $a \geq 0$, y claramente φ sigue siendo función propia. Usaremos estas φ y a en el enunciado del teorema siguiente.

Teorema 15.3. *Sea M es una variedad riemanniana compacta con curvatura de Ricci no negativa y con diámetro d. Entonces*

$$\lambda_1 \geq \frac{\pi^2}{(1+a)d^2}.$$

Proof. Consideremos φ y a como en la Obsevación 15.1 y sea $u = \varphi - a$. Entonces

$$\Delta u = \Delta\varphi - \Delta a = -\lambda_1\varphi = -\lambda_1(u + a).$$

Sean $c = \lambda_1(1 + a)$ y $P = |\nabla u|^2 + cu^2$. Aplicando la Fórmula de Bochner obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta P &= |\mathrm{Hess}u|^2 + \langle\nabla u, \nabla\Delta u\rangle + \mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u) + c(u\Delta u + |\nabla u|^2) \\ &= |\mathrm{Hess}u|^2 - \lambda_1|\nabla u|^2 + \mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u) - \lambda_1 cu(u + a) + c|\nabla u|^2 \qquad (63)\end{aligned}$$

Probaremos que si $x_0 \in M$ es un punto en donde P alcanza su máximo, entonces $P(x_0) \leq c$. Consideraremos dos casos:

1. $\nabla u|_{x_0} = 0$. Como $a-1 \leq \varphi \leq a+1$, se tiene que $-1 \leq u \leq 1$, entonces $P(x_0) = cu(x_0)^2 \leq c$.

2. $\nabla u|_{x_0} \neq 0$. Todas las expresiones que aparecen a continuación están evaluadas en x_0. Sea $X = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$. Observemos que como x_0 es punto máximo de P, en particular es punto crítico, por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 = \nabla u(P) &= 2\left\langle \nabla_{\nabla u} \nabla u, \nabla u \right\rangle + 2cu|\nabla u|^2 \\ &= 2|\nabla u|^2 \mathrm{Hess} u(X, X) + 2cu|\nabla u|^2. \end{aligned}$$

   Se sigue que $\mathrm{Hess}u(X, X)^2 = c^2 u^2$. Por otro lado, $\Delta P(x_0) \leq 0$ porque x_0 es máximo de P. Combinando lo anterior con (63) se llega a lo siguiente:

$$\begin{aligned} 0 \geq \Delta P &\geq c^2 u^2 - \lambda_1 |\nabla u|^2 - \lambda_1 cu(u+a) + c|\nabla u|^2 \\ &= (c - \lambda_1)(cu^2 + |\nabla u|^2) - \lambda_1 acu \\ &\geq a\lambda_1 P(x_0) - \lambda_1 ac. \end{aligned}$$

   Si $a \neq 0$, lo anterior implica que $P(x_0) \leq c$, como queríamos.

Ahora, para cualquier punto x de M tenemos que $P(x) \leq P(x_0) \leq c$, entonces si $u(x)^2 \neq 1$

$$\sqrt{c} \geq \frac{|\nabla u|}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Si consideramos un segmento geodésico minimizante γ parametrizado por longitud de arco, que conecte puntos en donde u alcanza sus valores máximo y mínimo, y que no tenga puntos críticos en el interior, argumentando como en el Teorema 15.2 tenemos que

$$\sqrt{c}d \geq \int_\gamma \frac{|\nabla u|}{\sqrt{1-u^2}} \geq \int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \pi,$$

por lo tanto $\lambda_1 \geq \frac{\pi^2}{(1+a)d^2}$, como se buscaba. $\square$

16 Un Lema

Lema 16.1. *Esta desigualdad la demostro Irvin en clase*

$$|\nabla u(x)|^2 \leq \lambda(1+a)(1-u(x)^2). \tag{64}$$

Lema 16.2. *La funcion*

$$z(u) = \frac{2}{\pi}(\arcsin(u) + u\sqrt{1-u^2}) - u \tag{65}$$

Donde $z \in [-1, 1]$*, satisafce;*

$$\dot{z}u + \ddot{z}(1-u^2) + u = 0 \tag{66}$$

$$\dot{z}^2 - 2z\ddot{z} + \dot{z} \geq 0 \tag{67}$$

$$2\dot{z} - \ddot{z}u + 1 \geq 0 \tag{68}$$

y

$$(1-u^2) > 2|z| \tag{69}$$

Lema 16.3. *Suppongamos que* M *es una variedad compacta sin frontera con curvatura de Ricci no negativa. Asumamos que el primer eingefuncin* ϕ *corresponde el eingevalor* λ *normalizado, con lo cualtenemos que* $0 \leq a < 1$*,* $q + 1 = \sup \phi$ *y* $a - 1 \inf_M \phi$*. La funcin* $U = \phi - a$*, su gradiente cumple la siguiente desigualdad*

$$|\nabla u|^2 < \lambda(1-u^2) + 2az(u) \tag{70}$$

con $z(u)$ *la definida en el Lema anterior*

Proof. Primero veremos que podemos estimar 70 para la funcion $u = \epsilon(\phi - a)$, donde $0 < \epsilon < 1$. Estimemos el Laplaciano de u;

$$\Delta u = \Delta[\epsilon(\phi - a)] = \epsilon\Delta\phi = -\lambda\epsilon\phi = -\lambda\epsilon(\phi - a + a) = -\lambda(u + \epsilon a). \tag{71}$$

Por contruccin de u tenemos que $-\epsilon \leq u \leq \epsilon$. Gracias a la desigualdad concluimos que $a > 0$. Consideremos la funcin

$$Q = |\nabla u|^2 - c(1-u^2) - 2a\lambda z(u), \tag{72}$$

Usando 16.1 y 69 para estimar Q

$$Q \leq \lambda(1+a)(1-u(x)^2) - c2|z| - 2a\lambda z(u)$$

por lo tanto podemos escojer c suficientemente grande tal que $\sup_M Q = 0$. Si $c \leq \lambda$ el lemma se demuestra tomando $\epsilon \to 1$. Concentremonos en el caso $c < \lambda$. Veamos que si x_0 es el punto deonde Q es maximo entnces $|\nabla u(x_0)| > 0$, supongamos que $\nabla u(x_0) = 0$ por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 = Q &= -c(1-u(x_0)^2) - 2a\lambda z(x_0) \leq -c(1-u(x_0)^2) - a\lambda(1-u^2) \\ &= -(c-a\lambda)(1-u^2) < -(c-a\lambda)(1-\epsilon^2) > 0. \end{aligned}$$

Usando 69.

Ahora derivemos Q con respecto a la dirrecin e_i, tenemos que

$$\frac{1}{2}Q_i = u_j u_{ji} + cuu_i - a\lambda \dot{z} u_i. \tag{73}$$

Podemos rotar el marco en el punto x_0 de tal forma que $u_1(x_0) = |\nabla u(x_0)|$, usnado que $Q_i(x_0)$ tenemos que

$$0 = u_1(x_0)u_{1i} + u_i(cu - a\lambda\dot{z}),$$

por lo tanto si $i = 1$

$$u_{11} = -(cu - a\lambda\dot{z}),$$

porlo tanto

$$u_{ji}u_{ji} \geq u_{11}^2 = (cu - a\lambda\dot{z})^2.$$

□

Usando el hecho de que en un maximo el Laplaciano es negativo y la formula antes vista del laplcaciano del gradiente tenemos que

$$0 \geq \Delta\frac{1}{2}Q(x_0) = u_{ij}u_{ij} + u_j(\Delta u)_j + R_{ij}u_iu_j + cu_i^2 + cu\Delta u - a\lambda\ddot{z}u_i^2 - a\lambda\dot{z}\Delta u$$

$$= u_{ij}u_{ij} + u_j(\Delta u)_j + R_{ij}u_iu_j + (c - a\lambda\ddot{z})|\nabla u|^2 + (uc - a\lambda\dot{z})\Delta u$$

Usando

$$\geq (cu - a\lambda\dot{z})^2 + u_j(\Delta u)_j + (c - a\lambda\ddot{z})u_i^2 - \lambda(uc - a\lambda\dot{z})(u + \epsilon a)$$

$$\geq (cu - a\lambda\dot{z})^2 + (c - \lambda - a\lambda\ddot{z})[c(1-u^2) + 2a\lambda z] - \lambda(uc - a\lambda\dot{z})(u + \epsilon a)$$

re ordenando

$$= -ac\lambda\{(1-u^2)\ddot{z}+u\dot{z}+\epsilon u\}+a^2\lambda^2\{-2z\ddot{z}+\dot{z}^2+\epsilon\dot{z}\}+a\lambda(c-\lambda)\{-u\dot{z}+2z+1\}+(c-\lambda)(c-a\lambda).$$

Usando 66, 67 y 68 concluimos que

$$0 \geq ac\lambda(1-\epsilon)u - a^2\lambda^2(1-\epsilon)\dot{z} + (c-\lambda)(c-a\lambda)$$

notando de un calculo directo que $\dot{z} \geq (\frac{4}{\pi} - 1)$ y $u \geq -1$ tenemos que

$$\geq -ac\lambda(1-\epsilon) - a^2\lambda^2(1-\epsilon)(\frac{4}{\pi} - 1) + (c-\lambda)(c-a\lambda)$$

$$\geq -c\lambda(1-\epsilon) - \lambda^2(1-\epsilon) + (c-\lambda)^2 = -(c+\lambda)\lambda(1-\epsilon) + (c-\lambda)^2.$$

Esto ultimo es una ecuacion cuadratica sobre c con coeficiente cuadratico positivo por lo que la parabola habre para arriba, por lo que concluimos que si c es mas grande que sus raices positivas la desigualdad de arriba se cumple por lo tanto

$$c \leq \lambda\{\frac{2 + (1-\epsilon + \sqrt{(1-\epsilon)(9-\epsilon)}}{2}.$$

si $\epsilon \to 1$ llegamos al resultado deseado.

Lema 16.4. *Supongamos M compacta y sin fronteras con curvatura de Ricci no negativa. Dados $a \geq 0$ la media de la normalizacion del primer engevalor con $a+1 = \sup_M \phi$, $a-1 = \inf_M \phi$ donde ϕ es la engefuncion y d el diametro de M.*

$$d^2\lambda_1 \geq \pi^2 + \frac{6}{\pi}(\frac{\pi}{2} - 1)^4 a^2 \geq \pi^2(1 + 0.02a^2). \qquad (74)$$

Proof. Argumentando con $u = \phi - a$ la misma del Lemma.Tomemos γ el camino geodesico mas corto del punto en M que es minimo de u al punto en M que es maximo de u, por lo tanto la longitud de arco de la curva es mas pequea que d.

$$d\lambda^{\frac{1}{2}} \geq \int_\alpha \lambda^{\frac{1}{2}} ds \geq \int_\gamma \frac{|\nabla u|}{\sqrt{1-u^2+2az(u)}}$$

Usando la desigualdad de Lemma pasado para el ultimo paso y la desigualdad de Cauchy para le siguiente paso

$$\geq \int_\gamma \frac{< \nabla u, \frac{d\gamma}{dt} >}{\sqrt{1-u^2+2az(u)}} = \int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2+2az(u)}}$$

Gracias a que z es una funcion impar

$$= \int_0^1 \{ \frac{1}{\sqrt{1-u^2+2az(u)}} + \frac{1}{\sqrt{1-u^2+2az(u)}} \} du.$$

Con un calculo directo se puede checar la siguiente desigualda

$$\geq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \{2 + \frac{3a^2z^2}{1-u^2}\} du$$

calculando

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin(u)|_0^1 = \arcsin(1) - \arcsin(0) = \frac{\pi}{2}$$

con lo cual tenemos

$$\geq \pi + 3a^2 (\int_0^1 \frac{z}{\sqrt{1-u^2}} du)^2, \tag{75}$$

desarrollando

$$\frac{z}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\frac{2}{\pi}(\arcsin(u) + u\sqrt{1-u^2}) - u}{\sqrt{1-u^2}} \tag{76}$$

computando la primera integral

$$\int_0^1 \frac{\arcsin(u)}{\sqrt{1-u^2}} du = \frac{1}{2}(\arcsin(u))^2|_0^1 = \frac{\pi^2}{8} \tag{77}$$

la segunada

$$\int_0^1 \frac{u\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-u^2}} du = \int_0^1 u du = \frac{1}{2} \tag{78}$$

la tercera

$$\int_0^1 \frac{-u}{\sqrt{1-u^2}} du = \sqrt{1-u^2}|_0^1 = -1 \tag{79}$$

por lo tanto 75 queda

$$= \pi + 3a^2 (\frac{2}{\pi}(\frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2}) - 1)^2 = \pi + \frac{3a^2}{\pi^2}(\frac{\pi^2}{4} + 1 - \pi)^2 = \pi + \frac{3a^2}{\pi^2}(\frac{\pi}{2} - 1)^4 \tag{80}$$

$\square$

17 Otro Lema

Lema 17.1. *Sea M una variedad Riemanniana m-dimensional completa. Supóngase que la curvatura de Ricci de M está acotada por debajo*

$$\mathcal{R}_{ij} \geq -(m-1)R,$$

para alguna constante R. Sea u una función definida sobre M que satisface la ecuación

$$\Delta u = -\lambda u,$$

y si definimos

$$Q(x) = |\nabla log(a - u(x))|^2,$$

entonces

$$\Delta Q - \tfrac{m}{2(m-1)}|\nabla Q|^2 Q^{-1}$$

$$+ \langle \nabla v, \nabla Q\rangle Q^{-1}\big(\tfrac{2(m-2)}{m-1}Q - \tfrac{2}{m-1}\tfrac{\lambda u}{a+u}\big) \;\geq\; \tfrac{2}{m-1}Q^2$$

$$+ \big(\tfrac{4}{m-1}\tfrac{2\lambda a}{a+u} - \tfrac{\lambda u}{a+u} - 2(m-1)R\big)Q \;+\; \tfrac{2}{m-1}\big(\tfrac{\lambda u}{a+u}\big)^2.$$

Proof. Definamos a la siguiente función $v(x) = \log(a + u(x))$, entonces primero mostremos que

$$\Delta v = -|\nabla v|^2 - \frac{\lambda u}{a+u} = -|\nabla v|^2 - \lambda + \frac{\lambda a}{a+u}.$$

Sean $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ y $\{e_1, \ldots, e_m\}$ un marco ortonormal definido en un punto. Así,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}v(X,Y) &= X(Yv) - (\nabla_X Y)v \\
&= X(\tfrac{1}{a+u}Yu) - \tfrac{1}{a+u}(\nabla_X Y)u \\
&= \tfrac{-1}{(a+u)^2}(Xu)(Yu) + \tfrac{1}{a+u}X(Yu) - \tfrac{1}{a+u}(\nabla_X Y)u \\
&= \tfrac{-1}{(a+u)^2}(Xu)(Yu) + \tfrac{1}{a+u}\mathrm{Hess}u(X,Y).
\end{aligned}$$

Si ahora trazamos respecto a la base ortonormal y usando que u es eigenfunción del Laplaciano,

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\mathrm{Hess}v) &= \textstyle\sum_{i=1}^m \tfrac{-1}{(a+u)^2}(e_i u)(e_i u) + \sum_i^m \tfrac{1}{a+u}\mathrm{Hess}u(e_i, e_i) \\
&= \tfrac{-1}{(a+u)^2}|\nabla u|^2 - \tfrac{\Delta u}{a+u} \\
&= \tfrac{-1}{(a+u)^2}|\nabla u|^2 - \tfrac{\lambda u}{a+u}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos la siguiente relación,

$$\begin{array}{rcl} |\nabla v|^2 & = & |\sum_{i=1}^m e_i(v)e_i\,|_p\,|^2 \\ & = & |\sum \frac{1}{(a+u)}e_i(u)e_i\,|_p\,|^2 \\ & = & \frac{1}{(a+u)^2}\sum e_i(u)^2 \\ & = & \frac{1}{(a+u)^2}|\nabla u|^2. \end{array}$$

Por tanto, usando las dos observaciones anteriores

$$\Delta v = -|\nabla v|^2 - \frac{\lambda u}{a+u}. \tag{81}$$

Usemos ahora la expersión local de la fórmula de Bochner,

$$\Delta Q = \sum_{i,j}\big(2v_{ij}^2 + 2\mathcal{R}_{ij}v_iv_j + 2\langle\nabla v, \nabla\Delta v\rangle\big), \tag{82}$$

donde $v_{ij} = e_j(e_i(v))$ y $v_j = e_j(v)$.

Comencemos a acotar a la ecuación 82: como $Q = |\nabla v|^2 = \sum_{i=1}^m v_i^2$, entonces $\sum_{i=1}^m v_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^m v_iv_j$. Además, por hipótesis $\sum_{i,j=1}^m \mathcal{R}_{ij} \geq -(m-1)R$, luego tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \Delta Q & = & \sum_{i,j}\big(2v_{ij}^2 + 2\mathcal{R}_{ij}v_iv_j + 2\langle\nabla v, \nabla\Delta v\rangle\big) \\ & = & \sum_{i,j}\big(2v_{ij}^2 + 2\mathcal{R}_{ij}v_iv_j + 2\langle\nabla v, \nabla(-|\nabla v|^2 - \lambda + \frac{\lambda a}{a+u})\rangle\big) \\ & \geq & \sum_{i,j}\big(2v_{ij}^2 - 2(m-1)RQ - 2\langle\nabla v, \nabla Q\rangle - \frac{2\lambda a}{(a+u)}|\nabla v|^2\big). \end{array} \tag{83}$$

Consideremos a nuestro marco ortonormal de manera tal que cumpla $|\nabla v|e_1 = \nabla v$; es decir, el primer campo es paralelo a la dirección del gradiente de v. Esto implica que en la descomposición para ∇v, en términos de la base ortonormal, $\sum_{i=2}^m c_ie_i = 0$, pues $c_i = 0$ para toda $i \neq 1$.

Observemos que

$$\begin{aligned}
\nabla|\nabla v|^2 &= \sum_{j=1}^{m} e_j(\sum_{i=1}^{m} v_i^2)e_j \mid_p \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} 2v_i e_j(v_i)e_j \mid_p \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} 2v_i(v_{ij})e_j \mid_p .
\end{aligned}$$

Entonces,

$$|\nabla|\nabla v|^2|^2 = \sum_{j=1}^{m}\big(\sum_{i=1}^{m} 2v_i v_i j\big)^2 = 4\sum_{j=1}^{m}\big(\sum_{i=1}^{m} v_i v_i j\big)^2.$$

Si ahora usamos que $|\nabla v|e_1 = \nabla v$ y que $\{e_i\}_{i=1}^m$ es marco ortonormal, esto implica que $|\nabla v|^2 = v_1^2$; entonces la suma sobre el índice i sólo aplica para $i = 1$:

$$\begin{aligned}
|\nabla|\nabla v|^2|^2 &= 4\sum_{j=1}^{m}\big(\sum_{i=1}^{m} v_i v_{ij}\big)^2 \\
&= 4\sum_{j=1}^{m}\big(v_1 v_{1j}\big)^2 \\
&= 4v_1^2\sum_{j=1}^{m} v_{1j}^2 \\
&= 4|\nabla v|^2\sum_{j=1}^{m} v_{1j}^2 \qquad (84)
\end{aligned}$$

Acotemos por debajo el primer término del lado izquierdo de la desigualdad 83, a saber $\sum_{i,j}^m v_{ij}^2$. Pensemos a los términos de la anterior suma como elementos de una matriz cuadrada,

$$V = \begin{bmatrix} v_{11}^2 & v_{12}^2 & v_{13}^2 & \dots & v_{1m}^2 \\ v_{21}^2 & v_{22}^2 & v_{23}^2 & \dots & v_{2m}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1}^2 & v_{m2}^2 & v_{m3}^2 & \dots & v_{mm}^2 \end{bmatrix}.$$

Entonces, la suma de todos los elementos de V acota por arriba a la suma de los elementos de la diagonal de V mas la suma de la primera fila: $\sum_{\alpha=1}^{m} v_{\alpha\alpha}^2 + 2\sum_{\alpha=2}^{m} v_{1\alpha}^2$. Esto es,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} v_{ij}^2 &\geq v_{11}^2 + 2\sum_{\alpha=2}^{m} v_{1\alpha}^2 + \sum_{\alpha=2}^{m} v_{\alpha\alpha}^2 \\
&\geq v_{11}^2 + 2\sum_{\alpha=2}^{m} v_{1\alpha}^2 + \frac{(\sum_{\alpha=2}^{m} v_{\alpha\alpha})^2}{m-1} \text{ (Cauchy-Schwartz)} \\
&= v_{11}^2 + 2\sum_{\alpha=2}^{m} v_{1\alpha}^2 + \frac{(\Delta v - v_{11})^2}{m-1} \text{ (marco geodésico)} \\
&\geq v_{11}^2 + 2\sum_{\alpha=2}^{m} v_{1\alpha}^2 + \frac{1}{m-1}((|\nabla v|^2 + \frac{\lambda u}{a+u}) + v_{11})^2 \text{ (Ecuación 81)} \\
&= v_{11}^2 + 2\sum_{\alpha=2}^{m} v_{1\alpha}^2 + \frac{1}{m-1}\big((|\nabla v|^2 + \frac{\lambda u}{a+u})^2 + v_{11}^2 + 2(|\nabla v|^2 + \frac{\lambda u}{a+u})v_{11}\big) \\
&= v_{11}^2 + \frac{1}{m-1}v_{11}^2 + 2\sum_{\alpha=2}^{m} v_{1\alpha}^2 + \frac{1}{m-1}(|\nabla v|^2 + \frac{\lambda u}{a+u})^2 + \frac{2v_{11}}{m-1}(|\nabla v|^2 + \frac{\lambda u}{a+u}) \\
&\geq \frac{m}{m-1}\sum_{j=1}^{m} v_{1j}^2 + \frac{1}{m-1}(|\nabla v|^2 + \frac{\lambda u}{a+u})^2 + \frac{2v_{11}}{m-1}(|\nabla v|^2 + \frac{\lambda u}{a+u}). \qquad (85)
\end{aligned}$$

Consideremos ahora que

$$\begin{aligned}
e_1(|\nabla v|^2) &= e_1(v_1^2) \\
&= 2v_1 e_1(v_1) \\
&= 2v_1 v_{11}
\end{aligned}$$

y

$$e_1(|\nabla v|^2) = \langle \nabla |\nabla v|^2, \nabla v \rangle |\nabla v|^{-1},$$

lo que nos permite deducir que

$$2v_{11} = \langle \nabla |\nabla v|^2, \nabla v \rangle |\nabla v|^{-2}. \qquad (86)$$

Finalmente, si sustituimos la ecuación 86 en el último término de la desigualdad 85, llegamos a que

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} v_{ij}^2 &\geq \frac{m}{m-1}\sum_{j=1}^{m} v_{1j}^2 + \frac{1}{m-1}(|\nabla v|^2 + \frac{\lambda u}{a+u})^2 \\ &+ \frac{1}{m-1}\langle \nabla |\nabla v|^2, \nabla v\rangle |\nabla v|^{-2}(|\nabla v|^2 + \frac{\lambda u}{a+u}). \qquad (87)\end{aligned}$$

Para obtener la desigualdad del lema 17.1 notemos que aquella es equivalente a la siguiente proposición si desarrollamos los productos:

$$\begin{aligned}\Delta Q &\geq \frac{m}{2(m-1)}|\nabla Q|^2 Q^{-1} - \langle \nabla v, \nabla Q\rangle Q^{-1}\big(\frac{2(m-2)}{m-1}Q\big) \\ &+ \langle \nabla v, \nabla Q\rangle Q^{-1}\big(\frac{2}{m-1}\frac{\lambda u}{a+u}\big) \\ &+ \frac{2}{(m-1)}Q^2 \\ &+ \frac{4}{m-1}\frac{2\lambda a}{a+u}Q - \frac{\lambda u}{a+u}Q - 2(m-1)RQ \\ &+ \frac{2}{m-1}\big(\frac{\lambda u}{a+u}\big)^2. \qquad (88)\end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación 87 en 83 y reescribiendo las ecuaciones 86 y 84 al recordar que $Q = |\nabla v|^2$:

$$2v_{11} = \langle \nabla |\nabla v|^2, \nabla v\rangle |\nabla v|^{-2} = \langle \nabla Q, \nabla v\rangle Q^{-1}$$

y

$$|\nabla |\nabla v|^2|^2 = 4|\nabla v|^2 \sum_{j=1}^{m} v_{1j}^2 \iff |\nabla Q|^2 Q^{-1}/4 = \sum_{j=1}^{m} v_{1j}^2,$$

$$\begin{aligned}\Delta Q &\geq \frac{m}{2(m-1)}|\nabla Q|^2 Q^{-1} + \frac{2}{m-1}(Q + \frac{\lambda u}{a+u})^2 \\ &+ \frac{2}{m-1}\langle \nabla Q, \nabla v\rangle Q^{-1}(Q + \frac{\lambda u}{a+u}) \\ &- 2(m-1)RQ - 2\langle \nabla v, \nabla Q\rangle - \frac{2\lambda a}{(a+u)}Q. \qquad (89)\end{aligned}$$

La ecuaciones 88 y 89 son equivalentes, lo que muestra el lema inicial.

□

18 Teorema de Li-Yau

Teorema 18.1. (Li-Yau)
Sea M^m una variedad riemanniana sin frontera. Supongamos que la curvatura de Ricci de M está acotada por

$$Ric_{ij} \geq -(m-1)R$$

para $R \geq 0$. Entonces existen constantes $C_1(m) \geq 0$ y $C_2(m) \geq 0$ tal que que el primer eigenvalor de M satisface que

$$\lambda \geq \frac{C_1(m)}{d^2} exp(-C_2(m)d\sqrt{R}),$$

donde d es el diámetro de M

Proof. Sea u una eigenfunción que satiface $\Delta u = -\lambda u$, integrando la igualdad anterior y por el Teorema de Stokes tenemos que

$$\begin{aligned} \int_M \Delta u &= \int_M (-\lambda u) \\ &= -\lambda \int_M u \\ &= 0. \end{aligned}$$

Al ser u no constante se tiene que cambia de signo; así como también se tiene que M es compacta, por tanto alcanza un máximo y un mínimo, además al no tener frontera dicho máximo y mínimo están al interior de M, así podemos normalizar a u de tal manera que se satisfaga que $\min u = -1$ y $\max u \leq 1$.

Ahora consideremos la siguiente función

$$v = \log(a+u)$$

para algún $a > 0$.

Si $x_0 \in M$ es un punto donde la función $Q = |\nabla v|^2$ alcanza su máximo, entonces tenemos todas las condiciones del *Lemma*5.6 entonces se cumple

$$\begin{aligned}\Delta Q &- \frac{m}{2(m-1)}|\nabla Q|^2 Q^{-1}\\ &+ \langle \nabla v, \nabla Q\rangle Q^{-1}\left(\frac{2(m-2)}{m-1}Q - \frac{2\lambda u}{(m-1)(a+u)}\right)Q\\ &\geq \frac{2}{m-1}Q^2 + \left(\frac{4\lambda u}{(m-1)(a+u)} - \frac{2\lambda a}{a+u} - 2R(m-1)\right)Q\\ &+ \frac{2}{m-1}\left(\frac{\lambda u}{m-1}\right)^2\end{aligned}$$

ahora como x_0 es maximo de Q se tiene que $\nabla Q = 0$ y que $\Delta Q < 0$, entonces la desigualdad anterior queda como

$$\begin{aligned}0 &\geq \Delta Q(x_0)\\ &\geq \frac{2}{m-1}Q^2(x_0) + \left(\underbrace{\frac{4\lambda u}{(m-1)(a+u)} - \frac{2\lambda a}{a+u}}_{(a)} - 2R(m-1)\right)Q(x_0)\\ &+ \underbrace{\frac{2}{m-1}\left(\frac{\lambda u}{m-1}\right)^2}_{(b)}\\ &\geq \frac{2}{m-1}Q^2(x_0) + \left(\underbrace{\frac{4\lambda}{(m-1)} - \frac{2\lambda(m+1)a}{(m-1)(a+u)}}_{(c)} - 2R(m-1)\right)Q(x_0)\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se da ya que solo quitamos el último termino (b) y rescribimos a (a) en (c).

Despejando a $Q(x_0)$ de la desigualdad anterior se tiene

$$\begin{aligned}Q(x) &\leq Q(x_0)\\ &\leq |\nabla \log(a+x_0)|^2\\ &\leq (m-1)^2 R + \frac{(m+1)a\lambda}{a-1}\end{aligned}$$

Para todo $x \in M$

Ahora si integramos a $Q^{\frac{1}{2}}$ a lo largo de una geodésica minimizante γ que une los puntos $u = -1$ y $u = \max u$, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{a}{a-1} &\leq \frac{a + \max u}{a-1} \\ \Rightarrow \log\left(\frac{a}{a-1}\right) &\leq \log\left(\frac{a+\max u}{a-1}\right) \end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{a}{a-1}\right) &\leq \log\left(\frac{a+\max u}{a-1}\right) \\ &= \log\left(a+\max u\right) - \log\left(a-1\right) \\ &= \log\left(a+\max u\right)\Big|_{-1}^{\max u} \\ &= \int_\gamma \frac{\delta}{\delta t}\log(a+u) \\ &= \int_\gamma \langle \nabla \log(a+u), \dot{\gamma}\rangle \\ &\leq \int_\gamma |\nabla \log(a+u)| \\ &\leq d\sqrt{(m-1)^2 R + \frac{(m+1)a\lambda}{a-1}} \end{aligned}$$

para todo $a > 0$, ahora si sustituimos $t = \frac{a-1}{a}$, tenemos que la desigualdad anterior queda así

$$\log\left(\frac{1}{t}\right) \leq d\sqrt{(m-1)^2 R + \frac{(m+1)\lambda}{t}}$$

y despejado se tiene

$$(m+1)\lambda \geq t\left(\frac{1}{d^2}\left(\log(\frac{1}{t}\right)^2 - (m-1)^2 R\right)$$

para todo $t \in (0,1)$. Maximizando el lado derecho de la desigualdad anterior como una función de t tenemos

$$t = \exp\left(-1 - \sqrt{1+(m-1)^2 R d^2}\right) = \exp(h)$$

ahora sustituyendo a t obtenemos la siguiente estimación

$$\begin{aligned}
(m+1)\lambda &\geq \exp(h)\left(\frac{1}{d^2}\log\left(\frac{1}{\exp(h)}\right)^2-(m-1)^2R\right)\\
&= \exp(h)\left(\tfrac{1}{d^2}(-h)^2-(m-1)^2R\right)\\
&= \exp\left(-1-\sqrt{1+(m-1)^2Rd^2}\right)\left(\frac{1}{d^2}\left(1+\sqrt{1+(m-1)^2Rd^2}\right)^2\right)\\
&- \exp\left(-1-\sqrt{1+(m-1)^2Rd^2}\right)((m-1)^2R)\\
&= \exp\left(-1-\sqrt{1+(m-1)^2Rd^2}\right)\left(\frac{1}{d^2}\left(2+2\sqrt{2+(m-1)^2Rd^2}+(m-1)^2Rd^2\right)\right)\\
&- \exp\left(-1-\sqrt{1+(m-1)^2Rd^2}\right)((m-1)^2R)\\
&= \exp\left(-1-\sqrt{1+(m-1)^2Rd^2}\right)\left(\frac{1}{d^2}+\frac{2\sqrt{1+(m-1)^2Rd^2}}{d^2}+\frac{1+(m-1)^2Rd^2}{d^2}\right)\\
&- \exp\left(-1-\sqrt{1+(m-1)^2Rd^2}\right)((m-1)^2R)\\
&= \frac{2\exp(-1-\sqrt{1+(m-1)^2Rd^2})}{d^2}(1+\sqrt{1+(m-1)^2Rd^2})
\end{aligned}$$

despejando se tiene a λ de la desigualdad anterior se tiene

$$\begin{aligned}
\lambda &\geq \frac{2\exp(-1-\sqrt{1+(m-1)^2Rd^2})}{(m+1)d^2}(1+\sqrt{1+(m-1)^2Rd^2})\\
&\geq \frac{C_1(m)(\exp(-C_2(m)d\sqrt{R})}{d^2}.
\end{aligned}$$

Para algunas $C_1(m)$ y $C_2(m)$ en $\mathbb{R}$. Notemos que para obtener a C_1 se deduce rápidamente y se tiene que solo depende de m, para deducir a C_2 se necesita hacer un poco de trabajo algebraico (cuentas) y también se tiene que solo depende de m, por la tanto el teorema queda demostrado. □

Cabe mencionar que en el caso en el que M es una variedad compacta con frontera, también hay estimaciones correspondientes para el primer eigenvalor de Dirichlet y para el primer eigenvalor de Neumman utilizando el principio del máximo.

References

[1] I. Chavel, Eigenvalues in Riemannian Geometry. Pure and Applied Mathematics. Academic Press 1984.

[2] P. Li, Geometric Analysis. Cambridge studies in advanced mathematics 134.

[3] R. Schoen and S. T. Yau, Lectures on Differential Geometry.

[4] J. Viaclovski, Critical metrics for riemannian curvature functionals

[5] Y. Xin, Geometry of Harmonic Maps.