

Geometría Diferencial en el espacio de Minkowski de dimensión tres

Gabriel Ruiz Hernández

Agosto de 2017

Introducción

Estas notas están basadas en un curso de licenciatura que impartí en el 2011 en la Facultad de Ciencias de la UNAM.

El objetivo de este manuscrito es dar una introducción a la Geometría Diferencial de curvas y superficies inmersas en el espacio de Minkowski de dimensión tres. Estas son parte de las matemáticas que uso A. Einstein para desarrollar la Teoría de la Relatividad Especial que presentó en 1905. Así que puede verse como un curso de aspectos matemáticos de dicha teoría.

Esta dirigido a estudiantes de matemáticas y áreas afines que hayan cursado cinco semestres de su carrera. Se dejaran algunos ejercicios para que el estudiante pueda tener practica con las técnicas que se van a explicar en clase.

En estas notas se han incorporado correcciones hechas por Fernando Frías, a quién agradezco su ayuda.

Lista de Figuras

1.1	Caracter causal de vectores	4
3.1	Plano hiperbólico-Espacio de De Sitter	42
3.2	Superficie tipo tiempo con curvaturas Gaussiana y media constantes igual a cero. Con curva tipo tiempo y vector tipo luz dados por $\gamma(s) = (0, \cosh(s), \sinh(s))$, $W = (-1, 0, 1)$	58
3.3	Isometría entre modelos del plano hiperbolico	60
4.1	Superficie tipo tiempo con curvaturas Gaussiana y media constantes igual a cero. Con curva tipo luz y vector tipo luz dados por $\gamma(s) = (\sin(s), \cos(s), s)$, $W = (1, 0, 1)$	95
4.2	Superficie tipo tiempo con curvaturas Gaussiana y media constantes igual a cero. Con curva tipo luz y vector tipo luz dados por $\gamma(s) = (\cosh(s), s, \sinh(s))$, $W = (\cos(5), \sin(5), 1)$	95

Contenido

Introducción	i
1 Alg. Lineal en Minkowski	1
1.1 La métrica de Lorentz	1
1.1.1 Producto cruz Lorentziano	3
1.2 Caracter causal	4
1.3 Transformaciones y grupo de Lorentz	8
1.3.1 Boosts	10
1.4 Transformaciones lineales autoadjuntas	14
1.5 Ejercicios	21
2 Curvas en el espacio de Minkowski	25
2.1 Fórmulas de Frenet-Serret para curvas	25
2.1.1 T, N, B es base ortonormal	25
2.1.2 T tipo espacio, N tipo luz, B tipo luz	28
2.1.3 T tipo luz, N tipo espacio, B tipo luz	29
2.2 Aplicaciones	31
2.3 Ejercicios	34
3 Superficies: Técnicas extrínsecas	37
3.1 Topología Diferencial de superficies lisas	37
3.2 Geometría Diferencial de superficies lisas	41
3.2.1 Carácter causal de superficies	41
3.2.2 La primera forma fundamental ó métricas inducidas	45
3.3 El operador de forma y la segunda forma fundamental	47
3.3.1 Curvatura Gaussiana y Curvatura Media vía el operador de forma	51
3.4 El hiperboloide \mathbb{H}^2 es isométrico al modelo de Poincare	59

3.5	Ejercicios	61
4	Conexión de Levi-Civita	65
4.1	Campos vectoriales	65
4.2	La conexión de Levi-Civita	69
4.3	Conexión inducida en una superficie	72
4.4	Curvatura, Ecuación de Gauss y de Codazzi	75
4.5	Geodésicas y líneas de curvatura	79
4.6	Campos vectoriales cerrados y conformes	83
4.7	Aplicaciones	86
4.7.1	Superficies umbílicas	86
4.7.2	Superficies de ángulo constante	87
4.8	Superficies con dirección principal canónica	90
4.9	Superficies con dirección nula canónica	92
4.10	Ejercicios	100
5	Gradiente, Hessiano, Laplaciano	103
5.1	Gradiente	103
5.2	Hessiano	106
5.3	El Laplaciano	108
5.4	Ejercicios	115
6	Superficies tipo luz	117
6.1	Ejemplos	117
6.2	Funciones eikonales vs Superficies nulas	118
6.3	Ejercicios	119

CAPITULO 1

Algebra lineal del espacio de Minkowski

1.1 La métrica de Lorentz

El espacio de Minkowski \mathbb{R}_1^3 consiste del espacio vectorial estandar \mathbb{R}^3 junto con la siguiente forma bilineal simétrica no degenerada llamada la métrica de Lorentz.

Definición 1.1.1 La métrica de Lorentz es la función bilineal

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}_1^3 \times \mathbb{R}_1^3 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } \langle u, v \rangle = ax + by - cz,$$

donde $u = (a, b, c)$ y $v = (x, y, z)$.

Definición 1.1.2 *Formas bilineales*

Una forma bilineal simétrica no degenerada es una función

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

donde V es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} de dimensión finita y que satisface: Los vectores u, v, w son elementos de V y $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Bilineal: $\langle u, v + \lambda w \rangle = \langle u, v \rangle + \lambda \langle u, w \rangle$, para todo u, v, w, λ .
- Simétrica: $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
- No degenerada: Si u es un vector tal que $\langle u, v \rangle = 0$ para todo $v \in \mathbb{R}_1^3$, entonces $u = 0$. En caso contrario se dice degenerada.

Un caso particular, de forma bilineal no degenerada es cuando la forma bilineal es positiva (negativa) definida, denotado $\langle \cdot, \cdot \rangle > 0$ (< 0) si satisface que para todo $u \neq 0$, $\langle u, u \rangle > 0$ (< 0).

Definición 1.1.3 *El cono de luz de \mathbb{R}_1^3 se define como el conjunto de vectores*

$$C = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle u, u \rangle = x^2 + y^2 - z^2 = 0, u \neq 0\}.$$

Nótese que el cono de luz tiene dos componentes conexas. Cada una en un semi-espacio abierto en el complemento del plano xy . Véase la figura 1.1.

Definición 1.1.4 *Sea $V \subset \mathbb{R}_1^3$ un subespacio lineal. El complemento ortogonal V^\perp de V es $V^\perp = \{u \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle u, v \rangle = 0 \text{ para todo } v \in V\}$.*

Proposición 1.1.1 *Sea $V \subset \mathbb{R}_1^3$ un subespacio lineal, entonces*

- $\dim \mathbb{R}_1^3 = \dim V + \dim V^\perp$.
- $(V^\perp)^\perp = V$.

Demostración. Note que si $\dim V = 0$, entonces $V = \{0\}$ y por lo tanto $V^\perp = \mathbb{R}_1^3$. Si $\dim V = 3$, entonces $V = \mathbb{R}_1^3$ y como la métrica es no degenerada se deduce que $V^\perp = \{0\}$.

Sea $v_1 = (a_1, b_1, c_1), \dots, v_k = (a_k, b_k, c_k)$ una base de V , donde $k = 1, 2$. Definimos la transformación lineal, $T : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}^k$, dada por

$$T(x, y, z) = (a_1x + b_1y - c_1z, \dots, a_kx + b_ky - c_kz).$$

Nótese que el núcleo $T^{-1}(0)$ de T es V^\perp y la dimensión de la imagen $T(\mathbb{R}_1^3)$ de T es igual a $\dim V$. Por un resultado clásico de álgebra lineal, obtenemos que $\dim \mathbb{R}_1^3 = \dim T^{-1}(0) + \dim T(\mathbb{R}_1^3) = \dim V^\perp + \dim V$.

La primera parte aplicada a V y V^\perp respectivamente implica que $\dim \mathbb{R}_1^3 = \dim V + \dim V^\perp$ y $\dim \mathbb{R}_1^3 = \dim V^\perp + \dim (V^\perp)^\perp$. Igualando obtenemos que $\dim V = \dim (V^\perp)^\perp$. Para concluir basta observar que $V \subset (V^\perp)^\perp$.

□

1.1.1 Producto cruz Lorentziano

Dado dos vectores en \mathbb{R}_1^3 linealmente independientes existe una única recta por el origen ortogonal a ambos. A continuación se muestra como construir la dirección de tal recta.

Definición 1.1.5 Sean $u = (a, b, c)$. $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}_1^3$. Definimos el producto cruz Lorentziano como

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & -k \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = (bz - cy, cx - az, bx - ay).$$

Sea $w = (r, s, t)$, un cálculo prueba que

$$bzs - cyr + cxs - azs - bxt + ayt = \langle u \times v, w \rangle = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{vmatrix}.$$

En consecuencia $\langle u \times v, u \rangle = 0$ y $\langle u \times v, v \rangle = 0$, es decir el producto Lorentziano de dos vectores es ortogonal a los factores: u, v . En particular, $u \times v$ también es ortogonal al subespacio generado por los vectores $\{u, v\}$.

Ejemplo 1.1.1 Sea $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}_1^3$ cualquier punto. El vector

$$q = \left(\frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

es ortogonal a p y geoméricamente es el reflejado (desde el punto de vista Euclidiano) de p con respecto al cono de luz. Se tiene la relación

$$\langle p, q \rangle = 0, \quad \langle q, q \rangle = -x^2 - y^2 + z^2 = -\langle p, p \rangle, \quad \langle p + q, p + q \rangle = 0.$$

De esta forma si p es tipo espacio, q es tipo tiempo y viceversa. Observe que cuando p es tipo luz, $q = p$ ya que en este caso $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Finalmente, es un ejercicio ver que

$$p \times q = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}(y, -x, 0),$$

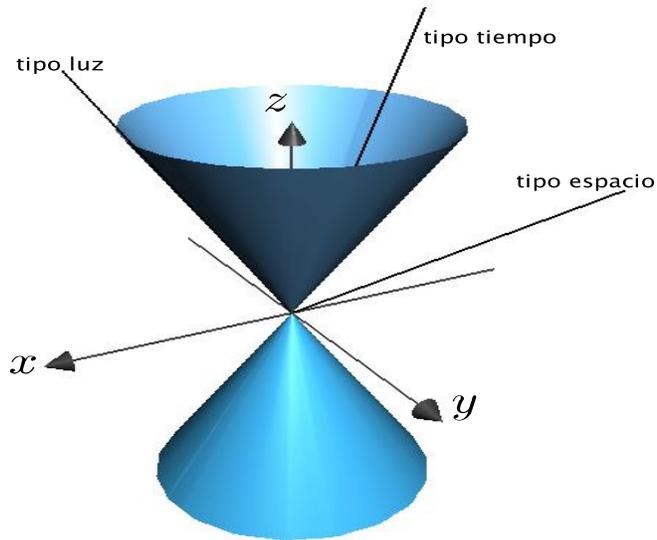
el cual está en el plano xy . El vector p genera una recta cuyo plano ortogonal está generado por $\{q, p \times q\}$.

1.2 Caracter causal

Definición 1.2.1 Sea $u \in \mathbb{R}_1^3$ un vector. Se dice que v tiene caracter causal:

- Tipo espacio si $\langle u, u \rangle > 0$ ó $u = 0$,
- Tipo tiempo $\langle u, u \rangle < 0$,
- Tipo luz o nulo $\langle u, u \rangle = 0$ y $u \neq 0$.

Figura 1.1: Caracter causal de vectores



En la siguiente tabla analizamos las posibles bases v_1, v_2, v_3 de \mathbb{R}_1^3 tal que $\langle v_i, v_j \rangle = 0, +1, -1$.

Tabla de bases

v_1	v_2	v_3	$\langle v_1, v_1 \rangle$	$\langle v_2, v_2 \rangle$	$\langle v_3, v_3 \rangle$	$\langle v_1, v_2 \rangle$	$\langle v_1, v_3 \rangle$	$\langle v_2, v_3 \rangle$
+	+	-	1	1	-1	0	0	0
+	+	0	1	1	0	0	0	1
+	-	0	1	-1	0	0	0	-1
0	0	+	0	0	1	-1	0	0

El concepto de caracter causal se puede extender a subespacios como sigue.

Definición 1.2.2 Dado un subespacio lineal $V \subset \mathbb{R}_1^3$, la métrica de Lorentz se puede restringir a V para obtener la función $\langle \cdot, \cdot \rangle_V : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Por simplicidad escribiremos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en lugar de $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ y la llamaremos métrica inducida (MI). Esta restricción es bilineal, simétrica. Un subespacio V se dice no degenerado si la métrica inducida es no degenerada. La métrica inducida puede ser degenerada. Se tienen las siguientes posibilidades complementarias. Se dice que V tiene caracter causal:

Caso V no degenerado

- tipo espacio si la MI es positiva definida,
- tipo tiempo si la MI es Lorentziana:
 $\max\{\dim U \mid U \text{ es subespacio lineal de } V, \langle \cdot, \cdot \rangle_U < 0\} = 1$

Caso V degenerado

- tipo luz o nulo si la MI es degenerada.

Proposición 1.2.1 Sea $V \subset \mathbb{R}_1^3$ un subespacio lineal no degenerado, entonces

- \mathbb{R}_1^3 se descompone en suma directa como $\mathbb{R}_1^3 = V \oplus V^\perp$.
- V^\perp también es no degenerado.

Demostración. Para ver la descomposición en suma directa, primero veamos que $V \cap V^\perp = \{0\}$:

Sea $w \in V \cap V^\perp$. Como $w \in V^\perp$, $\langle v, w \rangle = 0$ para todo $v \in V$. Pero también tenemos que $w \in V$, es decir en V hay un vector que es ortogonal a todos los vectores de V . Como V es no degenerado, concluimos que $w = 0$. Obtenemos que V y V^\perp sólo comparten el vector cero.

Por la Proposición 1.1.1, sabemos que $\dim \mathbb{R}_1^3 = \dim V + \dim V^\perp$. Los casos en que $\dim V = 0, 3$ siguen por cuestión de dimensión: Si $\dim V = 0$ se tiene que $V^\perp = \mathbb{R}_1^3$ y si $\dim V = 3$ entonces $V^\perp = \{0\}$. Si $\dim V = 1, 2$ entonces la dimensión de V^\perp es 2, 1 respectivamente. Esto prueba que V y V^\perp generan a \mathbb{R}_1^3 ya que estos subespacios son linealmente independientes pues sólo se intersectan en el vector cero.

Para la segunda afirmación, queremos demostrar que si en V^\perp hay un vector w que es ortogonal a todos los vectores de V^\perp entonces ese vector es el vector cero. Sea $w \in V^\perp$ tal que para todo $u \in V^\perp$, $\langle w, u \rangle = 0$, esto nos dice también que $w \in (V^\perp)^\perp$. Por la Proposición 1.1.1, $(V^\perp)^\perp = V$. Se deduce que $w \in V$. Esto implica que $w \in V \cap V^\perp$ y por la primera parte de esta prueba, esta intersección sólo contiene al vector cero. Esto prueba que $w = 0$ y entonces V^\perp es no degenerado. \square

Proposición 1.2.2 *El caracter causal de un plano V por el origen se caracteriza geoméricamente como*

- *es tipo espacio si y sólo si no interseca al cono de luz.*
- *es tipo luz si y sólo si es tangente al cono de luz.*
- *es tipo tiempo si y sólo si interseca al cono de luz pero no es tangente.*

Demostración. Por definición, V es tipo espacio si y sólo si la métrica inducida en V es positiva definida. Esto es equivalente a que todos los vectores en V sean tipo espacio. Así que V no interseca al cono de luz.

Ahora, V es tipo tiempo si y sólo si la métrica inducida tiene un vector tipo tiempo. Se deduce que V interseca al cono de luz, ya que los vectores tipo tiempo están acotados por dicho cono. Además, V no puede ser tangente al cono de luz, ya que un plano tangente no contiene vectores tipo tiempo.

Finalmente, V es tipo luz si y sólo si la métrica inducida es degenerada. De manera equivalente, V contiene a un vector no cero u tal que es ortogonal a todos los vectores en V . En particular, u es ortogonal a si mismo $\langle u, u \rangle = 0$. Como u es tipo luz, entonces V tiene que ser tangente al cono de luz a lo largo de la recta generada por u . Ya que de otra forma en V habría vectores tipo tiempo y por tanto existiría un subespacio $U \subset V$ tal que $\langle \cdot, \cdot \rangle_U$ sería negativo definida lo cual dice que V es tipo tiempo. \square

Para cualquier par de eventos u, v linealmente independientes tenemos que

u	v	$\langle u \rangle^\perp$	$\text{span} \{u, v\}$	$u \times v$
-	-	+	-	+
-	+	+	-	+
-	0	+	-	+
+	0	-	0	0
+	+	-	+	-
0	0	0	-	+

Proposición 1.2.3 *Si u, v son tipo tiempo, entonces*

$$|\langle u, v \rangle| \geq |u||v|, \text{ con igualdad si y sólo si } u \text{ es colineal a } v.$$

Demostración. Introducimos la notación $u = (a, b, c)$ y $v = (x, y, z)$. Como u, v son tipo tiempo, entonces son linealmente independientes si y sólo si generan un plano tipo tiempo. Lo cual es equivalente a que $u \times v = (bz - cy, cx - az, bx - ay)$ es tipo espacio. Esto pasa si y sólo si $(bz - cy)^2 + (cx - az)^2 - (bx - ay)^2 > 0$. Ahora, resta reescribir esta desigualdad:

$$\begin{aligned} (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 &> (bx - ay)^2 \\ 2abxy - 2bcyz - 2acxz &> a^2y^2 - a^2z^2 + b^2x^2 - b^2z^2 - c^2x^2 - c^2y^2 \\ (ax + by - cz)^2 &> (a^2 + b^2 - c^2)(x^2 + y^2 - z^2) \\ |\langle u, v \rangle| &> |u||v|. \end{aligned}$$

Observe que las anteriores desigualdades se convierten en igualdades si y sólo si u y v son colineales, lo cual es equivalente a que $u \times v = 0$. \square

Definición 1.2.3 *Sea $T = \{u \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle u, u \rangle < 0\}$, el conjunto de los vectores tipo tiempo en el espacio de Minkowski. T tiene dos componentes conexas T^+ y T^- delimitadas por el cono de luz, donde $T^+ = \{(x, y, z) \in T \mid z > 0\}$ y $T^- = \{(x, y, z) \in T \mid z < 0\}$. Para cada $u \in T$ definimos el cono temporal (conteniendo a u) como*

$$C(u) = \{v \in T \mid \langle u, v \rangle < 0\}.$$

Proposición 1.2.4 *Sea $u = (a, b, c)$ un vector tipo tiempo. Entonces*

$$C(u) = \{(x, y, z) \in T \mid cz > 0\},$$

es decir el conjunto de vectores tipo tiempo cuya tercer coordenada tiene el mismo signo que c . En particular, dos vectores u, v tipo tiempo están en un mismo cono temporal $C(u)$ para algún $w \in T$ si y sólo si $\langle u, v \rangle < 0$.

Demostración. La idea de la prueba es geométrica y usa el hecho bien conocido que para cualquier plano $P = \{(x', y', z') \mid Ax' + By' - Cz' = D\}$ se tiene que $\mathbb{R}^3 \setminus P = P^+ \cup P^-$ es una unión de los dos semi-espacios abiertos $P^+ = \{(x', y', z') \mid Ax' + By' - Cz' > D\}$ y $P^- = \{(x', y', z') \mid Ax' + By' - Cz' < D\}$. Como u es tipo tiempo, $Q := \langle u \rangle^\perp = \{(x', y', z') \in \mathbb{R}_1^3 \mid ax' + by' - cz' = 0\}$ es un plano tipo espacio. Sea $v \in C(u)$, entonces $\langle u, v \rangle < 0$, es decir $v \in Q^- \cap T$.

Además, se deduce que $u \in Q^-$. Ya que si u estuviera en Q^+ existiría $\lambda > 0 \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda u + (1-\lambda)v \in Q$, es decir $\langle \lambda u + (1-\lambda)v, \lambda u + (1-\lambda)v \rangle = 0$ pero esto es una contradicción:

$\langle \lambda u + (1-\lambda)v, \lambda u + (1-\lambda)v \rangle = \lambda^2 \langle u, u \rangle + 2\lambda(1-\lambda) \langle u, v \rangle + (1-\lambda)^2 \langle v, v \rangle < 0$. Esto implica que u y v están en un mismo semi-espacio que contiene a una de las dos componentes conexas de T . Lo cual prueba que z y c tienen el mismo signo.

Para la otra contención: Sea $v = (x, y, z) \in T$ tal que $cz > 0$. Vamos a probar que $\langle u, v \rangle < 0$. Ahora observemos que los vectores $(a, b, 0)$ y $(x, y, 0)$ son tipo espacio. Deducimos que $ax + by < \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{x^2 + y^2} < |cz| = cz$. La primera igualdad es Cauchy-Schwarz y la segunda desigualdad se usó la condición de que u y v son tipo tiempo. Esto prueba que $\langle u, v \rangle < 0$.

1.3 Isometrías: Transformaciones y grupo de Lorentz

Definición 1.3.1 Una función biyectiva $f : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ se dice transformación de Poincaré o isometría del espacio de Minkowski si preserva la métrica de Lorentz, es decir para todo $u, v \in \mathbb{R}_1^3$

$$\langle f(u) - f(v), f(u) - f(v) \rangle = \langle u - v, u - v \rangle. \quad (1.1)$$

Bajo la composición forman un grupo llamado el grupo de isometrías. También se conoce como Grupo de Poincaré o Grupo de Lorentz no homogéneo.

El siguiente resultado y su prueba es análogo a la geometría Euclidiana.

Proposición 1.3.1 Si f es una isometría del espacio de Minkowski que deja fijo al origen entonces es una transformación lineal.

Demostración. Sea 0 el origen del espacio de Minkowski. En primer lugar en la Ecuación (1.1) sustituimos $v = 0$ y $f(v) = 0 : \langle f(u), f(u) \rangle = \langle u, u \rangle$. En segundo lugar si la desarrollamos bilinealmente y simplificamos la expresión usando la igualdad del paso anterior obtenemos:

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle.$$

Veamos que esta igualdad junto con el hecho que la métrica es no degenerada implican que f es lineal:

Como f es biyectiva, cualquier w se puede escribir como $w = f(z)$. Entonces para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ $\langle f(u + \lambda v), w \rangle = \langle f(u + \lambda v), f(z) \rangle = \langle u + \lambda v, z \rangle$. Procedemos de manera análoga en el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} \langle f(u) + \lambda f(v), w \rangle &= \langle f(u) + \lambda f(v), f(z) \rangle = \langle f(u), f(z) \rangle + \lambda \langle f(v), f(z) \rangle \\ &= \langle u, z \rangle + \lambda \langle v, z \rangle = \langle u + \lambda v, z \rangle. \end{aligned}$$

Como la métrica es no degenerada, de la igualdad probada:

$\langle f(u + v), w \rangle = \langle f(u) + \lambda f(v), w \rangle$ podemos concluir que

$$f(u + v) = f(u) + \lambda f(v).$$

□

Las transformaciones de Lorentz son las isometrías lineales.

Definición 1.3.2 Una transformación lineal biyectiva $f : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ se dice isometría lineal o transformación de Lorentz lineal del espacio de Minkowski si preserva la métrica de Lorentz, es decir

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle.$$

Forman un subgrupo del grupo de isometrías llamado Grupo de Lorentz.

Este subgrupo de isometrías lineales es isomorfo a

$$O_1(3) = \{A \in GL(3, \mathbb{R}) \mid A^t G A = G\},$$

donde

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Equivalentemente, estas matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

satisfacen

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 - a_{31}^2 = 1, \quad (1.2)$$

$$a_{12}^2 + a_{22}^2 - a_{32}^2 = 1, \quad (1.3)$$

$$a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{33}^2 = -1, \quad (1.4)$$

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} - a_{31}a_{32} = 0, \quad (1.5)$$

$$a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} - a_{31}a_{33} = 0, \quad (1.6)$$

$$a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} - a_{32}a_{33} = 0. \quad (1.7)$$

Es decir, las columnas de A forman una base ortonormal en la métrica de Lorentz de \mathbb{R}_1^3 . Las dos primeras columnas son vectores tipo espacio y la tercera es un vector tipo tiempo.

Además hay que observar que si $A \in O_1(3)$ entonces $\det A = \pm 1$. Esta afirmación es correcta ya que

$$-\det A^2 = \det A^t \det G \det A = \det(A^t G A) = -1 \text{ implica que } \det A = \pm 1.$$

1.3.1 Boosts

Introducimos ahora el subgrupo $O_1^+(3) = \{A \in O_1(3) \mid \det A = +1\}$.

Sea $O_1^{++}(3) = \{A \in O_1(3) \mid \det A = +1, a_{33} > 0\}$.

Definición 1.3.3 Decimos que $A \in O_1(3)$ preserva la orientación temporal si $A(T^+) = T^+$.

Observación 1.3.1 La transformación $A \in O_1(3)$ preserva la orientación temporal si y sólo si $A \in O_1^{++}(3)$. Para visualizar esta afirmación, hay que aplicar A al vector $e_3 = (0, 0, 1)$ y usar la Proposición 1.2.4.

Lema 1.3.1 Sea $A \in O_1(3)$ una isometría que deja fija punto a punto a una recta L tipo tiempo ó tipo luz en \mathbb{R}_1^3 . Entonces $A \in O_1^{++}(3)$.

Demostración. Primero recordemos que A preserva el carácter causal de cada vector en \mathbb{R}_1^3 . Supongamos que $L = \langle v \rangle$. En particular, $A(T) = T$. Si L es tipo tiempo, tenemos que para todo $u \in T$, $\langle v, u \rangle = \langle A(v), A(u) \rangle = \langle v, A(u) \rangle$. Por la Proposición 1.2.4, u y $A(u)$ están en $C(v)$. Como esto es cierto para todo $u \in T$, podemos concluir que A preserva el cono de tiempo $C(u)$ de u . Pero para todo $u \in T$, $C(u) = T^+$ ó $C(u) = T^-$. Esto confirma que A conserva la orientación temporal.

Si L es tipo luz, como A preserva a L punto a punto entonces A preserva a la componente conexas del cono de luz que contiene a v pues A preserva el carácter causal. Así A preserva las dos componentes conexas del cono de luz. En particular, A preserva las dos componentes conexas T^+ y T^- del conjunto de vectores tipo tiempo T . Es decir, A preserva la orientación temporal.

□

Aquí estudiamos las isometrías de \mathbb{R}_1^3 en $O_1^{++}(3)$ que dejan fijo punto a punto a un subespacio de dimensión uno.

L tipo luz

Consideremos el caso cuando $L = \text{span}\{e_2 + e_3\}$.

Sea A la matriz en $O_1^{++}(3)$, para que A deje fija punto a punto a la recta L , necesitamos que $A(e_2 + e_3) = e_2 + e_3$. Esto implica que $a_{13} = -a_{12}$, $a_{23} = 1 - a_{22}$ y $a_{33} = 1 - a_{32}$. Las ecuaciones (1.4) y (1.7) se transforman en

$$a_{12}^2 + 1 - 2a_{22} + a_{22}^2 - 1 + 2a_{32} - a_{32}^2 = -1, \quad (1.8)$$

$$-a_{12}^2 + a_{22} - a_{22}^2 - a_{32} + a_{32}^2 = 0. \quad (1.9)$$

Las cuales prueban que $a_{32} = -1 + a_{22}$ y por lo tanto $a_{33} = 2 - a_{22}$. Las ecuaciones (1.5) y (1.6) se transforman en

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31} - a_{31}a_{22} = 0, \quad (1.10)$$

$$-a_{11}a_{12} + a_{21} - a_{21}a_{22} - 2a_{31} + a_{31}a_{22} = 0, \quad (1.11)$$

en consecuencia $a_{31} = a_{21}$. Usamos ahora la ecuación (1.2) que se transforma en $a_{11}^2 + a_{21}^2 - a_{21}^2 = 1$, entonces $a_{11} = \pm 1$. Análogamente, la ecuación (1.3) toma la forma $a_{12}^2 + a_{22}^2 - 1 + 2a_{22} - a_{22}^2 = 1$ implica que $a_{22} = 1 - \frac{a_{12}^2}{2}$. Finalmente, usamos la ecuación (1.10) para deducir que $a_{21} = \mp a_{12}$. Vamos a denotar $a_{12} = t$ entonces la matriz A se simplifica a

$$A = \begin{pmatrix} \pm 1 & t & -t \\ \mp t & 1 - \frac{t^2}{2} & \frac{t^2}{2} \\ \mp t & -\frac{t^2}{2} & 1 + \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Un cálculo directo prueba que $\det(A) = \pm 1$. Entonces como queremos que $A \in O_1^{++}(3)$ escojemos $+1$ en la entrada a_{11} y con esto concluimos lo siguiente. Concluimos que el grupo

$$G = \left\{ A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & -t \\ -t & 1 - \frac{t^2}{2} & \frac{t^2}{2} \\ -t & -\frac{t^2}{2} & 1 + \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

deja fija punto a punto a L .

Lema 1.3.2 Sean u, v , dos vectores tipo luz. Entonces $\langle u, v \rangle = 0$ si y sólo si son linealmente dependientes, es decir $u = \lambda v$ para alguna $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración. Si $u = \lambda v$, $\langle u, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = 0$.

El recíproco tiene por hipótesis que $\langle u, v \rangle = 0$, es decir $ax + by - cz = 0$, donde $u = (a, b, c)$ y $v = (x, y, z)$. Además, como son tipo luz $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $a^2 + b^2 - c^2 = 0$. Si multiplicamos estas dos últimas ecuaciones tenemos que $z^2 c^2 = (x^2 + y^2)(a^2 + b^2) = a^2 x^2 + y^2 b^2 + x^2 b^2 + y^2 a^2$ y si elevamos al cuadrado la primera ecuación: $c^2 z^2 = (ax + by)^2 = a^2 x^2 + 2abxy + b^2 y^2$. Igualamos estas dos últimas ecuaciones para obtener $x^2 b^2 + y^2 a^2 = 2abxy$, es decir $(xb - ya)^2 = 0$. Así $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \lambda$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Sustituimos $a = \lambda x$ y $b = \lambda y$ arriba: $cz = \lambda x^2 + \lambda y^2 = \lambda z^2$. Se deduce que $c = \lambda z$, esto prueba que $u = \lambda v$. \square

Proposición 1.3.2 Sea $A \in O_1(3)$ una isometría lineal. Si $A(v) = v$, $v \in \mathbb{R}_1^3$, entonces A deja invariante a los planos de la forma $\langle v \rangle^\perp + p$, para todo $p \in \mathbb{R}_1^3$.

Demostración.

- Si v es tipo tiempo o tipo espacio.

Observemos que A deja invariante a $P = \langle v \rangle^\perp$, es decir

$$A(\langle v \rangle^\perp) = \langle v \rangle^\perp. \text{ Se sigue que } A(\langle v \rangle^\perp + p) = \langle v \rangle^\perp + A(p).$$

Consideremos una descomposición $p = p_1 + p_2 \in \langle v \rangle + \langle v \rangle^\perp$ y

$$A(p) = A(p_1) + A(p_2) = p_1 + A(p_2) \in p_1 + \langle v \rangle^\perp. \text{ Por lo tanto}$$

$$\begin{aligned} A(\langle v \rangle^\perp + p) &= \langle v \rangle^\perp + A(p) = \langle v \rangle^\perp + p_1 \\ &= \langle v \rangle^\perp + p_1 + p_2 = \langle v \rangle^\perp + p. \end{aligned}$$

Aquí usamos el hecho que si v es tipo espacio o tiempo $\mathbb{R}_1^3 = \langle v \rangle + \langle v \rangle^\perp$ es una descomposición ortogonal.

- Si v es tipo luz.

No hay una descomposición ortogonal del espacio usando $\langle v \rangle$ y $\langle v \rangle^\perp$ ya que v está en el plano tipo luz $\langle v \rangle^\perp$. Procedemos como sigue: Sea w tipo luz tal que $\langle v, w \rangle = 1$, en consecuencia w es linealmente independiente de v . Ahora se tiene una descomposición $\mathbb{R}_1^3 = \langle w \rangle + \langle v \rangle^\perp$.

Notemos que $1 = \langle w, v \rangle = \langle A(w), A(v) \rangle = \langle A(w), v \rangle$ y que $A(w)$ también es tipo luz. Se deduce que $\langle A(w) - w, v \rangle = 0$, es decir $A(w) \in w + \langle v \rangle^\perp$. En particular, $A(\lambda w) \in \lambda w + \langle v \rangle^\perp$. Si consideremos la descomposición $p = p_1 + p_2 \in \langle w \rangle + \langle v \rangle^\perp$ y $A(p) = A(p_1) + A(p_2) \in p_1 + \langle v \rangle^\perp + A(p_2) = p_1 + \langle v \rangle^\perp$. Se sigue que

$$\begin{aligned} A(\langle v \rangle^\perp + p) &= \langle v \rangle^\perp + A(p) = \langle v \rangle^\perp + p_1 \\ &= \langle v \rangle^\perp + p_1 + p_2 = \langle v \rangle^\perp + p. \end{aligned}$$

□

Corolario 1.3.1 *Sea L una recta en \mathbb{R}_1^3 y consideremos la acción de los elementos de $O_1^{++}(3)$ en \mathbb{R}_1^3 que dejan fijo punto a punto a L . Entonces la componente conexa de la órbita, bajo dichos elementos, de un punto p en $\mathbb{R}_1^3 \setminus L$ es una parábola, una elipse o una hipérbola, dependiendo si L es tipo luz, espacio o tiempo respectivamente. Cuando L es tipo espacio y p es tipo luz, la órbita también puede ser una semirecta.*

Demostración. Vamos a denotar por A a cualquier elemento de $O_1^{++}(3)$ que deja fijo punto a punto a L .

Si L es tipo luz, L^\perp es un plano tangente al cono de luz a lo largo de L . Vamos a usar la notación, $L_p^\perp = p + L^\perp$ el cual es un plano que pasa por p y $L_p = L + p$ la cual es una recta paralela a L y que pasa por p . Entonces, por la Proposición 1.3.2, L_p^\perp es invariante y en consecuencia la órbita de p está en este plano L_p^\perp .

Si p es tipo luz, $A(p)$ también es tipo luz para todo $A \in O_1^{++}(3)$. Esto implica que la órbita de p está además en el cono de luz. Para concluir este caso, notemos que la intersección del cono de luz con L_p^\perp es una parábola.

Además, si p no es vector tipo luz tenemos también que L_p intersecta al cono de luz en una parábola. Afirmamos que la órbita de p es una traslación de dicha parábola: Sea q el punto de intersección de L_p con el cono de luz. Veamos que la órbita de p es la traslación de la órbita de q con vector de traslación $p - q$. Para ver esto notemos que $L_p \subset L_p^\perp$ y que si $A(q)$ es un

elemento de la órbita de q entonces $A(q) + (q - p)$ es un elemento de la órbita de p pues $A(q) + (q - p) = A(p) + A(q - p) = A(p)$.

Finalmente, investiguemos el caso cuando L es una recta no degenerada, es decir tipo tiempo o tipo espacio: El plano L^\perp es un plano no degenerado, el cual es tipo espacio si L es tipo tiempo ó tipo tiempo si L es tipo espacio. Como vimos antes la órbita de p está contenida en el plano L_p^\perp . Sea q el punto de intersección de L_p^\perp con L , en particular $A(q) = q$. Entonces si p no es un punto tipo luz, su órbita satisface que $\langle A(p) - q, A(p) - q \rangle$ es constante pues $\langle A(p) - q, A(p) - q \rangle = \langle A(p) - A(q), A(p) - A(q) \rangle = \langle p - q, p - q \rangle$. Esto prueba que si L_\perp es tipo tiempo la órbita de p es una hipérbola y que si L_\perp es tipo espacio la órbita de p es una elipse.

Cuando p es tipo luz: La órbita de p es la intersección de L_p^\perp con el cono de luz. Por lo tanto, si L_p^\perp es tipo espacio dicha órbita es una elipse y si L_p^\perp es tipo tiempo, la componente conexa de la órbita de p es una semirecta cuando L_p^\perp pasa por el origen de \mathbb{R}_1^3 ó una hipérbola si L_p^\perp no pasa por el origen. \square

1.4 Transformaciones lineales autoadjuntas

Definición 1.4.1 En el estudio del espacio de Minkowski es necesario introducir un nuevo tipo de base lineal.

- Una *base seudo ortonormal* de \mathbb{R}_1^3 es una base lineal de la forma $\{v_1, v_2, v_3\}$ donde v_1 es espacial de norma uno, v_2 y v_3 son tipo luz tal que $\langle v_2, v_3 \rangle = 1$. Además, v_1 es ortogonal al plano tipo tiempo generado por v_2, v_3 .
- Sea V un subespacio tipo tiempo de dimensión dos en \mathbb{R}_1^3 . Una *base seudo ortonormal* para V consiste de una base lineal de dos vectores nulos v_1, v_2 tales que $\langle v_1, v_2 \rangle = 1$.

Ejemplo 1.4.1 Una base seudo ortonormal de \mathbb{R}_1^3 consiste de los vectores $\{v_1 = \frac{1}{\sqrt{25}}(-4, 3, 0), v_2 = (3, 4, 5), v_3 = \frac{1}{50}(3, 4, -5)\}$. Los vectores v_2, v_3 generan un plano tipo tiempo ya que son linealmente independientes y el vector espacial v_1 es ortogonal a dicho plano.

En general, si $v_2 = (x, y, z)$ es un vector tipo luz: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, entonces $v_3 = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x, y, -z)$ es otro vector tipo luz tal que $\langle v_2, v_3 \rangle = 1$. El vector espacial $v_1 = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(-y, x, 0)$ completa una base seudo ortonormal de \mathbb{R}_1^3 .

Hemos probado que cualquier vector tipo luz se puede completar a una base seudo ortonormal del espacio de Minkowski.

Observación 1.4.1 Dado una base seudo ortonormal podemos construir una base ortonormal y viceversa:

Si $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base seudo ortonormal de \mathbb{R}_1^3 entonces los vectores

$$v_1, \frac{1}{\sqrt{2}}(v_2 + v_3), \frac{1}{\sqrt{2}}(v_2 - v_3)$$

forman una base ortonormal. Los dos primeros vectores son espaciales y el último es temporal.

Si $\{w_1, w_2, w_3\}$ es una base ortonormal de \mathbb{R}_1^3 con w_3 tipo tiempo entonces los vectores

$$v_1 := w_1, v_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}(w_2 + w_3), v_3 := \frac{1}{\sqrt{2}}(w_2 - w_3)$$

forman una base seudo ortonormal. El primer vector es espacial y los otros dos son nulos. Similarmente, dada una base seudo ortonormal v_1, v_2 de un plano temporal V entonces se puede construir una base ortonormal de V y viceversa. Es un ejercicio.

Lema 1.4.1 *Sea V un plano no degenerado en \mathbb{R}_1^3 . Sea v_1, v_2 cualquier base lineal de V . Si v y w son dos vectores tales que $\langle v, v_i \rangle = \langle w, v_i \rangle$ para $i = 1, 2$ entonces $v = w$.*

Demostración. Nótese que $\langle v - w, v_1 \rangle = 0 = \langle v - w, v_2 \rangle$. Como v_1, v_2 es una base de V , deducimos que $\langle v - w, z \rangle = 0$ para cualquier vector $z \in V$. Como V es no degenerado, es decir la métrica de Lorentz restringida a V es no degenerado, podemos concluir que $v - w = 0$. \square

Proposición 1.4.1 *Sea v_1, v_2 una base seudo ortonormal de un plano tipo tiempo V . Si $v \in V$ entonces $v = \langle v, v_2 \rangle v_1 + \langle v, v_1 \rangle v_2$.*

Demostración. Por el Lema 1.4.1, basta ver que el producto de Lorentz de los vectores v y $\langle v, v_2 \rangle v_1 + \langle v, v_1 \rangle v_2$ con la base v_1, v_2 son iguales. Pero $\langle v, v_1 \rangle = \langle \langle v, v_2 \rangle v_1 + \langle v, v_1 \rangle v_2, v_1 \rangle$ y $\langle v, v_2 \rangle = \langle \langle v, v_2 \rangle v_1 + \langle v, v_1 \rangle v_2, v_2 \rangle$ pues v_1 y v_2 son vectores nulos tal que $\langle v_1, v_2 \rangle = 1$. \square

En geometría extrínseca de superficies se aplican las propiedades de las transformaciones lineales del espacio de Minkowski llamadas autoadjuntas.

Este tipo de transformaciones no necesariamente son diagonalizables como en el caso euclidiano. Esta diferencia tiene implicaciones geométricas. En concreto estudiaremos transformaciones autoadjuntas de un espacio vectorial de dimensión dos tipo tiempo en sí mismo.

Definición 1.4.2 Sea $V \subset \mathbb{R}_1^3$ un subespacio vectorial no degenerado, es decir un subespacio de dimensión dos tipo tiempo ó tipo espacio. Una transformación lineal $T : V \longrightarrow V$ se dice autoadjunta o simétrica si para todo $u, v \in V$,

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle.$$

Definición 1.4.3 Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal autoadjunta. Un vector $v \in V$ tal que $T(v) = av$ para algún $a \in \mathbb{R}$ se llama *vector propio* de T y a se llama *valor propio* T .

Observación 1.4.2 Cuando tenemos una transformación lineal autoadjunta con respecto a un producto interno de un espacio vectorial V , resulta que siempre existe una base ortonormal de vectores propios de la transformación. Sin embargo, esto ya no es válido cuando tenemos una transformación autoadjunta con respecto a un producto escalar tipo Lorentz en el espacio vectorial V . Es decir, los vectores propios de una transformación autoadjunta no necesariamente existen si su dominio V es un subespacio de dimensión dos tipo tiempo. En cambio, cuando V es tipo espacio la restricción de el producto escalar de Lorentz a V resulta ser un producto interno. Por tanto para cualquier transformación lineal autoadjunta, existe una base ortonormal de vectores propios.

Proposición 1.4.2 Sea V un subespacio no degenerado de dimensión dos y sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal autoadjunta. Sean $v, w \in V \setminus \{0\}$ dos vectores ortogonales que no son vectores nulos. Si v es vector propio de T entonces w es vector propio de T .

Demostración. Por hipótesis, $T(v) = av$ para algún $a \in \mathbb{R}$. Veamos que $T(w)$ es un múltiplo de w . Para ello es necesario y suficiente probar que $T(w)$ es ortogonal a v :

$$\langle T(w), v \rangle = \langle w, T(v) \rangle = \langle w, av \rangle = 0.$$

Por supuesto, aplicamos la condición de que T es autoadjunta. Con esta propiedad podemos hacer el cálculo siguiente. Como v y w no son vectores nulos, entonces deben ser ó tipo espacio ó tipo tiempo:

$$T(w) = \frac{\langle T(w), v \rangle}{\langle v, v \rangle} v + \frac{\langle T(w), w \rangle}{\langle w, w \rangle} w = \frac{\langle T(w), w \rangle}{\langle w, w \rangle} w.$$

Es decir, w es un vector propio de T . La combinación lineal anterior es consecuencia del Lema 1.4.1. \square

Ejemplo 1.4.2 Sea V el plano generado por el vector tipo espacio $e_2 = (0, 1, 0)$ y el vector tipo tiempo $e_3 = (0, 0, 1)$. Para definir una transformación lineal T basta decir qué valores toma en los dos vectores anteriores: $T(e_2) = -e_2$ y $T(e_3) = e_3$. Por linealidad deducimos que

$$T(0, y, z) = (0, -y, z).$$

Nótese que T es una isometría ya que $\langle T(0, y, z), (0, a, b) \rangle = -ay - bz = \langle (0, y, z), T(0, a, b) \rangle$. Además, se satisface que $T^2(0, y, z) = T(T(0, y, z)) = (0, y, z)$. Se sigue que T es autoadjunta:

$$\langle T(0, y, z), (0, a, b) \rangle = \langle T^2(0, y, z), T(0, a, b) \rangle = \langle (0, y, z), T(0, a, b) \rangle.$$

Ejemplo 1.4.3 (*Transformación lineal autoadjunta que no es diagonalizable*)

Sea V como en el ejemplo anterior, es decir el plano yz . Supongamos que T tiene la siguiente representación matricial en la base e_2, e_3 .

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

con $b \neq 0$. Explícitamente, $T(0, y, z) = (0, ay + bz, -by + az)$. Entonces

$$\langle T(0, y, z), (0, r, s) \rangle = ayr + bzs + bys - azs = \langle (0, y, z), T(0, r, s) \rangle.$$

En este ejemplo, T no es necesariamente una isometría.

Además, vamos a verificar que T no es diagonalizable: Si lo fuera, existirían $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(0, y, z) \in V \setminus \{0\}$ tal que

$$(0, ay + bz, -by + az) = T(0, y, z) = \lambda(0, y, z).$$

Igualando las coordenadas tenemos dos ecuaciones. Las cuales son equivalentes a $-ayz - bz^2 = -\lambda yz$ y $-by^2 + azy = \lambda zy$. Finalmente, sumando las ecuaciones se deduce que, $b(y^2 + z^2) = 0$ lo cual no es posible ya que $b \neq 0$.

Ejemplo 1.4.4 Vamos a trabajar sobre el mismo plano yz como subespacio V . Supongamos que $T : V \rightarrow V$ tiene la siguiente representación matricial en la base $u_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $u_2 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}.$$

Nótese, que esta base de V consiste de vectores tipo luz con $\langle u_1, u_2 \rangle = 1$. Como $(0, y, z) = \frac{y+z}{\sqrt{2}}u_1 + \frac{y-z}{\sqrt{2}}u_2$, la transformación T está dada por: $T(0, y, z) = \frac{y+z}{\sqrt{2}}T(u_1) + \frac{y-z}{\sqrt{2}}T(u_2) = \frac{y+z}{\sqrt{2}}au_1 + \frac{y-z}{\sqrt{2}}(u_1 + au_2)$. La combinación lineal de $(0, r, s)$ en la base dada es $(0, r, s) = \frac{r+s}{\sqrt{2}}u_1 + \frac{r-s}{\sqrt{2}}u_2$. Ahora podemos hacer el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} \langle T(0, y, z), (0, r, s) \rangle &= \langle \frac{y+z}{\sqrt{2}}au_1 + \frac{y-z}{\sqrt{2}}(u_1 + au_2), \frac{r+s}{\sqrt{2}}u_1 + \frac{r-s}{\sqrt{2}}u_2 \rangle \\ &= a \frac{y+z}{\sqrt{2}} \frac{r-s}{\sqrt{2}} + \frac{y-z}{\sqrt{2}} \frac{r-s}{\sqrt{2}} + a \frac{y-z}{\sqrt{2}} \frac{r+s}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Intercambiando las variables tenemos la relación,

$$\langle (0, y, z), T(0, r, s) \rangle = a \frac{r+s}{\sqrt{2}} \frac{y-z}{\sqrt{2}} + \frac{r-s}{\sqrt{2}} \frac{y-z}{\sqrt{2}} + a \frac{r-s}{\sqrt{2}} \frac{y+z}{\sqrt{2}}.$$

Esto prueba que la transformación T es autoadjunta.

Veamos que T no es diagonalizable: Si lo fuera, existirían $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda u_1 + \mu u_2$ es un vector propio de T y c su correspondiente valor propio. Ya que todo elemento de V se representa en la base dada en una tal combinación. Ahora

$$c\lambda u_1 + c\mu u_2 = T(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda T(u_1) + \mu T(u_2) = \lambda a u_1 + \mu(u_1 + a u_2).$$

Reescribiendo la combinación lineal de la base igual a cero tenemos que los coeficientes son cero: $c\lambda = a\lambda + \mu$ y $c\mu = a\mu$. Esto implica que $\mu = 0$, es decir todo vector propio de T es de la forma λu_1 . Esto concluye el ejemplo, ya que si T fuera diagonalizable V tendría una base de vectores propios.

Proposición 1.4.3 Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal definida en un plano no degenerado V . Sean $u, v \in V$ dos vectores linealmente independientes. La transformación T es autoadjunta si y sólo si $\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle$.

Demostración. La igualdad anterior es sin duda una condición necesaria. Ahora veamos que es suficiente: Supongamos que $\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle$. La hipótesis de que u, v son linealmente independientes nos dice que forman una base de V . Cualesquiera vectores $w, z \in V$ se escriben como $w = au + bv$ y $z = cu + dv$ y . Lo cual nos da la igualdad: $T(w) = aT(u) + bT(v)$. Ahora vamos a verificar la condición de que T es autoadjunta.

$$\begin{aligned} \langle T(w), z \rangle &= \langle aT(u) + bT(v), cu + dv \rangle \\ &= ac\langle T(u), u \rangle + bd\langle T(v), v \rangle + ad\langle T(u), v \rangle + bc\langle T(v), u \rangle \\ &= ca\langle u, T(u) \rangle + db\langle v, T(v) \rangle + da\langle u, T(v) \rangle + cb\langle v, T(u) \rangle \\ &= \langle au + bv, cT(u) + dT(v) \rangle = \langle w, T(z) \rangle. \end{aligned}$$

□

Proposición 1.4.4 Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal autoadjunta definida en un plano tipo tiempo V . Si existen dos vectores tipo luz $x, y \in V$ linealmente independientes que son vectores propios de T entonces T es un múltiplo constante de la transformación identidad de V .

Demostración. Que los vectores x, y sean linealmente independientes es equivalente a que $\langle x, y \rangle \neq 0$. Podemos suponer que $\langle x, y \rangle > 0$ y en caso contrario cambiamos a y por $-y$ en la base $\{x, y\}$. Sean $u := x/|\langle x, y \rangle|^{\frac{1}{2}}$ y $v := y/|\langle x, y \rangle|^{\frac{1}{2}}$. Tenemos ahora una base pseudo ortonormal con $\langle u, v \rangle = 1$. Estos vectores siguen siendo vectores propios de T : $T(u) = au$ y $T(v) = bv$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ son los valores propios correspondientes a x, y . Como T es autoadjunta,

$$a = \langle au, v \rangle = \langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle = \langle u, bv \rangle = b.$$

Es decir los valores propios de u y v son iguales, $T(u) = au$ y $T(v) = av$. Esto prueba que T es un múltiplo de la identidad: Cualquier vector $w \in W$ se escribe como, $w = \langle w, u \rangle v + \langle w, v \rangle u$ y en consecuencia

$$T(w) = \langle w, u \rangle T(v) + \langle w, v \rangle T(u) = a(\langle w, u \rangle v + \langle w, v \rangle u) = aw.$$

□

Proposición 1.4.5 Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal autoadjunta definida en un plano tipo tiempo V . Si existe un vector tipo luz $y \in V$ que es vector propio de T entonces ó T es un múltiplo de la identidad ó T tiene una matriz asociada de la forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ \pm 1 & a \end{pmatrix},$$

en alguna base de la forma $\{u, v\}$ de vectores tipo luz con $\langle u, v \rangle = 1$.

Demostración. Sea $x \in V$ un vector tipo luz linealmente independiente a $y \in V$, condición equivalente a $\langle x, y \rangle \neq 0$. Podemos elegir a $x \in V$ tal que $\langle x, y \rangle = 1$. Como y es vector propio de T , existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $T(y) = ay$. Vamos a calcular el valor de T en el vector x :

$$T(x) = \langle T(x), y \rangle x + \langle T(x), x \rangle y = \langle x, T(y) \rangle x + \langle T(x), x \rangle y = ax + \langle T(x), x \rangle y.$$

Si $\langle T(x), x \rangle = 0$ entonces $T(x) = ax$. En este caso, x, y son vectores propios con el mismo valor propio. Llegamos en esta situación a que T es un múltiplo de la identidad.

Si $\langle T(x), x \rangle \neq 0$, podemos definir $u = x/|\langle T(x), x \rangle|^{\frac{1}{2}}$ y $v = |\langle T(x), x \rangle|^{\frac{1}{2}}y$. Los vectorres u, v forman una base pseudo ortonormal ya que son tipo luz y $\langle u, v \rangle = 1$. Observemos que,

$$\begin{aligned} T(u) &= T(x)/|\langle T(x), x \rangle|^{\frac{1}{2}} = \frac{a}{|\langle T(x), x \rangle|^{\frac{1}{2}}}x + \frac{\langle T(x), x \rangle}{|\langle T(x), x \rangle|^{\frac{1}{2}}}y \\ &= au + \frac{\langle T(x), x \rangle}{|\langle T(x), x \rangle|}v = au \pm v \\ T(v) &= |\langle T(x), x \rangle|^{\frac{1}{2}}T(y) = |\langle T(x), x \rangle|^{\frac{1}{2}}ay = av. \end{aligned}$$

□

Aunque las transformaciones lineales autoadjuntas definidas en un plano tipo tiempo no son necesariamente diagonalizables si se pueden llevar a una forma especial.

Teorema 1.4.1 (Consulte [6] página 261) Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal autoadjunta definida en un plano tipo tiempo V . Entonces T se puede representar en alguna base como una matriz de los siguientes tres tipos

- Una matriz diagonal en alguna base ortonormal.

•

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

con $b \neq 0$. En alguna base ortonormal.

•

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ \pm 1 & a \end{pmatrix}.$$

En alguna base de la forma $\{u, v\}$ de vectores tipo luz con $\langle u, v \rangle = 1$.

1.5 Ejercicios

1. Sea v_1, v_2, v_3 una base ortonormal de \mathbb{R}_1^3 . Demuestre
 $v = \langle v_1, v_1 \rangle \langle v, v_1 \rangle v_1 + \langle v_2, v_2 \rangle \langle v, v_2 \rangle v_2 + \langle v_3, v_3 \rangle \langle v, v_3 \rangle v_3$.
En particular, si v_1, v_2 son tipo espacio y v_3 es tipo tiempo entonces
 $v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \langle v, v_2 \rangle v_2 - \langle v, v_3 \rangle v_3$.
2. Pruebe que el vector q del ejemplo 1.1.1, es la reflexión del vector $p = (x, y, z)$ en el cono de luz. Es decir, si el cono de luz fuera un espejo, p se refleja en q .
3. Realice la tabla 1.2 con bases de \mathbb{R}_1^3 explícitas.
4. Muestre que una transformación de Lorentz que deja fijo a $0 \in \mathbb{R}_1^3$, es necesariamente transformación lineal.
5. Exhiba un elemento $A \in O_1^+(3)$ que deje fija a una recta L tipo espacio y que no preserve la orientación temporal, es decir que no esté en $O_1^{++}(3)$.
6. Demuestre que el grupo de transformaciones de Lorentz lineales es isomorfo a el grupo de matrices $O_1(3)$. El isomorfismo puede ser dado asociándole a la transformación una matriz en la base canónica $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ o asociándole a una matriz en $O_1(3)$ la transformación lineal por multiplicación de la matriz por un

vector.

7. Justifique con rigor que $O_1^{++}(3)$ es un grupo.
8. Pruebe que las rotaciones que dejan fijo al eje z son transformaciones de Lorentz. Recuerde una rotación está representada por una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta & 0 \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Considere los siguientes dos puntos en \mathbb{R}_1^3 : $p = (0, 1, 5)$ y $q = (0, 2, 1)$. Nótese que $q - p$ es tipo tiempo. Encuentre una base ortonormal de v_1, v_2, v_3 de \mathbb{R}_1^3 tal que $p = av_1 + bv_2 + cv_3$ y $q = av_1 + bv_2 + dv_3$.

10. Probar que

$$\langle u \times v, u \times v \rangle = - \begin{vmatrix} \langle u, u \rangle & \langle u, v \rangle \\ \langle u, v \rangle & \langle v, v \rangle \end{vmatrix}$$

donde \times y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son los respectivos productos lorentzianos.

En general pruebe que

$$\langle u \times v, z \times w \rangle = - \begin{vmatrix} \langle u, z \rangle & \langle u, w \rangle \\ \langle v, z \rangle & \langle v, w \rangle \end{vmatrix}$$

donde \times y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son los respectivos productos lorentzianos.

11. Demuestre que un vector tipo tiempo no puede ser ortogonal a el mismo.
12. Sean $v, w \in R_1^3$ dos vectores linealmente independientes. Sea g la matriz definida como

$$g = \begin{pmatrix} \langle v, v \rangle & \langle v, w \rangle \\ \langle w, v \rangle & \langle w, w \rangle \end{pmatrix}.$$

Demuestre que el plano generado por v y w es

- tipo espacio si y sólo si $\det(g) > 0$,
- tipo tiempo si y sólo si $\det(g) < 0$,
- tipo luz si y sólo si $\det(g) = 0$.

13. Describa a todas las isometrías lineales $T : \mathbb{R}_1^3 \longrightarrow \mathbb{R}_1^3$ que son autoadjuntas, es decir que satisfacen ambas condiciones

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle \text{ y } \langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle,$$

para todo $u, v \in \mathbb{R}^3$.

14. Si T es tipo espacio, N tipo luz y B es tipo luz tales que $\langle T, T \rangle = 1$, $\langle N, B \rangle = 1$ entonces pruebe que cualquier vector v se escribe como

$$v = \langle v, T \rangle T + \langle v, B \rangle N + \langle v, N \rangle B.$$

15. Si T es tipo luz, N tipo espacio y B es tipo luz tales que $\langle T, B \rangle = 1$, $\langle N, N \rangle = 1$ entonces pruebe que cualquier vector v se escribe como

$$v = \langle v, B \rangle T + \langle v, N \rangle N + \langle v, B \rangle B. \quad (1.12)$$

16. Deduzca que un vector tipo tiempo no puede ser ortogonal a un vector tipo luz.

17. Por otro lado, note que un vector tipo espacio si puede ser ortogonal a un vector tipo luz.

Dado un vector tipo luz (x, y, z) , encuentre un vector tipo espacio ortogonal a el.

18. Dada una base seudo ortonormal v_1, v_2 de un plano temporal V construya una base ortonormal de V . Recíprocamente, dada una base ortonormal w_1, w_2 con w_2 vector temporal de un plano temporal V construya una base seudo ortonormal de V .

19. Sean $v = (a, b, c)$ y $w = (x, y, z)$ dos vectores espaciales linealmente independientes tales que generan un plano tipo tiempo V . Encuentre una fórmula para un vector nulo en V en términos de las coordenadas de v y w .

CAPITULO 2

Curvas en el espacio de Minkowski

2.1 Fórmulas de Frenet-Serret para curvas

Una curva diferenciable o de clase C^k , α , en el espacio de Minkowski \mathbb{R}_1^3 es una aplicación $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de clase C^k con dominio I un abierto conexo (un intervalo) de \mathbb{R} . Vamos a trabajar con curvas diferenciables. Una curva diferenciable se dice regular, si $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Decimos que la curva es lisa o C^∞ si α es C^∞ .

En general el caracter causal del vector tangente a una curva en el espacio de Minkowski depende del punto de la curva. Pero hay curvas especiales donde dicho caracter causal es constante a lo largo de la curva.

Definición 2.1.1 Denotemos con CC a cualquier caracter causal: tipo tiempo, tipo espacio o tipo luz. Decimos que una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ tiene caracter causal CC si $\alpha'(t)$ tiene un mismo caracter causal CC para todo $t \in I$.

Una curva se dice no degenerada si sus vectores tangentes nunca son tipo luz.

2.1.1 T, N, B es base ortonormal

Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ una curva regular de clase C^2 no degenerada. Vamos a suponer que α admite un marco ortonormal asociado a cada uno de sus

puntos: Para todo $t \in I$,

$$\boxed{T(t), N(t), B(t), \text{ es base ortonormal de } \mathbb{R}_1^3.}$$

La definición y construcción de los campos vectoriales T, N, B a lo largo de α la veremos a continuación.

Supongamos que α es una curva no degenerada con carácter causal bien definido y que $\alpha'(t)$ no es tipo luz para todo $t \in I$. Supongamos que está parametrizada por longitud de arco: $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = \epsilon_1 \in \{+1, -1\}$.

Definimos al vector tangente unitario como

$$T(t) = \alpha'(t) \text{ el cual es tipo tiempo o tipo espacio a lo largo de la curva.}$$

Notemos que el complemento ortogonal $\langle T(t) \rangle^\perp$ de la recta tangente generada por $T(t)$ es un plano no degenerado. con carácter causal tipo espacio si T es tipo tiempo ó con carácter causal tipo tiempo si T es tipo espacio.

Si T es tipo tiempo a lo largo de α entonces $T'(t)$ es tipo espacio ya que T' y T son ortogonales: $\langle T'(t), T(t) \rangle = 0$. Si T es tipo espacio a lo largo de α entonces $T'(t)$ es tipo espacio, tipo tiempo o tipo luz ya que T' y T son ortogonales: $\langle T'(t), T(t) \rangle = 0$ y el plano no degenerado ortogonal a T sería tipo tiempo. Para continuar vamos a suponer que T' no es tipo luz (este caso será analizado más adelante) y que $T' \neq 0$. En particular, T' tiene un carácter causal constante a lo largo de α : Como T' es una función continua con dominio conexo $I \subset \mathbb{R}$, se sigue que para que T' cambie entre tipo espacio y tipo tiempo tendría que ser en algún momento tipo luz ó cero.

Definimos la curvatura de la curva en el punto $\alpha(t)$ como $\kappa(t) = |T'(t)| = \sqrt{|\langle T'(t), T'(t) \rangle|}$. Por la hipótesis de arriba, está curvatura no es cero. Podemos definir el vector normal principal como

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\kappa(t)} \text{ el cual es no es tipo luz,}$$

y denotamos por $\epsilon_2 = \langle N(t), N(t) \rangle \in \{+1, -1\}$ a su carácter causal. Introducimos ahora un tercer vector a lo largo de la curva α : El vector binormal

$$B(t) = T(t) \times N(t), \text{ el cual tiene carácter causal constante a lo largo de } \alpha,$$

el cual vamos a denotar como $\epsilon_3 = \langle B(t), B(t) \rangle \in \{+1, -1\}$. Bajo estas condiciones un vector $v \in \mathbb{R}_1^3$ se escribe como:

$$v = \epsilon_1 \langle v, T \rangle T + \epsilon_2 \langle v, N \rangle N + \epsilon_3 \langle v, B \rangle B. \quad (2.1)$$

Las fórmulas de Frenet-Serret nos dicen como se expresan las derivadas de T, N, B en términos de los vectores T, N, B .

Por la definición $T' = \kappa N$. Ahora para N' tenemos que

$$\langle N', T \rangle = -\langle N, T' \rangle = -\langle N, \kappa N \rangle = -\epsilon_2 \kappa. \text{ Observemos que } \langle N', N \rangle = 0.$$

Introducimos ahora el concepto de la torsión τ como

$$\tau(t) = \epsilon_3 \langle N'(t), B(t) \rangle.$$

Estamos listos para el siguiente cálculo:

$\langle N', B \rangle = \epsilon_3 \tau$. Ahora aplicamos la ecuación (2.1) para obtener

$$N' = -\epsilon_1 \epsilon_2 \kappa T + \tau B.$$

Para el caso del vector binormal tenemos: $\langle B', T \rangle = -\langle B, T' \rangle = -\langle B, \kappa N \rangle = 0$. $\langle B', N \rangle = -\langle B, N' \rangle = -\epsilon_3 \tau$ y $\langle B', B \rangle = 0$. Entonces

$$B' = -\epsilon_2 \epsilon_3 \tau N.$$

Podemos escribir las ecuaciones de Serret-Frenet matricialmente:

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\epsilon_1 \epsilon_2 \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\epsilon_2 \epsilon_3 \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

Esto concluye el caso cuando la curva admite un marco ortonormal.

Ejemplo 2.1.1 Investiguemos la curvatura de la hipérbola

$$\alpha(t) = (0, r \cosh(t/r), r \sinh(t/r))$$

donde $r > 0$. Es una curva plana tipo tiempo ya que

$$T(t) = \alpha'(t) = (0, \sinh(t/r), \cosh(t/r))$$

tiene caracter causal $\epsilon_1 = \langle T(t), T(t) \rangle = \sinh^2(t/r) - \cosh^2(t/r) = -1$.

Además, $T'(t) = (0, \frac{1}{r} \cosh(t/r), \frac{1}{r} \sinh(t/r))$ Entonces la curvatura es $\kappa(t) = |T'(t)| = \frac{1}{r}$, es decir α es una hiperbóla que tiene curvatura constante. La torsión resulta ser cero ya que la hiperbóla es una curva plana. El valor de la torsión será claro más adelante. Nótese que el vector normal principal de α es

$N(t) = (0, \cosh(t/r), \sinh(t/r))$ el cual es tipo espacio $\epsilon_2 = \langle N(t), N(t) \rangle = 1$. La derivada da $N'(t) = (0, \frac{1}{r} \sinh(t/r), \frac{1}{r} \cosh(t/r))$, Lo cual muestra las relaciones $T'(t) = \kappa(t)N(t)$ y $N'(t) = -\epsilon_1 \epsilon_2 \kappa(t)T(t)$.

2.1.2 T tipo espacio, N tipo luz, B tipo luz

Otro caso es el siguiente:

$$\boxed{T \text{ tipo espacio, } N \text{ tipo luz, } B \text{ tipo luz.}}$$

La posibilidad que nos queda por analizar es cuando T' es tipo luz: Definimos $N := T'$ el cual es tipo luz. Aquí no se puede definir la curvatura ya que la norma en la métrica de Lorentz de T' es cero aunque la curva sea regular.

Además tampoco podemos definir a vector binormal B como antes ya que $T \times N$ está en el plano tipo luz $\text{span}\{T, N\}$. La afirmación de que este plano es tipo luz se sigue del hecho que T y N son ortogonales. Definimos el vector binormal B como el único vector tipo luz que satisface la condición $\langle B, N \rangle = 1$ y $\langle B, T \rangle = 0$.

En este caso un vector $v \in \mathbb{R}_1^3$ se escribe como:

$$v = \langle v, T \rangle T + \langle v, B \rangle N + \langle v, N \rangle B. \quad (2.2)$$

$$\langle N', T \rangle = -\langle N, T' \rangle = \langle N, N \rangle = 0 \text{ y } \langle N', N \rangle = 0.$$

La torsión τ es como antes

$$\tau(t) = -\langle B'(t), N(t) \rangle.$$

Estamos listos para el siguiente cálculo:

$\langle N', B \rangle = -\langle N, B' \rangle = \tau$. Ahora aplicamos la ecuación (2.2) para obtener

$$N' = \tau N.$$

$$\langle B', T \rangle = -\langle B, T' \rangle = -\langle B, N \rangle = -1.$$

$$\langle B', N \rangle = -\tau \text{ y } \langle B', B \rangle = 0. \text{ Entonces}$$

$$B' = -T - \tau B.$$

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ -1 & 0 & -\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

Hemos concluido el caso en que la curva es de tipo espacio.

2.1.3 T tipo luz, N tipo espacio, B tipo luz

Finalmente, analizamos el caso cuando α es tipo luz, es decir el vector tangente $T(t) = \alpha'(t)$ es tipo luz (ya no es unitario).

$$\boxed{T \text{ tipo luz, } N \text{ tipo espacio, } B \text{ tipo luz.}}$$

Vamos a usar el hecho que una curva tipo luz se puede parametrizar con aceleración unitaria: $\langle T'(t), T'(t) \rangle = \langle \alpha''(t), \alpha''(t) \rangle = 1$. Tenemos que T' es tipo espacio por ser ortogonal al vector tipo luz T . Como en el caso anterior definimos $N(t) = T'(t)$ tipo espacio.

Definimos el vector binormal B como el único vector tipo luz que satisface la condición $\langle B, T \rangle = 1$ y $\langle B, N \rangle = 0$.

En este caso un vector $v \in \mathbb{R}_1^3$ se escribe como:

$$v = \langle v, B \rangle T + \langle v, N \rangle N + \langle v, T \rangle B. \quad (2.3)$$

$$\langle N', T \rangle = -\langle N, T' \rangle = -\langle N, N \rangle = -1 \text{ y } \langle N', N \rangle = 0.$$

La torsión τ es como antes

$$\tau(t) = -\langle B'(t), N(t) \rangle.$$

Estamos listos para el siguiente cálculo:

$\langle N', B \rangle = -\langle N, B' \rangle = \tau$. Ahora aplicamos la ecuación (2.3) para obtener

$$N' = \tau T - B.$$

$$\langle B', T \rangle = -\langle B, T' \rangle = -\langle B, N \rangle = 0.$$

$\langle B', N \rangle = -\langle B, N' \rangle = -\langle B, \tau T + B \rangle = -\tau$ y $\langle B', B \rangle = 0$. Entonces

$$B' = -\tau N.$$

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tau & 0 & -1 \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

Proposición 2.1.1 *Sea $\alpha \subset \mathbb{R}_1^3$ una curva tipo luz. Si $\alpha''(s) = \lambda(s)\alpha'(s)$ para alguna función λ , entonces α es parte de una recta tipo luz.*

Demostración. Usaremos la notación,

$$\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s)), \quad \alpha'(s) = (x'(s), y'(s), z'(s)), \\ \alpha''(s) = (x''(s), y''(s), z''(s)).$$

Como α es una superficie tipo luz, tenemos las igualdades:

$$x^2(s) + y^2(s) - z^2(s) = 0, \quad \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle = 0.$$

Podemos visualizar la ecuación diferencial de la hipótesis en coordenadas como:

$$x''(s) = \lambda(s)x'(s), \quad y''(s) = \lambda(s)y'(s), \quad z''(s) = \lambda(s)z'(s).$$

Las podemos reescribir como:

$$\frac{d}{ds} \ln(x'(s)) = \frac{x''(s)}{x'(s)} = \lambda(s), \quad \frac{d}{ds} \ln(y'(s)) = \frac{y''(s)}{y'(s)} = \lambda(s), \\ \frac{d}{ds} \ln(z'(s)) = \frac{z''(s)}{z'(s)} = \lambda(s).$$

En consecuencia,

$$x'(s) = A \exp(f(s)), \quad y'(s) = B \exp(f(s)), \quad z'(s) = C \exp(f(s)),$$

donde $A, B, C \in \mathbb{R}$ son constantes positivas tal que $A^2 + B^2 - C^2 = 0$ y $f'(s) = \lambda(s)$. En forma vectorial: $\alpha'(s) = \exp(f(s))T_0$, donde $T_0 = (A, B, C)$ es un vector tipo luz. Finalmente deducimos que, $\alpha(s) = h(s)T_0 + v$ donde $h'(s) = \exp(f(s))$ y $v \in \mathbb{R}_1^3$ es un vector fijo. Es decir, α es parte de una recta tipo luz en la dirección T_0 . \square

Observación 2.1.1 La Proposición 2.1.1, resuelve el caso pendiente de una curva tipo luz con vector aceleración tipo luz, el cual no se había considerado antes.

Proposición 2.1.2 Sea $\alpha \subset \mathbb{R}_1^3$ una curva tipo luz conexa y sea $v \in \mathbb{R}_1^3$ un vector tipo espacio. Si $\langle \alpha'(s), v \rangle = 0$ para todo s entonces α es parte de una recta tipo luz.

Demostración. Como α es una curva ortogonal a v , es necesario que α sea una curva plana contenida en un plano Π paralelo al complemento ortogonal de v el cual es un plano tipo tiempo. El plano Π sólo contiene dos rectas tipo luz, así que los vectores tangentes $\alpha'(s)$ tiene dirección en tales rectas. Pero la función α' es continua, lo cual implica que $\alpha'(s)$ está contenido en una de las rectas nulas con dirección T_0 . Es decir $\alpha'(s) = \lambda(s)T_0$ donde T_0 es la dirección de una de las rectas nulas. Por lo tanto $\alpha(s) = h(s)T_0 + w$, para algún $w \in \mathbb{R}_1^3$ y $h'(s) = \lambda(s)$. \square

2.2 Aplicaciones

Definición 2.2.1 Decimos que una curva α en \mathbb{R}_1^3 es una curva plana si existe un plano $V \subset \mathbb{R}_1^3$ tal que $\alpha \subset V$.

Teorema 2.2.1 Sea α una curva regular que admite un marco ortonormal T, N, B en cada uno de sus puntos. La torsión de α es cero si y sólo si es una curva plana.

Demostración. Por la ecuaciones de Serret-Frenet de la Sección 2.1.1, la torsión es cero si y sólo si $B'(s) = 0$ es decir $B(s)$ es constante. Esto implica que $B(s) = (a, b, c)$ es un vector constante. Por definición, $B(s) = T(s) \times N(s)$, donde $T(s) = \alpha'(s)$. Esto implica la propiedad $\langle B(s), \alpha'(s) \rangle = 0$. En consecuencia, $\langle B(s), \alpha(s) \rangle' = \langle B'(s), \alpha(s) \rangle + \langle B(s), \alpha'(s) \rangle = 0$ ya que $B'(s) = 0$. Es decir, $\langle B(s), \alpha(s) \rangle = S$ para alguna constante S . Si $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$ y como $B(s) = (a, b, c)$ entonces por sustitución llegamos a la igualdad $ax(s) + by(s) - cz(s) = S$. Es decir, α satisface la ecuación de un plano: $ax + by - cz = S$.

Recíprocamente, supongamos que α es una curva plana, es decir existen constantes $a, b, c, S \in \mathbb{R}$ tal que $ax(s) + by(s) - cz(s) = S$. Al derivar obtenemos que $ax'(s) + by'(s) - cz'(s) = 0$, es decir $\langle (a, b, c), \alpha'(s) \rangle = 0$. Otra derivada implica que $\langle (a, b, c), \alpha''(s) \rangle = 0$. Estas dos últimas igualdades prueban que $\langle (a, b, c), T(s) \rangle = \langle (a, b, c), \alpha'(s) \rangle = 0$ y que $\langle (a, b, c), N(s) \rangle = \langle (a, b, c), \alpha''(s)/\kappa(s) \rangle = 0$. Pero $B(s)$ también es ortogonal a $T(s)$ y $N(s)$. Se deduce que $B(s) = \lambda(a, b, c)$. Como $\langle B(s), B(s) \rangle = \epsilon_3$ obtenemos que λ es constante, ya que se cumple la igualdad $\epsilon_3 = \lambda^2 \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$. Probamos que $B(s)$ es un vector constante.

□

Definición 2.2.2 Decimos que una curva regular α en \mathbb{R}_1^3 es una curva hélice si existe un vector fijo $v \in \mathbb{R}_1^3 \setminus \{0\}$ tal que $\langle T(s), v \rangle$ es una función constante. Aquí suponemos que α está parametrizada por longitud de arco o por longitud pseudo-arco.

Ejemplo 2.2.1 Consideremos la curva tipo tiempo

$$\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\cos(s), \sin(s), 2s).$$

El vector tangente es $T(s) = \alpha'(s) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\sin(s), \cos(s), 2)$ y sea $v = (0, 0, 1)$. Entonces esta curva es una hélice:

$$\langle T(s), v \rangle = \frac{-2}{\sqrt{5}}.$$

Notemos que si $\langle T(s), v \rangle = 0$ la curva está contenida en el plano ortogonal a v . Recíprocamente toda curva plana es una curva hélice con respecto a la dirección dada por un vector ortogonal al plano. Ahora vamos a analizar el caso cuando la curva no es plana.

Teorema 2.2.2 *Sea α una curva no plana que admite un marco ortonormal T, N, B en cada uno de sus puntos. Se tiene que α es una curva hélice si y sólo si existen constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a\kappa(s) + b\tau(s) = 0$. Además, si la curva es tipo espacio con aceleración tipo luz, entonces no es una curva hélice.*

Demostración. Observemos que si ninguno de los vectores T, N, B es tipo luz, las ecuaciones de Serret-Frenet tienen la forma

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\epsilon_1\epsilon_2\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\epsilon_2\epsilon_3\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

Por hipótesis, existe un vector v no cero tal que $\langle T(s), v \rangle = c$ es constante. Derivando de ambos lados tenemos que $0 = \langle T'(s), v \rangle = \kappa \langle N(s), v \rangle$, esto implica que $\langle N(s), v \rangle = 0$. Como T, N, B son una base ortonormal y v es ortogonal a N podemos deducir que $v = a(s)T(s) + b(s)B(s)$. Calculamos la derivada de ambos lados y aplicamos las fórmulas de Serret-Frenet:

$$\begin{aligned} a'(s)T(s) + b'(s)B(s) + a(s)T'(s) + b(s)B'(s) &= 0, \\ a'(s)T(s) + b'(s)B(s) + a(s)\kappa N - \epsilon_2\epsilon_3b(s)\tau N &= 0, \\ a'(s)T(s) + (a(s)\kappa - \epsilon_2\epsilon_3b(s)\tau)N + b'(s)B &= 0. \end{aligned}$$

Como los vectores involucrados son linealmente independientes, concluimos que $a'(s) = b'(s) = 0$, $a(s)\kappa - \epsilon_2\epsilon_3b(s)\tau$ con a y b funciones constantes.

Recíprocamente, supongamos que existen constantes tales que $a\kappa(s) + b\tau(s) = 0$. Vamos a probar que el campo vectorial $v(s) = aT(s) - \epsilon_2\epsilon_3bB(s)$

es un vector fijo. Calculamos la derivada y sustituimos:

$v(s) = aT'(s) - \epsilon_2\epsilon_3bB'(s) = a\kappa(s)N(s) + (\epsilon_2\epsilon_3)^2b\tau(s)N(s) = 0$. Esto concluye la primera parte de este resultado ya que el vector constante $v = aT(s) - \epsilon_2\epsilon_3bB(s)$ satisface la condición $\langle T(s)v \rangle = a\epsilon_1$.

Resta estudiar el caso cuando el vector tangente de α , T , es tipo espacio y N , B tipo luz. Recordemos que las correspondientes ecuaciones de Serret-Frenet son:

$T' = N$, $N' = \tau N$ y $B' = -T - \tau B$. Al igual que antes, como $\langle T, v \rangle = c$ deducimos que $\langle N, v \rangle = 0$. Esto implica que v se representa como $v = a(s)T(s) + b(s)B(s)$. Procedemos como en los casos anteriores:

$$a'(s)T(s) + b'(s)B(s) + a(s)T'(s) + b(s)B'(s) = 0, \quad (2.4)$$

$$a'(s)T(s) + b'(s)B(s) + a(s)N + b(s)(-T - \tau B) = 0. \quad (2.5)$$

$$(a'(s) - b(s))T(s) + a(s)N - b(s)B = 0. \quad (2.6)$$

Obtenemos que $a = b = 0$, pero esto obliga a que $v = 0$. Entonces concluimos que en este caso no existen curvas hélice. \square

Proposición 2.2.1 *Sea α una curva plana que admite un marco ortonormal T , N , B en cada uno de sus puntos. Si las rectas ortogonales y coplanares a α son concurrentes, entonces α tiene curvatura constante no cero y es parte de una elipse o una hipérbola.*

Demostración. Suponemos que α está parametrizada tal que $|\alpha'(s)| = 1$: $\langle T(s), T(s) \rangle = \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = \epsilon_1$. Como la curva es plana, su torsión es cero y por tanto $B(s)$ es un vector constante ortogonal al plano que contiene a la curva. Por hipótesis, T , N , B es un marco ortonormal a lo largo de la curva. Así que $B(s)$ es siempre tipo espacio o tipo tiempo y el plano que contiene a la curva es tipo tiempo o tipo espacio, respectivamente, Sea p el punto donde las rectas ortogonales son concurrentes. La condición geométrica queda capturada por la ecuación

$$\alpha(s) + \lambda(s)N(s) = p, \quad (2.7)$$

para alguna función λ . Tomamos la derivada de ambos lados de la ecuación: $\alpha'(s) + \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) = 0$ y aplicamos las fórmulas de Serret-Frenet en este caso: $B'(s) = -\epsilon_1\epsilon_2\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) = -\epsilon_1\epsilon_2\kappa(s)T(s)$.

$$T(s) + \lambda'(s)N(s) - \lambda(s)\epsilon_1\epsilon_2\kappa(s)T(s) = 0.$$

Esto prueba que $\lambda' = 0$, decir λ es constante. Además, obtenemos que $\kappa = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\lambda}$ es constante no cero. Reescribiendo la ecuación (2.7) llegamos a que:

$$|\alpha(s) - p| = |\lambda|,$$

los puntos de la curva equidistan de p . \square

Proposición 2.2.2 *Sea α una curva plana que admite un marco ortonormal T, N, B en cada uno de sus puntos. Si α tiene curvatura constante, entonces está contenida ó en una recta, en una elipse ó una hipérbola.*

Demostración. Las ecuaciones de Serret-Frenet se reducen en este caso a $T' = \kappa N$ y $N' = -\epsilon_1 \epsilon_2 \kappa(s) T$ con κ una constante. Si $\kappa = 0$, entonces $\alpha(s) = av + b$ es parte de una recta, donde $a, b \in \mathbb{R}$ son constantes y v es un vector constante en el espacio de Minkowski. Si la curvatura no es cero, definimos los vectores $v(s) = \alpha(s) + \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\kappa} N(s)$. Vamos a probar que en realidad, es un vector constante: Basta derivar para ver que $v'(s) = T(s) + \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\kappa} N'(s) = T(s) - (\epsilon_1 \epsilon_2)^2 T(s) = 0$. Esto demuestra que, $|\alpha(s) - v| = |\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\kappa}| |N(s)| = \frac{1}{\kappa}$. \square

2.3 Ejercicios

1. Pruebe que $\langle \alpha(t), \beta(t) \rangle' = \langle \alpha'(t), \beta(t) \rangle + \langle \alpha(t), \beta'(t) \rangle$. Estamos usando la métrica de Lorentz.
2. Verifique la propiedad analoga para el producto cruz Lorentziano:

$$(\alpha(t) \times \beta(t))' = \alpha'(t) \times \beta(t) + \alpha(t) \times \beta'(t).$$

3. Decimos que la curva C^1 , $\gamma : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ es una reparametrización de α si existe un difeomorfismo C^∞ , $h : J \subset \mathbb{R} \rightarrow I$, $t = h(s)$ con $h'(s) > 0$ y tal que $\gamma(t) = h \circ \alpha(t)$. Muestre que el caracter causal de una curva es independiente de la parametrización.

4. Parametrize por longitud de arco las curvas $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), \frac{1}{2}t)$ y $\beta(t) = (\cos(t), \sin(t), 2t)$. Y verifique las fórmulas de Serret-Frenet correspondientes a cada curva. Para esto tiene que calcular todo los terminos que aparecen en las mismas.

Hacer todos los pasos anteriores con la curva tipo luz

$\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$. Observe que en este caso ya tiene parametrización por longitud de pseudo-arco.

5. Para dos eventos (puntos) $p, q \in \mathbb{R}_1^3$ tal que $q - p$ es tipo tiempo, se define la *duración* $\tau(q - p)$ de $q - p$ como

$$\tau(q - p) = (-\langle q - p, q - p \rangle)^{\frac{1}{2}}.$$

Pruebe que si $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ es una curva C^1 tipo tiempo y dirigida al futuro (worldline) de $\alpha(a) = p$ a $\alpha(b) = q$ entonces $Length(\alpha) \leq \tau(q - p)$.

6. Sea α una curva tipo tiempo y sea $\beta = \alpha \circ \phi$ una parametrización por longitud de arco. Deduzca las siguientes fórmulas para la curvatura y torsion: sea $\kappa_\alpha = \kappa_\beta \circ \phi^{-1}$

$$\kappa_\alpha = \frac{\alpha' \times \alpha''}{|\alpha'|^3}, \quad \tau = \frac{det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{|\alpha' \times \alpha''|^2}.$$

7. La curva dada por

$$\alpha(t) = \left(\cos t, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t, \frac{1}{2} \sin t + 1 \right),$$

es una elipse parametrizada en \mathbb{R}^3 .

Parametrice la curva por longitud de arco, y demuestre que su curvatura κ es constante. También demuestre que los vectores normales a la curva son concéntricos, esto es $\mathbf{N} + \alpha = \mathbf{p}$ donde $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ es un vector fijo.

8. Para la curva

$$\alpha(t) = (\sinh t, t, \cosh t),$$

encuentre

- Reparametrización por longitud de arco.
- Caracter causal.
- La curvatura κ y la torsión τ .
- los vectores $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$.
- Verificar las fórmulas de Frenet-Serret.

9. Sea α una curva regular contenida en un plano V en el espacio de Minkowski. Pruebe lo siguiente. Existe un punto p en el espacio de Minkowski tal que:

Si V es tipo espacio, α es parte de una elipse si y sólo si satisface la condición $|\alpha(t) - p| = a$ constante.

Si V es tipo tiempo, α es parte de una hipérbola si y sólo si satisface la condición $|\alpha(t) - p| = a$ constante.

CAPITULO 3

Superficies: Técnicas extrínsecas

3.1 Topología Diferencial de superficies lisas

La topología diferencial de superficies lisas estudia las propiedades de las superficies que no involucran la métrica de Lorentz del espacio \mathbb{R}_1^3 sino que sólo las relacionadas a la estructura diferenciable.

Definición 3.1.1 Sea $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función C^∞ o lisa. Decimos que φ es una *inmersión* C^∞ o lisa si su matriz Jacobiana $J\varphi(x_0, y_0)$ tiene rango dos para todo $(x_0, y_0) \in U$.

Recordemos que si $\varphi(x, y) = (P(x, y), Q(x, y), R(x, y))$ donde $P, Q, R : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones lisas o C^∞ entonces

$$J\varphi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}|_{(x_0, y_0)} & \frac{\partial P}{\partial y}|_{(x_0, y_0)} \\ \frac{\partial Q}{\partial x}|_{(x_0, y_0)} & \frac{\partial Q}{\partial y}|_{(x_0, y_0)} \\ \frac{\partial R}{\partial x}|_{(x_0, y_0)} & \frac{\partial R}{\partial y}|_{(x_0, y_0)} \end{pmatrix}.$$

Recordemos que la derivada, denotada $\varphi_{*|(x_0, y_0)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, de φ en el punto (x_0, y_0) se define como

$$\varphi_{*|(x_0, y_0)}(u, v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi((x_0, y_0) + t(u, v)) - \varphi(x_0, y_0)}{t}.$$

Esta derivada que es una transformación lineal, se puede escribir en términos de la matriz Jacobiana de φ :

$$\varphi_{*|(x_0, y_0)}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}|_{(x_0, y_0)} & \frac{\partial P}{\partial y}|_{(x_0, y_0)} \\ \frac{\partial Q}{\partial x}|_{(x_0, y_0)} & \frac{\partial Q}{\partial y}|_{(x_0, y_0)} \\ \frac{\partial R}{\partial x}|_{(x_0, y_0)} & \frac{\partial R}{\partial y}|_{(x_0, y_0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Definición 3.1.2 Una *carta* C^∞ o lisa es una inmersión $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que además es inyectiva como función y que es un homeomorfismo con su imagen $\varphi(U)$. La topología de $\varphi(U)$ es la topología inducida por \mathbb{R}_1^3 , es decir un abierto de $\varphi(U)$ es de la forma $W \cap \varphi(U)$ donde $W \subset \mathbb{R}_1^3$ es un abierto del espacio de Minkowski.

Ejemplo 3.1.1 Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ cualquier función lisa. Entonces $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ es una carta lisa. Nótese que

$$J\varphi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0, y_0)} & \frac{\partial f}{\partial y}|_{(x_0, y_0)} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene rango dos y la función φ es inyectiva. Además, la imagen $\varphi(V)$ de un abierto $V \subset U$ es abierto pues satisface $\varphi(V) = (V \times \mathbb{R}) \cap \varphi(U)$. Esta igualdad implica que la inversa de φ , $\varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow U$ es continua.

Definición 3.1.3 Superficie C^∞ o lisa.

Un subconjunto M de \mathbb{R}_1^3 es una superficie C^∞ si para cada $p \in M$ existe una carta lisa cuya imagen está contenida en M y que contiene a p .

Definición 3.1.4 Sea M una superficie lisa en \mathbb{R}_1^3 y sea $p \in M$. Decimos que $v \in \mathbb{R}_1^3$ es un *vector tangente* a M en p , si existe una curva C^∞ , $\alpha : (a, b) \longrightarrow M$ tal que

- $\alpha(t_0) = p$ y
- $\alpha'(t_0) = v$,

para algún $t_0 \in (a, b)$.

Denotamos por $T_p M$ al conjunto de todos los vectores tangentes a M en p . Este conjunto se llama el plano tangente de M en p .

Vamos a probar que la anterior terminología es adecuada.

Proposición 3.1.1 *El conjunto de vectores tangentes de una superficie lisa M en un punto, es un plano.*

Demostración. Sea $p \in M$, como es lisa existe una carta lisa $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $p \in \varphi(U) \subset M$. Sea $v \in T_p M$ un vector tangente y sea $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una curva lisa contenida en M como en la Definición 3.1.4. Como $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ es un homeomorfismo, la curva α se puede realizar como $\alpha = \varphi \circ \beta$, donde $\beta : (a, b) \rightarrow U$ es una curva en U con $\beta(t) = (u(t), v(t))$. Ahora usamos la regla de la cadena: $\alpha'(t) = \varphi_{*|\beta(t)} \circ \beta'(t)$. Expresamos esta ecuación vectorial en el siguiente sistema,

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{\partial P}{\partial x}|_{(x_0, y_0)} u'(t) + \frac{\partial P}{\partial y}|_{(x_0, y_0)} v'(t) \\ y'(t) &= \frac{\partial Q}{\partial x}|_{(x_0, y_0)} u'(t) + \frac{\partial Q}{\partial y}|_{(x_0, y_0)} v'(t) \\ z'(t) &= \frac{\partial R}{\partial x}|_{(x_0, y_0)} u'(t) + \frac{\partial R}{\partial y}|_{(x_0, y_0)} v'(t). \end{aligned}$$

Este sistema es equivalente a la ecuación $\alpha'(t) = u'(t)\varphi_x + v'(t)\varphi_y$. En particular, el vector tangente v de M está generado por los vectores tangentes inducidos por la inmersión: φ_x y φ_y . \square

Definición 3.1.5 Una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ con valores reales, se llama función C^∞ en $p \in M$ si es la restricción de una función $F : V \subset \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la cual es C^∞ en p y está definida en un abierto V de \mathbb{R}_1^3 que contiene a p . Es decir $f(q) = F|_{V \cap M}(q)$ para todo $q \in V \cap M$. La función f se llama C^∞ si es C^∞ para cada $p \in M$.

Ejemplo 3.1.2 Sea M una superficie lisa y sea $d = (a, b, c) \in \mathbb{R}_1^3$ un vector distinto de cero. La función altura $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ en la dirección de d está dada por

$$h(p) = \langle p, d \rangle.$$

Esta función es C^∞ ya que es la restricción de la función $F : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $F(x, y, z) = ax + by - cz$, es decir $h(p) = F(p)$ para todo $p \in M$.

Definición 3.1.6 Una aplicación $X : M \longrightarrow \mathbb{R}_1^3$ dada por

$$X(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$$

es C^∞ si cada función $f_1, f_2, f_3 : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es C^∞ .

Definición 3.1.7 Un campo vectorial C^∞ (continuo) a lo largo de una superficie lisa M , es una aplicación lisa (continua) $X : M \longrightarrow \mathbb{R}_1^3$.

- X se llama campo vectorial tangente si para cada $p \in M$,

$$X(p) \in T_p M.$$

- X se dice transversal a M si para cada $p \in M$,

$$X(p) \notin T_p M.$$

- X se llama campo vectorial normal si para cada $p \in M$,

$$X(p) \in (T_p M)^\perp.$$

Si $p \in M$ es tal que $X(p) = 0$, llamamos a p una singularidad del campo X .

Definición 3.1.8 Una superficie lisa M encajada (sin auto intersecciones) en \mathbb{R}_1^3 es *orientable* si existe un campo vectorial continuo ξ a lo largo de M , sin singularidades, tal que ξ es transversal a M .

Definición 3.1.9 Denotemos por \mathbb{R}_+^2 al semiplano cerrado superior: $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v \geq 0\}$. Una superficie con frontera M encajada en \mathbb{R}_1^3 es un subespacio topológico de \mathbb{R}_1^3 que consiste de dos tipos de puntos:

$$M = \text{int}M \cup \partial M,$$

tal que

- $\text{int}M \cap \partial M = \emptyset$,
- $\text{int}M$ es una superficie lisa encajada en \mathbb{R}_1^3 ,
- para cada $p \in \partial M$ existe una inmersión $\varphi : U \subset \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}_1^3$ tal que $p \in \varphi(U)$ y $\varphi(U)$ es un abierto de M .

La frontera de M es el subconjunto ∂M . Cada una de sus componentes conexas es una curva regular.

3.2 Geometría Diferencial de superficies lisas

3.2.1 Carácter causal de superficies

Denotemos con CC a cualquier carácter causal: tipo tiempo, tipo espacio o tipo luz.

Definición 3.2.1 Decimos que una superficie lisa tiene carácter causal CC si $T_p M$ tiene un mismo carácter causal CC para todo $p \in M$.

Definición 3.2.2 Decimos que el campo vectorial X a lo largo de M tiene carácter causal CC si el vector $X(p)$ tiene un mismo carácter causal CC para todo $p \in M$.

Observación 3.2.1 Sea M una superficie lisa tipo luz, tipo tiempo o tipo espacio. Consideremos ξ cualquier campo vectorial ortogonal a M . Entonces M es tipo luz, tipo tiempo o tipo espacio si y sólo si ξ es tipo luz, tipo espacio o tipo tiempo respectivamente.

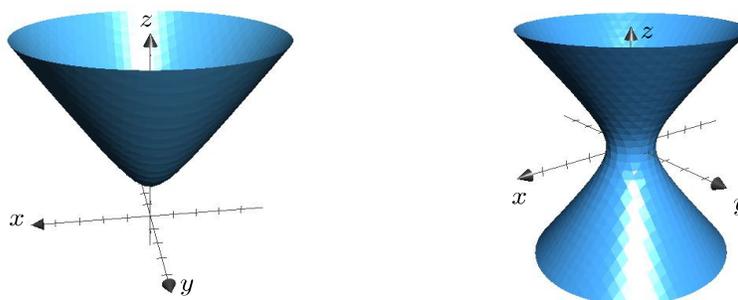
Ejemplo 3.2.1 Los ejemplos inmediatos son las siguientes superficies lisas descritas en forma implícita:

- El cono de luz $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}_1^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ es una superficie tipo luz.
- El espacio de De Sitter de radio $r > 0$,
 $\mathbb{S}_1^2(r) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_1^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = r^2\}$ es una superficie tipo tiempo.
Usaremos la notación $\mathbb{S}_1^2 := \mathbb{S}_1^2(1)$
- El modelo del hiperboloide del plano hiperbólico de radio $r > 0$, es la superficie tipo espacio
 $\mathbb{H}^2(r) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_1^3 \mid z > 0, x^2 + y^2 - z^2 = -r^2\}$. Por simplicidad escribiremos \mathbb{H}^2 para denotar a $\mathbb{H}^2(1)$.

Proposición 3.2.1 Denotemos por $M = M(c)$ a cada una de las superficies del Ejemplo 3.2.1, es decir $M(0)$ es el cono de luz. Si $c > 0$, $M(c) = \mathbb{S}_1^2(c)$ y si $c < 0$, $M(c) = \mathbb{H}^2(-c)$. El campo vectorial a lo largo de M dado por el vector posición $\xi(x, y, z) := (x, y, z)$, es un campo vectorial normal, es decir es ortogonal a M . El campo vectorial ξ es tipo luz, tipo espacio ó tipo tiempo si $c = 0, > 0, < 0$ respectivamente.

Demostración. Dado $p := (x, y, z) \in M$ queremos probar que (x, y, z) es ortogonal a $T_{(x,y,z)}M$. Para esto se necesita verificar que (x, y, z) sea ortogonal cualquier vector en $T_{(x,y,z)}M$. Sea $v \in T_pM$ cualquier vector tangente a M . Por definición, v es el vector tangente de alguna curva $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ tal que $\alpha(t_0) = p$, $\alpha'(t_0) = v$ para algún $t_0 \in (a, b)$ y para todo $t \in (a, b)$, $\alpha(t) \in M$ es decir $\langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle$ es constante. Como la curva α consiste de vectores de posición, tenemos las siguientes relaciones:
 $\langle p, v \rangle = \langle \alpha(t_0), \alpha'(t_0) \rangle = \langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle|_{t_0} = \frac{1}{2} \langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle'|_{t_0} = 0. \quad \square$

Figura 3.1: Plano hiperbólico-Espacio de De Sitter



Definición 3.2.3 Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ . Se dice que f es eikonal si $|\nabla f| = ((f_x)^2 + (f_y)^2)^{1/2} = c$ una constante c .

El siguiente resultado nos da un criterio para saber el carácter causal de la gráfica de una función.

Proposición 3.2.2 Sea M una superficie lisa dada por la gráfica de una función $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $|\nabla f| = \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2}$. Entonces

- M es tipo espacio si y sólo si $|\nabla f| < 1$.
- M es tipo tiempo si y sólo si $|\nabla f| > 1$.
- M es tipo luz si y sólo si $|\nabla f| = 1$, es decir f es una función eikonal.

Demostración. Consideremos el vector $\xi = (f_x, f_y, 1)$ el cual es ortogonal a T_pM , con $p = (x, y, f(x, y))$. En consecuencia M es tipo espacio si ξ es tipo tiempo, M es tipo tiempo si ξ es tipo espacio, M es tipo luz si ξ es tipo luz. Notesé que $|\xi|^2 = |\nabla f|^2 - 1$. Usando esta última ecuación se obtiene el resultado deseado. \square

Ejemplo 3.2.2 Como aplicación de esta Proposición 3.2.2 podemos verificar que el espacio hiperbólico $\mathbb{H}_1^2(r)$ es tipo espacio y el espacio de De Sitter $\mathbb{S}_1^2(r)$ es tipo tiempo: Para esto basta observar que $\mathbb{H}_1^2(r)$ y $\mathbb{S}_1^2(r)$ se puede obtener como la gráfica de la función $z = \sqrt{x^2 + y^2 + r^2}$ y $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}$, respectivamente. El signo a elegir \pm depende si queremos graficar la parte estrictamente arriba del plano xy o la parte por debajo. Para la superficie $\mathbb{H}_1^2(r)$, el gradiente está dado por

$$\nabla f = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + r^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + r^2}} \right),$$

de donde se deduce la desigualdad $|\nabla f|^2 = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + r^2} < 1$. Para el espacio de De Sitter, tenemos las relaciones

$$\nabla f = \left(\frac{\pm x}{\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}}, \frac{\pm y}{\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}} \right)$$

y $|\nabla f|^2 = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 - r^2} > 1$.

Teóricamente siempre se puede describir un abierto de una superficie como la gráfica de una función, pero en algunos casos es conveniente poder hacer cálculos en forma implícita: La técnica que vamos a explicar funciona cuando la superficie está descrita en forma implícita por medio de una función F :

$$M = \{(x, y, z) | F(x, y, z) = 0\}.$$

Un campo vectorial ortogonal a M está dado por $\xi = (F_x, F_y, -F_z)$, lo cual se ve después de aplicar la regla de la cadena a $F \circ \alpha = 0$ donde esta igualdad nos dice que la curva α está contenida en M . La regla de la cadena deja la igualdad $F_{*|\alpha(t)} \circ \alpha'(t) = 0$ la cual es equivalente a $\langle \xi, \alpha'(t) \rangle = 0$.

Entonces, el criterio para determinar el carácter causal de M es:

- M es tipo espacio si y sólo si $(F_x)^2 + (F_y)^2 < (F_z)^2$.
- M es tipo tiempo si y sólo si $(F_x)^2 + (F_y)^2 > (F_z)^2$.
- M es tipo luz si y sólo si $(F_x)^2 + (F_y)^2 = (F_z)^2$.

Como ejemplo, para el espacio de De Sitter $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$ y $(F_x, F_y, -F_z) = (2x, 2y, 2z)$. Como $4x^2 + 4y^2 = 1 + 4z^2 > 4z^2$, esta superficie es tipo tiempo.

Definición 3.2.4 Una superficie M en \mathbb{R}_1^3 se dice compacta, si como subconjunto de \mathbb{R}_1^3 es compacto. Es decir si M es un subconjunto cerrado y acotado de \mathbb{R}_1^3 . La topología de \mathbb{R}_1^3 es la misma que la del espacio euclidiano \mathbb{R}^3 .

Proposición 3.2.3 Si M es una superficie compacta tipo espacio, tipo tiempo o tipo luz, entonces $\partial M \neq \emptyset$.

Demostración. Vamos a proceder por contradicción. Supongamos que $\partial M = \emptyset$. Sea Π un plano en \mathbb{R}_1^3 de cualquier caracter causal. Vamos a probar que M tiene un plano tangente paralelo a Π en algún punto. Como M es compacta podemos tomar un plano Π que no intersekte a M . El conjunto \mathbb{R}_1^3 consiste de dos semi espacios abiertos y disjuntos. Uno de los semi espacios contiene a M . Ahora trasladamos al plano Π hacia el semi espacio que contiene a M hasta que intersekte por primera vez a M en algún punto $p \in M$. Como M tiene frontera vacia, el plano trasladado y M son tangentes en p . Así que sus planos tangentes coinciden, es decir el plano trasladado y paralelo a Π es el plano tangente a M en p . Esto prueba que una superficie compacta y sin frontera tiene planos tangentes de cualquier carácter causal. La única posibilidad para que una superficie compacta tenga un caracter causal bien definido es que tenga frontera no vacia. \square

Proposición 3.2.4 Si M es una superficie tipo espacio, entonces M es orientable.

Demostración. Vamos a construir un campo vectorial continuo a lo largo de M el cual es tipo tiempo y está dirigido al futuro. Sea $p \in M$, como M es superficie lisa, existe un abierto de M V_p alrededor de p y una inmersión $\varphi_p : U_p \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(U_p) = V_p$. La inmersión $\varphi = \varphi_p$ induce un campo vectorial ortogonal y de norma uno:

$$\frac{\varphi_s \times \varphi_t}{|\varphi_s \times \varphi_t|},$$

el cual es tipo tiempo. Ahora vamos a definir el campo vectorial normalizado ξ y ortogonal a M colineal a este campo vectorial y siempre dirigido al futuro. Primero lo definimos localmente y lo denotamos como $\tilde{\xi}$: Para $q \in V_p$

$$\tilde{\xi}(q) := \begin{cases} \frac{\varphi_s \times \varphi_t}{|\varphi_s \times \varphi_t|_{|\varphi^{-1}(q)}} & \text{si } \langle \varphi_s \times \varphi_t, e_3 \rangle < 0 \\ -\frac{\varphi_s \times \varphi_t}{|\varphi_s \times \varphi_t|_{|\varphi^{-1}(q)}} & \text{si } \langle \varphi_s \times \varphi_t, e_3 \rangle > 0. \end{cases}$$

Podemos hacer esta construcción en un abierto V_p de M para cada punto de $p \in M$. Obtenemos así una cubierta $\{V_p\}_{p \in M}$ de M y en cada abierto tenemos definido un campo vectorial $\tilde{\xi}(q)$ tipo tiempo ortogonal a M , de norma 1 y que está dirigido al futuro. Entonces el campo vectorial buscado ξ se puede definir globalmente como

$$\xi(q) := \tilde{\xi}_p(q) \text{ si } q \in V_p.$$

Este campo vectorial ortogonal está bien definido y es liso. Es decir, $\xi(q)$ no depende de la carta que se use para calcularlo: Si φ_p con $q \in V_p$ y $\varphi_{p'}$ con $q \in V_{p'}$ son dos cartas que cubren a q entonces $\tilde{\xi}_p(q) = \tilde{\xi}_{p'}(q)$ debido a la condición de que $\tilde{\xi}_p(q)$ y $\tilde{\xi}_{p'}(q)$ están dirigidos al futuro, son de norma 1 y ortogonales a M . \square

Observación 3.2.2 La demostración de la Proposición 3.2.4, también funciona si M es una superficie tipo tiempo tal que sus vectores ortogonales n tipo espacio no son ortogonales al eje z . Para los vectores tipo espacio n que no son ortogonales al eje z siempre se cumple un de las condiciones $\langle n, e_3 \rangle < 0$ ó $\langle -n, e_3 \rangle > 0$ lo cual significa que n (respectivamente $-n$) y e_3 pertenecen al mismo cono temporal. Consulte la Definición 1.2.3. Por la Proposición 1.2.4, n (resp. $-n$) y e_3 pertenecen al mismo cono temporal si y sólo si la tercer componente de n (resp. $-n$) es positiva.

3.2.2 La primera forma fundamental ó métricas inducidas

Definición 3.2.5 Dada una superficie lisa en \mathbb{R}_1^3 , decimos que la métrica de Lorentz induce una métrica no-degenerada en M , si para cada $p \in M$ la siguiente forma bilineal es no degenerada:

$$I_{M,p} : T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada $I_{M,p}(v, w) := \langle v, w \rangle$. Si la forma bilineal $I = I_{M,p}$ es degenerada, diremos que la métrica es degenerada. En cualquier caso esta métrica se conoce como la *primera forma fundamental ó métrica inducida*.

Definición 3.2.6 Dada cualquier base v, w de $T_p M$, le podemos asociar una matriz, que denotaremos también por I , con respecto a tal base:

$$I_p = \begin{pmatrix} I_{M,p}(v, v) & I_{M,p}(v, w) \\ I_{M,p}(w, v) & I_{M,p}(w, w) \end{pmatrix}.$$

La métrica inducida es no-degenerada si y sólo si el determinante de la matriz I_p es distinto de cero para todo $p \in M$. La métrica inducida es positiva definida si y sólo si el determinante de la matriz I_p es positivo para todo $p \in M$. La métrica inducida es indefinida si y sólo si el determinante de la matriz I_p es negativo para todo $p \in M$.

Podemos usar la métrica inducida para caracterizar el carácter causal de una superficie.

Observación 3.2.3 *Carácter causal en términos de la métrica*

- Una superficie es tipo espacio si y sólo si la métrica inducida $I = I_{M,p}$ es no-degenerada y positiva definida para todo $p \in M$.
- Una superficie es tipo tiempo si y sólo si la métrica inducida $I = I_{M,p}$ es no-degenerada y indefinida para todo $p \in M$.
- Una superficie es tipo luz si y sólo si la métrica inducida $I = I_{M,p}$ es degenerada y de rango uno para todo $p \in M$.

Ejemplo 3.2.3 Vamos a aplicar el criterio de la métrica inducida para encontrar el carácter causal de la gráfica de una función lisa $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $M = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}_1^3\}$. Para calcular la métrica inducida en M , necesitamos una base para el plano tangente en el punto $p = (x, y, f(x, y))$. Una base natural se obtiene tomando las derivadas parciales de la parametrización de M : $v = (1, 0, f_x)$ y $w = (0, 1, f_y)$. La matriz asociada a la métrica inducida está dada por

$$I_p = \begin{pmatrix} \langle v, v \rangle & \langle v, w \rangle \\ \langle w, v \rangle & \langle w, w \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 - f_y^2 \end{pmatrix}.$$

El determinante de esta matriz es $1 - f_x^2 - f_y^2$. Se deduce que M es tipo espacio, tipo tiempo ó tipo luz si este determinante es positivo, negativo ó cero, respectivamente.

Definición 3.2.7 *Superficie con orientación temporal*: Sea M una superficies lisa tipo tiempo. Si M admite un campo vectorial tangente $X : M \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ tipo tiempo, diremos que M tiene una orientación temporal dada por X .

Ejemplo 3.2.4 Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función lisa. Si $|\nabla f| > 1$ entonces la gráfica de f es una superficie orientada temporalmente.

Prueba: Por la Proposición 3.2.2, la gráfica de f es una superficie tipo tiempo con vector ortogonal normalizado $\xi = (f_x, f_y, 1)/\sqrt{|\nabla f|^2 - 1}$. Afirmamos que la parte tangente E_3^\top del campo temporal $E_3 = (0, 0, 1)$ es un campo vectorial tipo tiempo de M :

$$E_3^\top = E_3 - \langle E_3, \xi \rangle \xi.$$

Finalmente, veamos que E_3^\top es tipo tiempo:

$$\langle E_3^\top, E_3^\top \rangle = -1 + \frac{1}{|\nabla f|^2 - 1} - \frac{2}{|\nabla f|^2 - 1} = -1 - \frac{1}{|\nabla f|^2 - 1} = -\frac{|\nabla f|}{|\nabla f|^2 - 1} < 0.$$

Observación 3.2.4 El concepto de orientación temporal para superficies tipo tiempo de la Definición 3.2.7, es geométrico. El concepto de orientación para superficies inmersas en \mathbb{R}_1^3 de la Definición 3.1.8 es topológico. Ambos conceptos son independientes. Sin embargo, se puede probar que toda superficie orientable tipo tiempo es orientable temporalmente. Es un ejercicio para el lector. Observese que la gráfica de una función lisa es una superficie orientable.

3.3 El operador de forma y la segunda forma fundamental

Definición 3.3.1 *La aplicación de Gauss:* Sea M una superficie lisa tipo espacio, tipo tiempo y sea $p \in M$ un punto. Consideremos un abierto $U \subset M$ que contenga a p y tal que M admite un campo vectorial normalizado $n : U \subset M \rightarrow (TM)^\perp$ ortogonal a M definido en U . Además podemos elegir n tal que para todo $p \in U$ $\epsilon := \langle n(p), n(p) \rangle = 1, -1$ dependiendo si M es tipo tiempo ó tipo espacio, respectivamente.

De manera que si M es tipo tiempo, n , es una función

$$n : U \subset M \rightarrow \mathbb{S}_1^2$$

con imagen dentro del espacio de De Sitter.

Si M es tipo espacio, n es una función

$$n : U \subset M \rightarrow \mathbb{H}^2$$

con imagen dentro del espacio hiperbólico.

Definición 3.3.2 Definimos la *derivada direccional*, $D_v n$, de la aplicación de Gauss n , en la dirección tangente $v \in T_p M$ como

$$D_v n = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} (n \circ \alpha(t)),$$

donde α es una curva en M con condiciones $\alpha(t_0) = p$ y $\alpha'(t_0) = v$.

Proposición 3.3.1 Sea M una superficie lisa tipo espacio ó tipo tiempo y sea n un campo vectorial ortogonal a M normalizado. La derivada direccional del campo vectorial n induce una transformación lineal $T_p M \rightarrow T_p M$ dada por

$$v \mapsto (D_v n)_p.$$

Demostración. Primero veamos que $(D_v n)_p \in T_p M$: Sea $\alpha : (a, b) \rightarrow M$ una curva lisa en M que pasa por p con vector velocidad v . Ahora usemos la condición de que n está normalizado, es decir $\langle n(q), n(q) \rangle$ es $+1$, -1 dependiendo del carácter causal de M . En particular si los puntos $q \in M$ los restringimos a la curva α , entonces $\langle n(\alpha(t)), n(\alpha(t)) \rangle$ es constante. Así que al tomar la derivada

$$\langle (D_v n)_p, n \circ \alpha(t) \rangle = \left\langle \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} (n \circ \alpha(t)), n \circ \alpha(t) \right\rangle = 0,$$

Esto prueba que $(D_v n)_p \in T_p M$.

Ahora verifiquemos la linealidad:

Dados dos vectores $v, w \in T_p M$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, elegimos a las curvas $\alpha, \beta, \gamma : (-\epsilon, \epsilon)$ tales que $\alpha(t_0) = \beta(t_0) = \gamma(t_0) = p$ y $\alpha'(t_0) = \lambda v + w$, $\beta'(t_0) = \lambda v$ y $\gamma'(t_0) = w$. Ahora procedemos al cálculo:

$$\begin{aligned} D_{\lambda v + w} n &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} (n \circ \alpha(t)) = n_{*\alpha(t_0)} \alpha'(t_0) = n_{*p}(\lambda v + w) \\ &= \lambda n_{*p}(v) + n_{*p}(w) \\ &= \lambda \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} (n \circ \beta(t)) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} (n \circ \gamma(t)) = \lambda D_v n + D_w n. \end{aligned}$$

□

Definición 3.3.3 Sea M una superficie regular. La aplicación lineal inducida por la derivada direccional de un campo vectorial ortogonal n normalizado será denotada como $S_p : T_p M \longrightarrow T_p M$ y la llamaremos el *operador de forma* de M en el punto p :

$$S_p(v) := -D_v n.$$

Ejemplo 3.3.1 Vamos a calcular la derivada direccional, a lo largo de una curva, de la aplicación de Gauss del espacio hiperbólico $\mathbb{H}^2(r)$ ó el espacio de De Sitter $\mathbb{S}_1^2(r)$. En ambos casos tenemos un campo vectorial normal dado por $n(x, y, z) = (x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in M$.

Dado cualquier vector tangente $v \in T_p M$ donde $p \in M$, introducimos una curva α que satisface estas condiciones iniciales:

Si $M = \mathbb{H}^2(r)$ ó si $M = \mathbb{S}_1^2(r)$ y v es tipo tiempo,

$$\alpha(t) = r \sinh(t|v|/r) \frac{v}{|v|} + r \cosh(t|v|/r) p/r.$$

El vector tangente es $\alpha'(t) = |v| \cosh(t|v|/r) \frac{v}{|v|} + |v| \sinh(t|v|/r) p/r$.

Si $M = \mathbb{S}_1^2(r)$ y v es tipo espacio,

$$\alpha(t) = r \sin(t|v|/r) \frac{v}{|v|} + r \cos(t|v|/r) p/r.$$

El vector tangente es $\alpha'(t) = |v| \cos(t|v|/r) \frac{v}{|v|} - |v| \sin(t|v|/r) p/r$.

Si $M = \mathbb{S}_1^2(r)$ y v es tipo luz, $\alpha(t) = p + tv$.

Evaluando en $t = 0$, vemos que las condiciones iniciales de α :

$$\alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = v.$$

Estamos listos para calcular la derivada direccional del campo n :

$$D_v n = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} n \circ \alpha(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \alpha(t)/r = \alpha'(0)/r = v/r.$$

Estos calculos muestran que el operador de forma S_p de $\mathbb{H}^2(r)$ ó del espacio de De Sitter $\mathbb{S}_1^2(r)$ en cualquier punto p está dado por $S_p(v) = -D_v n = -v/r$.

Lema 3.3.1 Sea M una superficie regular y sea $p \in M$. Consideremos una inmersión $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_1^3$ con $p \in \varphi(U) \subset M$. Entonces

$$S_p(\varphi_u) = -n_u \quad S_p(\varphi_v) = -n_v.$$

Demostración. Sea $p = \varphi(u_0, v_0)$ para algún $(u_0, v_0) \in U$. Por definición, $S_p(\varphi_u) = -\frac{\partial(n \circ \varphi)}{\partial u} = -n_u$. Donde usamos el hecho que la curva $u \mapsto \varphi(u, v_0)$ pasa por p en tiempo v_0 con velocidad φ_u . Similarmente, $S_p(\varphi_v) = -\frac{\partial(n \circ \varphi)}{\partial v} = -n_v$.

□

Proposición 3.3.2 *El operador de forma $S_p : T_p M \longrightarrow T_p M$ es una transformación lineal autoadjunta o simétrica:*

$$\langle S_p(v), w \rangle = \langle v, S_p(w) \rangle,$$

para todo $p \in M$.

Demostración. Sea $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_1^3$ una inmersión con $p \in \varphi(U) \subset M$. Por Lema 3.3.1,

$$\begin{aligned} \langle S_p(\varphi_u), \varphi_v \rangle &= -\langle n_u, \varphi_v \rangle = \langle n, \varphi_{vu} \rangle \\ \langle \varphi_u, S_p(\varphi_v) \rangle &= -\langle \varphi_u, n_v \rangle = \langle \varphi_{vu}, n \rangle. \end{aligned}$$

Finalmente, el resultado se sigue por bilinealidad. \square

Definición 3.3.4 Sea M una superficie lisa en \mathbb{R}_1^3 tipo tiempo ó tipo espacio con aplicación de Gauss n y sea $\epsilon = \langle n, n \rangle$. La *segunda forma fundamental* de M en el punto p es la siguiente forma bilineal:

$$II_p : T_p M \times T_p M \longrightarrow (T_p M)^\perp$$

dada por

$$II_p(v, w) := \epsilon \langle S_p(v), w \rangle n(p). \quad (3.1)$$

Es una forma bilineal con valores en la recta ortogonal a M . Nótese que $II_p(v, w) = II_p(w, v)$, es decir la segunda forma fundamental es simétrica para todo $p \in M$.

En particular observemos que

$$\langle II_p(v, w), n \rangle := \langle S_p(v), w \rangle. \quad (3.2)$$

El *vector de curvatura media* \tilde{H} de M en p se define como

$$\tilde{H}(p) = \frac{1}{2} \text{tr}(II_p) = \frac{1}{2} (\epsilon_1 II_p(v_1, v_1) + \epsilon_2 II_p(v_2, v_2)),$$

donde v_1, v_2 es una base ortonormal de $T_p M$ con

$$\epsilon_1 = \langle v_1, v_1 \rangle, \quad \epsilon_2 = \langle v_2, v_2 \rangle.$$

Definición 3.3.5 *Una superficie M cuyo vector de curvatura media satisface $\tilde{H}(p) = 0$ para todo $p \in M$ se llama mínima.*

3.3.1 Curvatura Gaussiana y Curvatura Media vía el operador de forma

Definición 3.3.6 Sea M una superficie lisa en \mathbb{R}_1^3 tipo espacio o tipo tiempo. Usando las ecuaciones (3.1) y (3.2) y una base ortonormal v_1, v_2 de $T_p M$ deducimos que la curvatura Gaussiana $K(p)$ de M en el punto p está dada por

$$\begin{aligned} K(p) &= \det(II_p) \\ &= \epsilon_1 \epsilon_2 (\langle II_p(v_1, v_1), II_p(v_2, v_2) \rangle - \langle II_p(v_1, v_2), II_p(v_1, v_2) \rangle) \\ &= \epsilon \epsilon_1 \epsilon_2 (\langle S_p(v_1), v_1 \rangle \langle S_p(v_2), v_2 \rangle - \langle S_p(v_1), v_2 \rangle \langle S_p(v_1), v_2 \rangle) \end{aligned}$$

La curvatura media de M en el punto p está dada por la relación

$$\tilde{H}(p) = H(p)n(p),$$

es decir $H(p) = \epsilon \langle \tilde{H}(p), n \rangle$.

$$H(p) = \epsilon \frac{1}{2} (\epsilon_1 \langle II_p(v_1, v_1), n \rangle + \epsilon_2 \langle II_p(v_1, v_2), n \rangle) \quad (3.3)$$

$$= \epsilon \frac{1}{2} (\epsilon_1 \langle S_p(v_1), v_1 \rangle + \epsilon_2 \langle S_p(v_2), v_2 \rangle). \quad (3.4)$$

Nótese que

$$\begin{aligned} S_p(v_1) &= \epsilon_1 \langle S_p(v_1), v_1 \rangle v_1 + \epsilon_2 \langle S_p(v_1), v_2 \rangle v_2 \\ S_p(v_2) &= \epsilon_1 \langle S_p(v_2), v_1 \rangle v_1 + \epsilon_2 \langle S_p(v_2), v_2 \rangle v_2. \end{aligned}$$

Así que la matriz asociada a S_p con respecto a la base v_1, v_2 está dada por:

$$[S] = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \langle S_p(v_1), v_1 \rangle & \epsilon_1 \langle S_p(v_1), v_2 \rangle \\ \epsilon_2 \langle S_p(v_2), v_1 \rangle & \epsilon_2 \langle S_p(v_2), v_2 \rangle \end{pmatrix}.$$

Entonces las curvaturas son

$$K(p) = \epsilon \det([S]), \quad H(p) = \epsilon \frac{1}{2} \text{tr}([S]).$$

Proposición 3.3.3 Con respecto a una base arbitraria, la curvatura Gaussiana y la curvatura media se expresan como

$$\begin{aligned} K(p) &= \epsilon \frac{\langle S_p(v), v \rangle \langle S_p(w), w \rangle - \langle S_p(v), w \rangle^2}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2}, \\ H(p) &= \epsilon \frac{1}{2} \frac{\langle S_p(v), v \rangle \langle w, w \rangle - 2 \langle S_p(v), w \rangle \langle v, w \rangle + \langle S_p(w), w \rangle \langle v, v \rangle}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2}. \end{aligned}$$

Demostración. Sean v, w una base de T_pM . Para calcular el determinante y la traza de S_p basta hallar la matriz asociada $[S_p]$ a S_p en esta base: $S_p(v) = av + bw$ y $S_p(w) = cv + dw$.

$$\begin{aligned}\langle S_p(v), v \rangle &= a\langle v, v \rangle + b\langle w, v \rangle, \\ \langle S_p(v), w \rangle &= a\langle v, w \rangle + b\langle w, w \rangle, \\ \langle S_p(w), v \rangle &= c\langle v, v \rangle + d\langle w, v \rangle, \\ \langle S_p(w), w \rangle &= c\langle v, w \rangle + d\langle w, w \rangle.\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \langle II(v, v), n(p) \rangle & \langle II(v, w), n(p) \rangle \\ \langle II(w, v), n(p) \rangle & \langle II(w, w), n(p) \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I(v, v) & I(v, w) \\ I(w, v) & I(w, w) \end{pmatrix},$$

donde $I = I_p$ y $II = II_p$.

Aquí aplicamos la relación $\langle II_p(v, w), n(p) \rangle = \langle S_p(v), w \rangle$. En notación matricial

$$II = [S_p]I.$$

Entonces $[S_p] = (II)I^{-1}$. La matriz inversa es

$$I^{-1} = \frac{1}{\det I} \begin{pmatrix} I(w, w) & -I(v, w) \\ -I(w, v) & I(v, v) \end{pmatrix}.$$

Deducimos que

$$\det([S_p]) = \det(II)\det(I^{-1}) = \frac{\det(II)}{\det(I)} \quad (3.5)$$

$$= \frac{\langle S_p(v), v \rangle \langle S_p(w), w \rangle - \langle S_p(v), w \rangle^2}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2}. \quad (3.6)$$

$$\operatorname{tr}[S_p] = \operatorname{tr}((II)I^{-1}) \quad (3.7)$$

$$= \frac{\langle S_p(v), v \rangle \langle w, w \rangle - 2\langle S_p(v), w \rangle \langle v, w \rangle + \langle S_p(w), w \rangle \langle v, v \rangle}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2} \quad (3.8)$$

□

Proposición 3.3.4 *Curvaturas Gaussiana y media vía una inmersión.* Sea $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ una inmersión que cubre un abierto de p en la superficie

M tipo espacio ó tipo tiempo. Entonces las curvaturas se calculan por medio de las fórmulas:

$$K(p) = \epsilon \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

$$H(p) = \epsilon \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2},$$

donde $\epsilon = \langle n, n \rangle$, n la aplicación de Gauss de M y

$$\begin{aligned} e &= \langle S_p(\varphi_u), \varphi_u \rangle = \langle n, \varphi_{uu} \rangle, \\ f &= \langle S_p(\varphi_u), \varphi_v \rangle = \langle n, \varphi_{uv} \rangle, \\ g &= \langle S_p(\varphi_v), \varphi_v \rangle = \langle n, \varphi_{vv} \rangle, \\ E &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, \quad F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, \quad G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle. \end{aligned}$$

Demostración. El resultado se sigue por sustitución. \square

Ejemplo 3.3.2 Vamos a calcular la Curvatura Gaussiana y la curvatura media del espacio hiperbólico

$$\mathbb{H}^2(r) = \{p \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle p, p \rangle = -r^2\}$$

y del espacio de De Sitter

$$\mathbb{S}_1^2(r) = \{p \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle p, p \rangle = r^2\}.$$

Sea $\epsilon = \langle n, n \rangle$ donde n es la aplicación de Gauss. Observemos que $\mathbb{H}^2(r)$ es una superficie de revolución con eje de simetría el eje z . Además se obtiene rotando alrededor del eje z a la curva $\alpha(t) = r(0, \sinh(t), \cosh(t))$, es decir $\mathbb{H}^2(r)$ se parametriza como

$$\varphi(t, s) = r(\sin(s) \sinh(t), \cos(s) \sinh(t), \cosh(t)).$$

Ahora podemos calcular las primeras y segundas derivadas

$$\begin{aligned} \varphi_t &= r(\sin(s) \cosh(t), \cos(s) \cosh(t), \sinh(t)) \\ \varphi_s &= r(\cos(s) \sinh(t), -\sin(s) \sinh(t), 0) \\ \varphi_{tt} &= r(\sin(s) \sinh(t), \cos(s) \sinh(t), \cosh(t)) \\ \varphi_{ts} &= r(\cos(s) \cosh(t), -\sin(s) \cosh(t), 0) \\ \varphi_{ss} &= r(-\sin(s) \sinh(t), -\cos(s) \sinh(t), 0). \end{aligned}$$

La aplicación de Gauss está dada por $n(\varphi(t, s)) = \varphi(t, s)/r$ y como n es tipo tiempo $\epsilon = \langle n, n \rangle = -1$. Entonces

$$e = -r, \quad f = 0, \quad g = -r \sinh^2(t), \quad E = r^2, \quad F = 0, \quad G = r^2 \sinh^2(t).$$

Esto da por resultado que en cualquier $p = \varphi(t, s)$

$$K(p) = -1/r^2, \quad H(p) = 1/r,$$

Es decir \mathbb{H}^2 tiene curvatura Gaussiana constante $-1/r^2$ y curvatura media constante $1/r$.

En el caso del espacio de De Sitter se toma la curva $\beta(t) = r(0, \cosh(t), \sinh(t))$ y la parametrización resulta

$$\varphi(t, s) = r(\sin(s) \cosh(t), \cos(s) \cosh(t), \sinh(t)).$$

Ahora podemos calcular las primeras y segundas derivadas

$$\begin{aligned} \varphi_t &= r(\sin(s) \sinh(t), \cos(s) \sinh(t), \cosh(t)) \\ \varphi_s &= r(\cos(s) \cosh(t), -\sin(s) \cosh(t), 0) \\ \varphi_{tt} &= r(\sin(s) \cosh(t), \cos(s) \cosh(t), \sinh(t)) \\ \varphi_{ts} &= r(\cos(s) \sinh(t), -\sin(s) \sinh(t), 0) \\ \varphi_{ss} &= r(-\sin(s) \cosh(t), -\cos(s) \cosh(t), 0). \end{aligned}$$

La aplicación de Gauss está dada por $n(\varphi(t, s)) = \varphi(t, s)/r$ y como n es tipo espacio $\epsilon = \langle n, n \rangle = 1$. Entonces

$$e = r, \quad f = 0, \quad g = -r \cosh^2(t), \quad E = -r^2, \quad F = 0, \quad G = r^2 \cosh^2(t).$$

Un proceso similar muestra que

$$K(p) = 1/r^2, \quad H(p) = -1/r.$$

Corolario 3.3.1 Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ . La superficie M definida por la gráfica de f tiene curvaturas

$$K = -\frac{\det(\text{Hess}f)}{(|\nabla f|^2 - 1)^2}, \quad (3.9)$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{f_{xx}(1 - (f_y)^2) + 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 - (f_x)^2)}{||\nabla f|^2 - 1|^{3/2}}. \quad (3.10)$$

Demostración. Recordemos que la gráfica de f es la imagen de la inmersión $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$. Un campo vectorial ortogonal a M es $(f_x, f_y, 1)$. La aplicación de Gauss está dada por

$$n(\varphi(x, y)) = \frac{(f_x, f_y, 1)}{\sqrt{|\nabla f|^2 - 1}}.$$

Por otro lado tenemos las derivadas parciales de la inmersión:

$$\begin{aligned} \varphi_x &= (1, 0, f_x) \\ \varphi_y &= (0, 1, f_y) \\ \varphi_{xx} &= (0, 0, f_{xx}) \\ \varphi_{xy} &= (0, 0, f_{xy}) \\ \varphi_{yy} &= (0, 0, f_{yy}) \\ e &= \frac{-f_{xx}}{\sqrt{|\nabla f|^2 - 1}}, \quad f = \frac{-f_{xy}}{\sqrt{|\nabla f|^2 - 1}}, \quad g = \frac{-f_{yy}}{\sqrt{|\nabla f|^2 - 1}}, \\ E &= 1 - (f_x)^2, \quad F = -f_x f_y, \quad G = 1 - (f_y)^2 \\ eg - f^2 &= \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{|\nabla f|^2 - 1}, \quad EG - F^2 = 1 - |\nabla f|^2 \end{aligned}$$

$$eG - 2fF + gE = \frac{-f_{xx}(1 - (f_y)^2) - 2f_x f_y f_{xy} - f_{yy}(1 - (f_x)^2)}{\sqrt{|\nabla f|^2 - 1}}.$$

Definimos

$$\epsilon = \langle n, n \rangle = \frac{|\nabla f|^2 - 1}{|\nabla f|^2 - 1}.$$

Entonces las curvaturas son

$$K = -\frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{(|\nabla f|^2 - 1)^2}, \quad H = \frac{1}{2} \frac{f_{xx}(1 - (f_y)^2) + 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 - (f_x)^2)}{|\nabla f|^2 - 1|^{3/2}}.$$

□

Ejemplo 3.3.3 (*Superficie de Scherk*)

Consideremos la función $f(x, y) = \log \cosh(y) - \log \cosh(x)$. Vamos a calcular su curvatura media.

$$f_x = -\tanh(x), \quad f_y = \tanh(y), \quad f_{xx} = -\frac{1}{\cosh^2(x)}, \quad f_{yy} = \frac{1}{\cosh^2(y)}, \quad f_{xy} = 0.$$

Ahora podemos sustituir en el numerador de la Ecuación (3.10):
 $f_{xx}(1 - (f_y)^2) + f_{yy}(1 - (f_x)^2) = -\frac{1}{\cosh^2(x)}\frac{1}{\cosh^2(y)} + \frac{1}{\cosh^2(y)}\frac{1}{\cosh^2(x)} = 0$. Es decir, la curvatura media es constante cero $H = 0$.

Para llegar a esta solución de la ecuación diferencial parcial $f_{xx}(1 - (f_y)^2) + 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 - (f_x)^2) = 0$ se hace la hipótesis de que la función f se puede descomponer como $f(x, y) = g(x) + h(y)$. A la gráfica de una tal f se le conoce como superficie de traslación.

Nótese que se tienen las relaciones: $f_x = g'(x)$, $f_{xx} = g''(x)$, $f_{xy} = 0$, $f_y = h'(y)$, $f_{yy} = h''(y)$. Sustituyendo se obtiene la ecuación,

$$g''(x)(1 - (h'(y))^2) = h''(y)(1 - (g'(x))^2).$$

Esta ecuación implica que

$$g''(x) = c(1 - (g'(x))^2) \text{ y que } h''(y) = -c(1 - (h'(y))^2).$$

Definición 3.3.7 Decimos que una superficie no degenerada $M \subset \mathbb{R}_1^3$ es mínima si tiene curvatura media constante igual a cero.

Vamos a enunciar el teorema de cálculo acerca de máximos y mínimos de una función diferenciable de dos variables.

Proposición 3.3.5 (Ver detalles en [1] página 207)

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ . Sea $(x_0, y_0) \in \Omega$ un punto crítico de f , es decir $f_x(x_0, y_0) = 0$, $f_y(x_0, y_0) = 0$. Si $\det(\text{Hess}f) > 0$, entonces f alcanza un máximo (si $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$) ó mínimo (si $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$) en tal punto.

En el caso de que $\det(\text{Hess}f) < 0$, entonces f no alcanza ni máximo ni mínimo en tal punto.

Corolario 3.3.2 Sea M una superficie tipo espacio con curvatura negativa en p entonces el plano tangente de M en p deja localmente a M en uno de los dos semiespacios que determina. Si M tiene curvatura positiva en p , M atraviesa localmente su plano tangente en p .

Demostración. Primero aplicamos una isometría T del espacio de Minkowski que lleve p al origen y el plano tangente de M en p al plano xy . Entonces $T(M)$ es la gráfica de una función, F , C^∞ alrededor de 0. Nótese que la curvatura de $T(M)$ en el punto 0 es igual a la curvatura de M en el punto p . Se sigue del Corolario 3.3.1, que el signo de $\det(\text{Hess}F)$ alrededor del origen es positivo si la curvatura de M en p es negativa; y es negativo si la curvatura de M en p es positiva. Ahora resta aplicar la Proposición 3.3.5. \square

Lema 3.3.2 Si M es una superficie conexa no degenerada con operador de forma nulo entonces M es parte de un plano.

Demostración. Por hipótesis, $S(X) = 0$ para todo campo vectorial X tangente de M . Pero $S(X) = 0 = -D_X n$ es decir la aplicación de Gauss es un vector constante a lo largo de M . Sea $p \in M$. Veamos que M es parte de un plano que pasa por p y es ortogonal al vector constante n . Sea $q \in M$ cualquier otro punto de M . Como M es conexa existe una curva α contenida en M de p a q . Podemos suponer que, $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$. Consideremos la función $f(t) = \langle \alpha(t) - p, n \rangle$. Veamos que f es una función con valor constante cero: $X \cdot f = X \cdot \langle \alpha(t) - p, n \rangle = \langle \alpha'(t), n \rangle = 0$, ya que n es constante y además ortogonal al vector tangente $\alpha'(t)$. Por lo tanto $f(t) = f(0) = 0$ para todo t . En particular, $\langle q - p, n \rangle = \langle \alpha(1) - p, n \rangle = f(1) = 0$. Esto demuestra que q es un punto en el plano que pasa por p y con vector ortogonal dado por n . \square

Proposición 3.3.6 Sea M una superficie no degenerada en \mathbb{R}_1^3 . Si M tiene curvatura Gaussiana cero, curvatura media cero y el operador de forma S es diagonalizable entonces M es parte de un plano.

Demostración. Como S es diagonalizable en cada punto $p \in M$, existe un marco ortonormal v_1, v_2 tal que $S(v_1) = \lambda_1 v_1$ y $S(v_2) = \lambda_2 v_2$. La curvatura Gaussiana y media en esta base ortonormal están dadas por

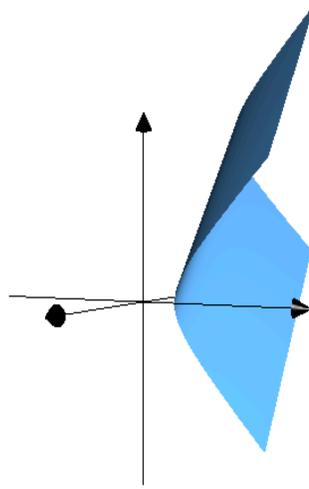
$$\begin{aligned} K(p) &= \epsilon_1 \epsilon_2 (\langle S_p(v_1), v_1 \rangle \langle S_p(v_2), v_2 \rangle - \langle S_p(v_1), v_2 \rangle \langle S_p(v_2), v_1 \rangle) \\ &= \epsilon_1 \epsilon_2 (\lambda_1 \langle v_1, v_1 \rangle \langle v_2, v_2 \rangle - \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle) \\ &= \epsilon \lambda_1 \lambda_2 = 0, \\ H(p) &= \frac{\epsilon}{2} (\epsilon_1 \langle S_p(v_1), v_1 \rangle + \epsilon_2 \langle S_p(v_2), v_2 \rangle) \\ &= \frac{\epsilon}{2} (\epsilon_1 \langle \lambda_1 v_1, v_1 \rangle + \epsilon_2 \langle \lambda_2 v_2, v_2 \rangle) \\ &= \epsilon (\lambda_1 + \lambda_2) = 0. \end{aligned}$$

Esto implica que $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$. La relación $\langle II(X, Y), \xi \rangle = \langle S(X), Y \rangle$ permite concluir que la segunda forma fundamental II de M es cero en el punto p . Como antes ξ es un vector ortogonal a $T_p M$ normalizado y $\epsilon = \langle \xi, \xi \rangle$. Como estos cálculos se realizarán en un punto p arbitrario, podemos concluir que II es cero en cualquier punto de M . Por el Lema 3.3.2, M es parte de un plano. \square

En la Proposición 3.3.6, es importante que el operador de forma sea diagonalizable para poder concluir que M es parte de un plano. El siguiente

ejemplo comprueba este hecho, ya que damos una superficie que no es parte de un plano y tiene ambas curvaturas Gaussiana y media constantes e igual a cero.

Figura 3.2: Superficie tipo tiempo con curvaturas Gaussiana y media constantes igual a cero. Con curva tipo tiempo y vector tipo luz dados por $\gamma(s) = (0, \cosh(s), \sinh(s))$, $W = (-1, 0, 1)$



Ejemplo 3.3.4 Consideremos la superficie tipo tiempo M en \mathbb{R}_1^3 parametrizada por

$$\varphi(s, t) = \gamma(s) + tW,$$

donde $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ es una curva tipo luz la cual no es una recta y sea $W \in \mathbb{R}_1^3$ es un vector tipo tiempo. Asumimos que para todo $s \in (a, b)$ se satisface la condición $\langle \gamma'(s), W \rangle \neq 0$, es decir $\gamma'(s)$ y W son vectores nulos linealmente independientes para todo s . Vamos a probar directamente que M

tiene curvatura Gaussiana constante cero, curvatura media constante cero.

$$\begin{aligned} \varphi_s &= \gamma'(s), \quad \varphi_t = W \\ \varphi_{ss} &= \gamma''(s) \quad \varphi_{st} = 0, \quad \varphi_{tt} = 0 \\ E &= \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle = 0, \quad F = \langle \varphi_s, \varphi_t \rangle = \langle \gamma'(s), W \rangle, \quad G = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle = 0 \\ e &= \langle \varphi_{ss}, \xi \rangle, \quad f = \langle \varphi_{st}, \xi \rangle = 0, \quad g = \langle \varphi_{tt}, \xi \rangle = 0, \end{aligned}$$

donde ξ es un campo de vectores ortogonales a M y normalizado. Por sustitución encontramos que $EG - F^2 = -F^2 = -\langle \gamma'(s), W \rangle^2 < 0$, ya $\gamma'(s)$ es un vector tipo luz y W es tipo tiempo. Todo par de vectores tipo luz y tipo tiempo satisfacen la condición: $\langle \gamma'(s), W \rangle \neq 0$. Podemos deducir que la superficie M parametrizada por φ es no degenerada y es tipo tiempo. Es una superficie cilíndrica que no es parte de un plano ya que γ no es una recta. Además, $eg - f^2 = 0$ y $eG - 2fF + gE = 0$ Ahora aplicamos las fórmulas de la Proposición 3.3.4 para concluir que M es una superficie tipo tiempo con curvatura Gaussiana constante $K = 0$ y curvatura media constante $H = 0$.

3.4 El hiperboloide \mathbb{H}^2 es isométrico al modelo de Poincare

En esta sección describimos una isometría entre el hiperboloide

$$\mathbb{H}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_1^3 \mid z > 0, \quad x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$$

y el modelo de Poincare del plano hiperbólico. Para esto vamos a dar una parametrización de \mathbb{H}^2 conveniente para este fin. Usaremos la parametrización para encontrar la matriz de la métrica inducida en \mathbb{H}^2 por la métrica de Lorentz del espacio ambiente.

Recordemos que el modelo del disco de Poincare del plano hiperbólico es

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\},$$

con métrica Riemanniana

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - (x^2 + y^2))^2}.$$

La parametrización está dada por el homeomorfismo $\Psi : B \rightarrow \mathbb{H}^2$, definido como

$$\Psi(x, y) = \left(\frac{2x}{1 - x^2 - y^2}, \frac{2y}{1 - x^2 - y^2}, \frac{1 + x^2 - y^2}{1 - x^2 - y^2} \right).$$

Se sigue de un cálculo que $\langle \Psi(x, y), \Psi(x, y) \rangle = -1$ y por tanto $\Psi(B) \subset \mathbb{H}^2$. Los vectores tangentes de \mathbb{H}^2 inducidos por esta parametrización son

$$\Psi_x = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \left(\frac{2(1 + x^2 - y^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}, \frac{4xy}{(1 - x^2 - y^2)^2}, \frac{4x}{(1 - x^2 - y^2)^2} \right)$$

y

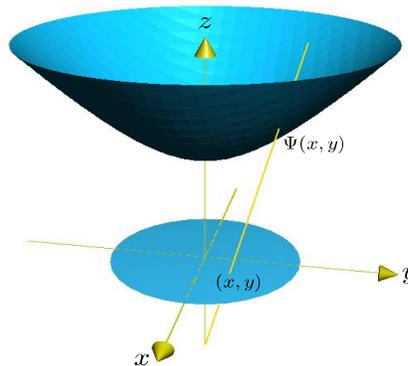
$$\Psi_y = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \left(\frac{4xy}{(1 - x^2 - y^2)^2}, \frac{2(1 - x^2 + y^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}, \frac{4y}{(1 - x^2 - y^2)^2} \right).$$

Un cálculo directo muestra que

$$\langle \Psi_x, \Psi_x \rangle = \frac{4}{(1 - x^2 - y^2)^2}, \langle \Psi_x, \Psi_y \rangle = 0, \text{ y } \langle \Psi_y, \Psi_y \rangle = \frac{4}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

Lo cual prueba que, punto a punto, la métrica inducida en el hiperboloide en la base Ψ_x, Ψ_y coincide con la métrica del disco de Poincare dada en la base $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$.

Figura 3.3: Isometría entre modelos del plano hiperbolico



Otro aspecto que conviene comparar es la estructura como espacios métricos. El disco de Poincare B tiene una distancia $d_B : B \times B \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d_B(p, q) := \cosh^{-1} \left(1 + \frac{2|p - q|^2}{(1 - |p|^2)(1 - |q|^2)} \right),$$

donde $p = (x, y)$, $q = (a, b)$ y $|p|^2 = x^2 + y^2$.

El hiperbolioide tiene una métrica dada por $d_{\mathbb{H}^2} : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d_{\mathbb{H}^2}(u, v) := \cosh^{-1}(-\langle u, v \rangle).$$

La parametrización Ψ preserva las métricas:

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}^2}(\Psi(p), \Psi(q)) &= \cosh^{-1} \left(\frac{-4ax - 4by - (1 + |p|^2)(1 + |q|^2)}{(1 - |p|^2)(1 - |q|^2)} \right) \\ &= \cosh^{-1} \left(1 + \frac{2(x-a)^2 + 2(y-b)^2}{(1 - |p|^2)(1 - |q|^2)} \right) \\ &= \cosh^{-1} \left(1 + \frac{2|p - q|^2}{(1 - |p|^2)(1 - |q|^2)} \right) = d_B(p, q). \end{aligned}$$

3.5 Ejercicios

1. Sean u, v, w, z vectores en \mathbb{R}_1^3 . Diga si la identidad de Lagrange para el caso Euclidiano es cierta en el caso Lorentziano.

$$\langle u \times v, w \times z \rangle = \begin{vmatrix} \langle u, w \rangle & \langle u, z \rangle \\ \langle v, w \rangle & \langle v, z \rangle \end{vmatrix}.$$

2. Se sabe que una superficie en R_1^3 tipo espacio es orientable. Buscar un ejemplo de una superficie no orientable que sea tipo tiempo.
3. Demuestre que una superficie tipo tiempo orientable inmersa en \mathbb{R}_1^3 es orientable temporalmente.
4. Sean A, B matrices de $n \times n$ con entradas reales. Pruebe que la traza y el determinante satisfacen las identidades:

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA), \quad \det(AB) = (\det A)(\det B).$$

5. Sea $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Defina la traza de b como

$$tr(b) := \frac{\langle v_2, v_2 \rangle b(v_1, v_1) - 2\langle v_1, v_2 \rangle b(v_1, v_2) + \langle v_1, v_1 \rangle b(v_2, v_2)}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2}$$

y el determinante de b como

$$det(b) = \frac{\langle II_p(v_1, v_1), II_p(v_2, v_2) \rangle - \langle II_p(v_1, v_2), II_p(v_1, v_2) \rangle}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2},$$

donde V es un subespacio de dimensión dos de \mathbb{R}_1^3 tipo espacio o tipo tiempo y v_1, v_2 es una base de V . Demuestre que $tr(b)$ y $det(b)$ no dependen de la base de V .

6. Sea $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica, donde V es un subespacio de \mathbb{R}_1^3 tipo espacio o tipo tiempo. Pruebe que si v_1, v_2 es una base ortonormal de V entonces

$$tr(b) := \epsilon_2 b(v_1, v_1) + \epsilon_1 b(v_2, v_2)$$

y

$$det(b) = \epsilon_1 \epsilon_2 (\langle b(v_1, v_1), b(v_2, v_2) \rangle - \langle b(v_1, v_2), b(v_1, v_2) \rangle).$$

Aquí usamos que $\epsilon_1 = \langle v_1, v_1 \rangle$ y $\epsilon_2 = \langle v_2, v_2 \rangle$.

7. Sea $M \subset \mathbb{R}_1^3$ una superficie lisa. Supongamos que M admite un campo vectorial tangente $X : M \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ tipo tiempo, es decir $X(p) \in T_p M$ y $X(p)$ es tipo tiempo para todo $p \in M$.

Demuestre que M es tipo tiempo.

8. Sean v, w una base ortonormal de $T_p M$ donde M es una superficie tipo espacio o tipo tiempo. Pruebe que si v es una dirección principal de M entonces w también es una dirección principal.

9. Demuestre que una superficie es tipo tiempo si y sólo si $det g < 0$, donde g denota la matriz de la métrica en alguna base.

10. Demuestre que una superficie es tipo espacio si y sólo si $\det g > 0$ donde g denota la matriz de la métrica en alguna base.
11. Demuestre que una superficie es tipo luz si y sólo si $\det g = 0$ donde g denota la matriz de la métrica en alguna base.
12. Calcule la curvatura media de una superficie reglada:

$$\mathbf{x}(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u)$$

donde α es una curva tipo espacio parametrizada por longitud de arco, es decir $\|\alpha'\| = 1$, y β es una curva tipo tiempo tal que $\langle \beta, \beta \rangle = -1$.

13. Calcular la curvatura gaussiana de la superficie reglada del problema anterior.

CAPITULO 4

Conexión de Levi-Civita: Extrínseco vs Intrínseco

4.1 Campos vectoriales

Definición 4.1.1 Sea $F : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ y sea $v \in \mathbb{R}_1^3$ un vector. La *derivada direccional* de F en la dirección v en $p \in \mathbb{R}_1^3$, denotada $v \cdot F$ se define como

$$v \cdot F = \frac{d}{dt}|_{t=t_0} (F \circ \alpha),$$

donde $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ es una curva lisa con condiciones iniciales $\alpha(t_0) = p$ y $\alpha'(t_0) = v$ para algún $t_0 \in (a, b)$.

Proposición 4.1.1 *La derivada direccional descrita en la Definición 4.1.1 no depende de la curva α , sólo de las condiciones iniciales.*

Demostración. Sean $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ y $\beta : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ dos curvas con las condiciones iniciales $\alpha(t_0) = p$ y $\alpha'(t_0) = v$ y $\beta(s_0) = p$ y $\beta'(s_0) = v$. Por la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|_{t=t_0} (F \circ \alpha) &= F_{*|\alpha(t_0)} \alpha'(t_0) = F_{*|p}(v) \\ &= F_{*|\beta(s_0)} \beta'(s_0) = \frac{d}{dt}|_{s=s_0} (F \circ \beta) \end{aligned}$$

□

Definición 4.1.2 Un campo vectorial C^∞ en \mathbb{R}_1^3 es una aplicación C^∞ , $X : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$. Dado un abierto Ω en \mathbb{R}_1^3 , un campo vectorial en Ω es una aplicación C^∞ $X : \Omega \subset \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$.

Ejemplo 4.1.1 Hay tres campos vectoriales constantes que vamos a usar posteriormente. Los denotaremos por $E_1, E_2, E_3 : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ y están dados por

$$E_1(x, y, z) = (1, 0, 0), \quad E_2(x, y, z) = (0, 1, 0), \quad E_3(x, y, z) = (0, 0, 1).$$

Un hecho importante es que cualquier campo vectorial $X = (X_1, X_2, X_3)$ se escribe como

$$\begin{aligned} X &= X_1 E_1 + X_2 E_2 + X_3 E_3 \\ &= \langle X, E_1 \rangle E_1 + \langle X, E_2 \rangle E_2 + \langle X, E_3 \rangle E_3. \end{aligned}$$

Definición 4.1.3 Sea $F : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ y sea $X : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ un campo vectorial. La *derivada direccional* de F en la dirección de X , es una función denotada $X \cdot F$ y se define como

$$(X \cdot F)(p) = X(p) \cdot F.$$

Observe que $X(p)$ es un vector y $X(p) \cdot F$ está definido en la Definición 4.1.1.

Ejemplo 4.1.2 Consideremos cualquier función C^∞ , $F : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Vamos a calcular $E_1 \cdot F, E_2 \cdot F, E_3 \cdot F$. Haremos uso de las curvas $\alpha(t) = p + t(1, 0, 0)$, $\beta(t) = p + t(0, 1, 0)$ y $\gamma(t) = p + t(0, 0, 1)$.

$$\begin{aligned} (E_1 \cdot F)(p) &= E_1(p) \cdot F = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (F \circ \alpha(t)) = F_{*|\alpha(0)} \alpha'(0) = F_x(p), \\ (E_2 \cdot F)(p) &= E_2(p) \cdot F = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (F \circ \beta(t)) = F_{*|\beta(0)} \beta'(0) = F_y(p), \\ (E_3 \cdot F)(p) &= E_3(p) \cdot F = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (F \circ \gamma(t)) = F_{*|\gamma(0)} \gamma'(0) = F_z(p), \end{aligned}$$

es decir obtenemos las derivadas parciales de F .

La noción de derivada direccional pertenece a la topología diferencial. La topología diferencial generaliza conceptos de cálculo diferencial. Por ejemplo,

en cálculo se define que es una función lisa con dominio un abierto del plano euclidiano. En topología diferencial se puede definir que es una función lisa con dominio más general como lo es una superficie lisa.

El concepto de gradiente de una función que introducimos a continuación depende de la métrica, pertenece a la geometría diferencial.

Definición 4.1.4 Sea $F : \mathbb{R}_1^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ . El *gradiente* de F , denotado por ∇F , es el campo vectorial determinado por

$$\langle \nabla F, X \rangle = X \cdot F.$$

Lema 4.1.1 *El gradiente de una función F está dado por*

$$\nabla F = (F_x, F_y, -F_z).$$

Demostración. Basta que en la Definición 4.1.4, tomemos X igual a E_1, E_2, E_3 y apliquemos el Ejemplo 4.1.2:

$$\langle \nabla F, E_1 \rangle = E_1 \cdot F = F_x, \langle \nabla F, E_2 \rangle = E_2 \cdot F = F_y, \langle \nabla F, E_3 \rangle = E_3 \cdot F = F_z.$$

Por último resta verificar que

$$\nabla F = \langle \nabla F, E_1 \rangle E_1 + \langle \nabla F, E_2 \rangle E_2 - \langle \nabla F, E_3 \rangle E_3.$$

□

Ejemplo 4.1.3 *Gradiente de las funciones coordenadas.*

Las funciones coordenadas con dominio en una superficie M están dadas por: $\pi_{1|M}(p) = x, \pi_{2|M}(p) = y, \pi_{3|M}(p) = z$, donde $p = (x, y, z)$ es cualquier punto en M . Por el Lema 4.1.1,

$$\nabla \pi_1(x, y, z) = ((\pi_1)_x, (\pi_1)_y, (\pi_1)_z) = (1, 0, 0) = E_1(x, y, z) \quad (4.1)$$

$$\nabla \pi_2(x, y, z) = ((\pi_2)_x, (\pi_2)_y, (\pi_2)_z) = (0, 1, 0) = E_2(x, y, z) \quad (4.2)$$

$$\nabla \pi_3(x, y, z) = ((\pi_3)_x, (\pi_3)_y, (\pi_3)_z) = (0, 0, 1) = E_3(x, y, z). \quad (4.3)$$

Definición 4.1.5 *Corchete de Lie.*

Sean X, Y dos campos vectoriales C^∞ . El *corchete de Lie*, denotado $[X, Y]$ es el campo vectorial que al aplicarlo a una función lisa $F : \mathbb{R}_1^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, el resultado es

$$[X, Y] \cdot F = X \cdot (Y \cdot F) - Y \cdot (X \cdot F).$$

Lema 4.1.2 Sea X un campo vectorial en \mathbb{R}_1^3 . Entonces

$$X = (X \cdot \pi_1)E_1 + (X \cdot \pi_2)E_2 - (X \cdot \pi_3)E_3. \quad (4.4)$$

Demostración. Sabemos que

$$X = \langle X, E_1 \rangle E_1 + \langle X, E_2 \rangle E_2 - \langle X, E_3 \rangle E_3$$

y por el Ejemplo 4.1.3 :

$$\langle X, E_i \rangle = \langle X, \nabla \pi_i \rangle = X \cdot \pi_i. \text{ Esto concluye la prueba. } \square$$

Proposición 4.1.2 El corchete de Lie $[X, Y]$ de los campos X, Y en \mathbb{R}_1^3 está dado por

$$[X, Y] = (\langle \nabla Y_1, X \rangle - \langle \nabla X_1, Y \rangle, \langle \nabla Y_2, X \rangle - \langle \nabla X_2, Y \rangle, -\langle \nabla Y_3, X \rangle + \langle \nabla X_3, Y \rangle)$$

ó de manera equivalente por

$$[X, Y] = (X \cdot Y_1 - Y \cdot X_1, X \cdot Y_2 - Y \cdot X_2, -X \cdot Y_3 + Y \cdot X_3),$$

donde $X = (X_1, X_2, X_3)$ y $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$.

Demostración. Para $i = 1, 2, 3$, sea $\pi_i : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la función proyección dada por $\pi_1(x, y, z) = x$, $\pi_2(x, y, z) = y$, $\pi_3(x, y, z) = z$.

Observemos que

$$\begin{aligned} [X, Y] \cdot \pi_1 &= X \cdot (Y \cdot \pi_1) - Y \cdot (X \cdot \pi_1) = X \cdot (\langle \nabla \pi_1, Y \rangle) - Y \cdot (\langle \nabla \pi_1, X \rangle) \\ &= X \cdot (\langle E_1, Y \rangle) - Y \cdot (\langle E_1, X \rangle) \\ &= X \cdot Y_1 - Y \cdot X_1 = \langle \nabla Y_1, X \rangle - \langle \nabla X_1, Y \rangle \\ [X, Y] \cdot \pi_2 &= X \cdot (Y \cdot \pi_2) - Y \cdot (X \cdot \pi_2) = X \cdot (\langle \nabla \pi_2, Y \rangle) - Y \cdot (\langle \nabla \pi_2, X \rangle) \\ &= X \cdot (\langle E_2, Y \rangle) - Y \cdot (\langle E_2, X \rangle) \\ &= X \cdot Y_2 - Y \cdot X_2 = \langle \nabla Y_2, X \rangle - \langle \nabla X_2, Y \rangle \\ [X, Y] \cdot \pi_3 &= X \cdot (Y \cdot \pi_3) - Y \cdot (X \cdot \pi_3) = X \cdot (\langle \nabla \pi_3, Y \rangle) - Y \cdot (\langle \nabla \pi_3, X \rangle) \\ &= X \cdot (\langle E_3, Y \rangle) - Y \cdot (\langle E_3, X \rangle) \\ &= X \cdot Y_3 - Y \cdot X_3 = \langle \nabla Y_3, X \rangle - \langle \nabla X_3, Y \rangle. \end{aligned}$$

Para concluir se aplica el Lema 4.1.2. \square

4.2 La conexión de Levi-Civita

Como veremos en esta sección, el concepto de conexión es una generalización de la derivada direccional de un campo vectorial en la dirección de otro campo vectorial. Por medio de las conexiones se puede calcular la curvatura de un espacio.

Definición 4.2.1 Denotemos por $\mathcal{X}(\mathbb{R}_1^3)$ al conjunto de los campos vectoriales en el espacio \mathbb{R}_1^3 . Una conexión sobre \mathbb{R}_1^3 , denotada por D , de \mathbb{R}_1^3 es una función $D : \mathcal{X}(\mathbb{R}_1^3) \times \mathcal{X}(\mathbb{R}_1^3) \rightarrow \mathcal{X}(\mathbb{R}_1^3)$ que a cada pareja de campos vectoriales (X, Y) les asocia un campo vectorial denotado por $D_X Y$ tal que

1. $D_{FX} Y = F D_X Y$.
2. $D_X (FY) = (X \cdot F)Y + F D_X Y$ (regla de Leibnitz).
3. D es \mathbb{R} -lineal en X y Y .
Además, una conexión D se llama de Levi-Civita si satisface las dos condiciones extras
4. $X \cdot \langle Y, Z \rangle = \langle D_X Y, Z \rangle + \langle Y, D_X Z \rangle$ (compatibilidad con la métrica de Lorentz).
5. $D_X Y - D_Y X = [X, Y]$ (libre de torsión).

Lema 4.2.1 *Unicidad de la conexión de Levi-Civita.*

Una conexión de Levi-Civita es única y está caracterizada por la fórmula de Koszul

$$2\langle D_X Y, Z \rangle = X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle \\ - \langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Y, [Z, X] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle.$$

Recíprocamente, si D es una función que satisface la fórmula de Koszul entonces es una conexión de Levi-Civita.

Demostración. Sea D una conexión de Levi-Civita. Usamos la compatibilidad con la métrica para ver que

$$X \cdot \langle Y, Z \rangle = \langle D_X Y, Z \rangle + \langle Y, D_X Z \rangle \\ Y \cdot \langle Z, X \rangle = \langle D_Y Z, X \rangle + \langle Z, D_Y X \rangle \\ -Z \cdot \langle X, Y \rangle = -\langle D_Z X, Y \rangle - \langle X, D_Z Y \rangle.$$

Como D es libre de torsión

$$\begin{aligned} -\langle X, [Y, Z] \rangle &= -\langle X, D_Y Z \rangle + \langle X, D_Z Y \rangle \\ \langle Y, [Z, X] \rangle &= \langle Y, D_Z X \rangle - \langle Y, D_X Z \rangle \\ \langle Z, [X, Y] \rangle &= \langle Z, D_X Y \rangle - \langle Z, D_Y X \rangle. \end{aligned}$$

La suma total es $2\langle D_X Y, Z \rangle$, lo cual afirma la fórmula de Koszul. Finalmente, observe que la fórmula de Koszul implica la unicidad ya que si D' es otra conexión de Levi-Civita también cumple que

$$\begin{aligned} 2\langle D'_X Y, Z \rangle &= X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle \\ &\quad -\langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Y, [Z, X] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle \\ &= 2\langle D_X Y, Z \rangle, \end{aligned}$$

lo cual prueba que $D_X Y = D'_X Y$. \square

Observación 4.2.1 La fórmula de Koszul nos dice que la conexión está determinada por la métrica y la estructura diferenciable de \mathbb{R}_1^3 .

Teorema 4.2.1 *La conexión de Levi-Civita de \mathbb{R}_1^3 asociada a la métrica de Lorentz está dada por*

$$D_X Y = (X \cdot Y_1, X \cdot Y_2, X \cdot Y_3)$$

ó equivalentemente por

$$D_X Y = (\langle X, \nabla Y_1 \rangle, \langle X, \nabla Y_2 \rangle, \langle X, \nabla Y_3 \rangle),$$

donde $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$.

Demostración. Sea D la conexión de Levi-Civita de \mathbb{R}_1^3 . Por la compatibilidad con la métrica

$$\begin{aligned} \langle D_X Y, E_1 \rangle &= \langle D_X Y, E_1 \rangle + \langle Y, D_X E_1 \rangle = X\langle Y, E_1 \rangle = X \cdot Y_1, \\ \langle D_X Y, E_2 \rangle &= \langle D_X Y, E_2 \rangle + \langle Y, D_X E_2 \rangle = X\langle Y, E_2 \rangle = X \cdot Y_2, \\ \langle D_X Y, E_3 \rangle &= \langle D_X Y, E_3 \rangle + \langle Y, D_X E_3 \rangle = X\langle Y, E_3 \rangle = -X \cdot Y_3. \end{aligned}$$

Ahora sólo hay que sustituir en

$$D_X Y = \langle D_X Y, E_1 \rangle E_1 + \langle D_X Y, E_2 \rangle E_2 - \langle D_X Y, E_3 \rangle E_3.$$

\square

Observación 4.2.2 El Teorema 4.2.1, permite ver que la conexión de Levi-Civita del espacio de Minkowski es igual a la conexión de Levi-Civita del espacio Euclidiano con la métrica Euclidiana estándar: La derivada direccional de campos vectoriales.

Definición 4.2.2 El *tensor de curvatura Riemanniano* de \mathbb{R}_1^3 es la función $R^D : \mathcal{X}(\mathbb{R}_1^3) \times \mathcal{X}(\mathbb{R}_1^3) \times \mathcal{X}(\mathbb{R}_1^3) \longrightarrow \mathcal{X}(\mathbb{R}_1^3)$ dada por

$$R^D(X, Y)Z = D_X(D_Y Z) - D_Y(D_X Z) - D_{[X, Y]}Z.$$

Por simplicidad escribiremos: $R^D(X, Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X, Y]}Z$.

Lema 4.2.2 Para cualesquiera campos vectoriales $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathbb{R}_1^3)$,

$$R^D(X, Y)Z = 0.$$

Es decir, el tensor de curvatura Riemanniano de \mathbb{R}_1^3 se anula.

Demostración. Primero aplicamos una vez la conexión: Sean $X, Y, Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$ cualesquiera campos vectoriales.

Denotamos $W = (W_1, W_2, W_3) := D_Y Z = (Y \cdot Z_1, Y \cdot Z_2, Y \cdot Z_3)$. Y ahora volvemos a derivar:

$$\begin{aligned} D_X(D_Y Z) &= D_X W = (X \cdot W_1, X \cdot W_2, X \cdot W_3) \\ &= (X \cdot (Y \cdot Z_1), X \cdot (Y \cdot Z_2), X \cdot (Y \cdot Z_3)). \end{aligned}$$

Análogamente,

$$D_Y(D_X Z) = (Y \cdot (X \cdot Z_1), Y \cdot (X \cdot Z_2), Y \cdot (X \cdot Z_3)).$$

Ahora observemos que:

$$\begin{aligned} D_{[X, Y]}Z &= ([X, Y] \cdot Z_1, [X, Y] \cdot Z_2, [X, Y] \cdot Z_3) = \\ &(X \cdot (Y \cdot Z_1) - Y \cdot (X \cdot Z_1), X \cdot (Y \cdot Z_2) - Y \cdot (X \cdot Z_2), X \cdot (Y \cdot Z_3) - Y \cdot (X \cdot Z_3)). \end{aligned}$$

Es claro que

$$D_X(D_Y Z) - D_Y(D_X Z) = D_{[X, Y]}Z.$$

□

4.3 Conexión inducida en una superficie

Sea M una superficie lisa en \mathbb{R}_1^3 tipo espacio o tipo tiempo. En esta sección veremos que la componente tangente en M de la conexión de Levi-Civita D de \mathbb{R}_1^3 es la conexión de Levi-Civita ∇ de M y por medio de esta conexión daremos la fórmula para calcular la curvatura Gaussiana de M .

Definición 4.3.1 Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función. Se dice que f es C^∞ si f se puede extender localmente a una función C^∞ definida en un abierto de \mathbb{R}_1^3 .

Definición 4.3.2 Un campo vectorial tangente sobre M es una función $X : M \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ tal que para todo $p \in M$,

$$X(p) \in T_p M.$$

El campo X se dice C^∞ si para cada $p \in M$ existe un abierto $V \subset \mathbb{R}_1^3$ con $p \in V$ y un campo C^∞ , $\tilde{X} : V \subset \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ tal que

$$X = \tilde{X}|_{(V \cap M)}$$

es decir, X es la restricción de \tilde{X} . De manera equivalente podemos decir que X es C^∞ si X se puede extender localmente a un campo C^∞ con dominio un abierto de \mathbb{R}_1^3 .

Observación 4.3.1 En cada punto $p \in M$ se tiene una descomposición ortogonal:

$$\mathbb{R}_1^3 = T_p M + (T_p M)^\perp.$$

Cada vector $v \in \mathbb{R}_1^3$ tiene una descomposición en su parte tangente v^T y en su parte ortogonal a M v^\perp , es decir

$$v = v^T + v^\perp.$$

Lo mismo se puede hacer si en vez de un vector tenemos un campo vectorial X : $X = X^T + X^\perp$. Es decir, para cada $p \in M$

$$X(p) = X^T(p) + X^\perp(p).$$

Definición 4.3.3 *La conexión inducida.*

Sean $X, Y : M \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ campos vectoriales tangentes sobre M los cuales son C^∞ . Sea $p \in M$ y sean \tilde{X}, \tilde{Y} campos vectoriales en \mathbb{R}_1^3 definidos en abiertos del espacio de Minkowski que contienen a p y que son extensiones de X y Y respectivamente. Definimos

$$D_X Y := D_{\tilde{X}} \tilde{Y}.$$

Entonces tenemos la descomposición:

$$D_X Y = (D_X Y)^T + (D_X Y)^\perp.$$

Análogamente, si $n : M \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ es la aplicación de Gauss de M definimos

$$D_X n := D_{\tilde{X}} \tilde{n},$$

donde \tilde{n} es un campo vectorial en \mathbb{R}_1^3 definido en un abierto del espacio de Minkowski que contiene a p y que es extensión de n .

Finalmente introducimos la conexión en la superficie, la segunda forma fundamental y el operador de forma:

$$\nabla_X Y := (D_X Y)^T, \text{ conexión inducida en una superficie.}$$

$$II(X, Y) = (D_X Y)^\perp,$$

$$S(X) = -D_X n \quad \text{fórmula de Weingarten.} \quad (4.5)$$

Nótese que es válida la siguiente relación llamada fórmula de Gauss

$$D_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y). \quad (4.6)$$

Proposición 4.3.1 *$D_X Y$ y $D_X n$ no dependen de las extensiones de los campos X, Y y n . En particular, $\nabla_X Y, II(X, Y)$ y $S(X)$ están bien definidos.*

Proposición 4.3.2 *En términos de la aplicación de Gauss de M , la segunda forma fundamental se expresa como*

$$II(X, Y) = \epsilon \langle S(X), Y \rangle n.$$

Esta igualdad se deduce de $\langle II(X, Y), n \rangle = \langle S(X), Y \rangle$.

Demostración. Como $II(X, Y)$ es un campo vectorial ortogonal a M , entonces debe ser de la forma λn para alguna función $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$. Para encontrar a λ , conviene hacer el producto escalar con n en ambos lados de la igualdad $II(X, Y) = \lambda n$. Se obtiene que $\langle II(X, Y), n \rangle = \lambda \langle n, n \rangle$. Deducimos que

$$II(X, Y) = \epsilon \langle II(X, Y), n \rangle n,$$

donde $\epsilon = \langle n, n \rangle$. Por otro lado $\langle II(X, Y), n \rangle = \langle D_X Y, n \rangle = -\langle Y, D_X n \rangle = \langle Y, S(X) \rangle$. Por sustitución llegamos al resultado deseado. \square

Ejemplo 4.3.1 Consideremos el cilindro de revolución M en \mathbb{R}_1^3 definido por la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Como el eje de revolución es el eje z , el cilindro es una superficie tipo tiempo. La aplicación de Gauss de este cilindro es $n(x, y, z) = (x, y, 0)$. Definimos dos campos vectoriales tangentes a M :

$$X(x, y, z) = (-y, x, 0), \quad Y(x, y, z) = (0, 0, 1).$$

Estos campos tangentes, se extienden a campos vectoriales en \mathbb{R}_1^3 : $\tilde{X}(x, y, z) = (-y, x, 0)$, $\tilde{Y}(x, y, z) = (0, 0, 1)$. Por simplicidad, los llamaremos como X en lugar de \tilde{X} y lo mismo para \tilde{Y} . Estos campos los podemos escribir

como $X(x, y, z) = -yE_1 + xE_2$, $Y(x, y, z) = E_3$.

$$\begin{aligned}
D_X X &= (X \cdot X_1, X \cdot X_2, X \cdot X_3). \\
X \cdot X_1 &= (-yE_1 + xE_2) \cdot X_1 = -yE_1 \cdot (-y) + xE_2 \cdot (-y) = -x. \\
X \cdot X_2 &= (-yE_1 + xE_2) \cdot X_2 = -yE_1 \cdot (x) + xE_2 \cdot (x) = -y. \\
X \cdot X_3 &= (-yE_1 + xE_2) \cdot X_3 = -yE_1 \cdot (0) + xE_2 \cdot (0) = 0. \\
D_X X &= (-x, -y, 0), \text{ se sigue que} \\
\nabla_X X &= (D_X X)^T = (0, 0, 0), \\
II(X, X) &= (D_X X)^\perp = \langle D_X X, n \rangle n = -n = (-x, -y, 0). \\
D_Y Y &= (Y \cdot Y_1, Y \cdot Y_2, Y \cdot Y_3). \\
Y \cdot Y_1 &= (E_3) \cdot 0 = 0, \quad Y \cdot Y_2 = (E_3) \cdot 0 = 0, \quad Y \cdot Y_3 = (E_3) \cdot 1 = 0. \\
D_Y Y &= (0, 0, 0), \text{ entonces la parte tangente y ortogonal es} \\
\nabla_Y Y &= (D_Y Y)^T = (0, 0, 0), \quad II(Y, Y) = (D_Y Y)^\perp = (0, 0, 0). \\
D_X Y &= (X \cdot Y_1, X \cdot Y_2, X \cdot Y_3). \\
X \cdot Y_1 &= X \cdot 0 = 0, \quad X \cdot Y_2 = X \cdot 0 = 0, \quad X \cdot Y_3 = X \cdot 1 = 0. \\
D_X Y &= (0, 0, 0) \text{ en consecuencia} \\
\nabla_X Y &= (D_X Y)^T = (0, 0, 0), \quad II(X, Y) = (D_X Y)^\perp = (0, 0, 0).
\end{aligned}$$

4.4 Tensor de Curvatura, Ecuación de Gauss y de Codazzi

Definición 4.4.1 El *tensor de curvatura Riemanniana* de M es la función $R = R^\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z. \quad (4.7)$$

Por simplicidad escribiremos: $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z$.

Teorema 4.4.1 (*Ecuación de Gauss*)

Sean X, Y, Z, W campos vectoriales tangentes a M definidos en una vecindad de $p \in M$, donde M es una superficie tipo espacio o tipo tiempo. Entonces se satisface la Ecuación de Gauss:

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle II(X, W), II(Y, Z) \rangle - \langle II(X, Z), II(Y, W) \rangle. \quad (4.8)$$

Demostración. La clave para deducir la Ecuación de Gauss es aplicar las fórmulas de Gauss y Weingarten y usar la descomposición en parte tangente y parte normal:

$D_Y Z = \nabla_Y Z + II(Y, Z)$. Entonces $D_X D_Y Z = D_X(\nabla_Y Z) + D_X(II(Y, Z))$.

Necesitamos analizar estos dos términos:

Por la fórmula de Gauss, $D_X(\nabla_Y Z) = \nabla_X(\nabla_Y Z) + II(X, \nabla_Y Z)$, esto implica que $\langle D_X(\nabla_Y Z), W \rangle = \langle \nabla_X(\nabla_Y Z), W \rangle$ ya que $II(X, \nabla_Y Z)$ es ortogonal a M .

En el caso del segundo término,

$$\begin{aligned} \langle D_X(II(Y, Z)), W \rangle &= -\langle II(Y, Z), D_X W \rangle = -\langle II(Y, Z), (D_X W)^\perp \rangle \\ &= -\langle II(Y, Z), II(X, W) \rangle. \end{aligned}$$

Ahora deducimos lo siguiente

$$\begin{aligned} \langle D_X D_Y Z, W \rangle &= \langle D_X(\nabla_Y Z), W \rangle + \langle D_X(II(Y, Z)), W \rangle \\ &= \langle \nabla_X(\nabla_Y Z), W \rangle - \langle II(Y, Z), II(X, W) \rangle. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\langle D_Y D_X Z, W \rangle = \langle \nabla_Y(\nabla_X Z), W \rangle - \langle II(X, Z), II(Y, W) \rangle.$$

Finalmente, por la fórmula de Gauss $D_{[X,Y]} Z = \nabla_{[X,Y]} Z + II([X, Y], Z)$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle D_{[X,Y]} Z, W \rangle &= \langle \nabla_{[X,Y]} Z, W \rangle + \langle II([X, Y], Z), W \rangle \\ &= \langle \nabla_{[X,Y]} Z, W \rangle. \end{aligned}$$

Ahora recordemos que el tensor de curvatura Riemanniana de $\mathbb{R}_1^3 = 0$: $R^D(X, Y)Z = 0$.

Deducimos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle D_X(D_Y Z) - D_Y(D_X Z) - D_{[X,Y]} Z, W \rangle \\ &= \langle \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, W \rangle - \langle II(Y, Z), II(X, W) \rangle \\ &\quad + \langle II(X, Z), II(Y, W) \rangle \\ &= \langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle II(Y, Z), II(X, W) \rangle + \langle II(X, Z), II(Y, W) \rangle \end{aligned}$$

□

Definición 4.4.2 La derivada covariante del operador de forma S , de una superficie M , se define como

$$(\nabla_X S)(Y) = \nabla_X(SY) - S(\nabla_X Y), \quad (4.9)$$

para todo X, Y campos vectoriales de M .

Proposición 4.4.1 La derivada covariante $\nabla_X S$ es nuevamente un operador simétrico para todo campo vectorial X tangente a M .

Demostración.

$$\begin{aligned} \langle (\nabla_X S)(Y), Z \rangle &= \langle \nabla_X(S(Y)), Z \rangle - \langle S(\nabla_X Y), Z \rangle \\ &= -\langle S(Y), \nabla_X Z \rangle + X \cdot \langle S(Y), Z \rangle - \langle \nabla_X Y, S(Z) \rangle \\ &= -\langle Y, S(\nabla_X Z) \rangle + X \cdot \langle Y, S(Z) \rangle - \langle \nabla_X Y, S(Z) \rangle \\ &= \langle Y, \nabla_X(S(Z)) \rangle - \langle Y, S(\nabla_X Z) \rangle \\ &= \langle Y, (\nabla_X S)(Z) \rangle. \end{aligned}$$

En la segunda igualdad aplicamos que el operador de forma es simétrico y la compatibilidad con la métrica de la conexión de Levi-Civita ∇ de M . En la tercer igualdad se aplicó que el S es un operador simétrico. \square

Teorema 4.4.2 (*Ecuación de Codazzi*)

Para toda superficie tipo espacio o tipo tiempo M en \mathbb{R}_1^3 se satisface la ecuación de Codazzi:

$$(\nabla_X S)(Y) = (\nabla_Y S)(X), \quad (4.10)$$

para todo X, Y campos vectoriales tangentes a M .

Demostración.

$$\begin{aligned} (\nabla_X S)(Y) &= \nabla_X(SY) - S(\nabla_X Y) = -\nabla_X(D_Y n) + D_{\nabla_X Y} n \\ &= -(D_X D_Y n)^T + D_{\nabla_X Y} n = -(D_X D_Y n + D_{[X, Y]} n)^T + D_{\nabla_X Y} n \\ &= -(D_X D_Y n)^T - D_{(\nabla_X Y - \nabla_Y X)} n + D_{\nabla_X Y} n = -(D_X D_Y n)^T + D_{\nabla_Y X} n \\ &= (D_X S(Y))^T - S(\nabla_Y X) = \nabla_X S(Y) - S(\nabla_Y X) = (\nabla_Y S)(X). \end{aligned}$$

En el primer renglón aplicamos la relación $SW = -D_W n$, para todo campo vectorial W tangente a M . Notesé que en el segundo renglón aplicamos que la curvatura del espacio de Minkowski es cero, lo cual implica que $D_X D_Y n = D_X D_Y n + D_{[X, Y]} n$ para todo X, Y, n campos vectoriales. En

el tercer renglón, fue necesaria la igualdad $D_{[X,Y]}n = (D_{[X,Y]}n)^T$ que se deduce porque la derivada del campo normal n es tangente a M . Finalmente, en el cuarto renglón se aplicó que la parte tangente en M de la conexión del espacio de Minkowski D es la conexión ∇ de M .

□

Definición 4.4.3 La *curvatura seccional* $K(\Pi)$ de M en el punto p se define como

$$K(\Pi) = \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2},$$

donde X, Y son campos vectoriales tangentes de M tal que $X(p), Y(p)$ es una base del plano no degenerado $\Pi := T_pM$.

Corolario 4.4.1 *Teorema Egregium de Gauss*

La *curvatura Gaussiana* de M es igual a la *curvatura seccional*:

$$K = \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2}.$$

Demostración. Sea $p \in M$ y sea X, Y una base ortogonal de T_pM , i.e. $\langle X, Y \rangle = 0$. Por la ecuación de Gauss (4.8),

$$\langle R(X, Y)Y, X \rangle = \langle II(X, X), II(Y, Y) \rangle - \langle II(X, Y), II(X, Y) \rangle.$$

Entonces la curvatura seccional es

$$\begin{aligned} \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} &= \frac{\langle II(X, X), II(Y, Y) \rangle - \langle II(X, Y), II(X, Y) \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} \\ &= \epsilon_1 \epsilon_2 \langle II(X, X), II(Y, Y) \rangle - \langle II(X, Y), II(X, Y) \rangle, \end{aligned}$$

donde $\epsilon_1 = \langle X, X \rangle$ y $\epsilon_2 = \langle Y, Y \rangle$. □

Recordemos que una superficie mínima tiene por definición vector de curvatura media cero.

Corolario 4.4.2 La *curvatura Gaussiana* K de una superficie mínima satisface que $K \geq 0$ si M es tipo espacio y si K es constante igual a cero, M es parte de un plano. Si M es tipo tiempo el signo de K puede cambiar.

Demostración. Sea $p \in M$ cualquier punto. En una base ortonormal v_1, v_2 de T_pM : $0 = \tilde{H}(p) = \langle v_1, v_1 \rangle II(v_1, v_1) + \langle v_2, v_2 \rangle II(v_2, v_2)$, es decir

$$\langle v_1, v_1 \rangle II(v_1, v_1) = -\langle v_2, v_2 \rangle II(v_2, v_2).$$

Por el Corolario 4.4.1, la curvatura Gaussiana es

$$\begin{aligned} K &= \frac{\langle II(v_1, v_1), II(v_2, v_2) \rangle - \langle II(v_1, v_2), II(v_1, v_2) \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle \langle v_2, v_2 \rangle} \\ &= -\langle II(v_1, v_1), II(v_1, v_1) \rangle - \langle v_1, v_1 \rangle \langle v_2, v_2 \rangle \langle II(v_1, v_2), II(v_1, v_2) \rangle. \end{aligned}$$

Ahora observemos que $\langle II(v, w), II(v, w) \rangle \leq 0$ y $\langle v_1, v_1 \rangle \langle v_2, v_2 \rangle > 0$ si M es tipo espacio y $\langle II(v, w), II(v, w) \rangle \geq 0$ y $\langle v_1, v_1 \rangle \langle v_2, v_2 \rangle < 0$ si M es tipo tiempo. Observe, que en una base ortonormal como v_1, v_2 no se puede tener que ambos vectores sean tipo tiempo.

Además si M es tipo espacio y la curvatura es constante cero entonces

$$\langle II(v_1, v_1), II(v_1, v_1) \rangle + \langle II(v_1, v_2), II(v_1, v_2) \rangle = 0.$$

Como ambos sumandos son menores o iguales a cero,

$$\langle II(v_1, v_1), II(v_1, v_1) \rangle = 0 = \langle II(v_1, v_2), II(v_1, v_2) \rangle.$$

Esto implica que $II(v_1, v_1) = 0 = II(v_1, v_2) = II(v_2, v_2)$. Es decir, la segunda forma fundamental es constante igual a cero. \square

4.5 Geodésicas y líneas de curvatura

Definición 4.5.1 Sea M una superficie no degenerada en \mathbb{R}_1^3 . Sea $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ una curva regular con velocidad constante $|\gamma'|$ y que está contenida en M , es decir $\gamma(t) \in M$ para todo $t \in (a, b)$. La curva γ se dice *geodésica* de M si $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$.

Lema 4.5.1 Una curva γ contenida en M es geodésica de M si y sólo si la aceleración $\gamma''(t)$ es ortogonal a M para todo $t \in (a, b)$.

Demostración. Sea $T := \gamma'(t)$. Por la fórmula de Gauss, $D_T T = \nabla_T T + II(T, T)$. Pero $D_T T = \gamma''(t)$. Podemos sustituir y obtener $\gamma''(t) = \nabla_T T + II(T, T)$. La conclusión es que γ es geodésica de M si y sólo si $\gamma''(t) = II(T, T)$. Pero el valor de la segunda forma fundamental $II(T, T)$ es ortogonal a M a lo largo de γ . \square

Observación 4.5.1 El caracter causal de una geodésica está bien definido: $\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle$ es constante a lo largo de γ . Es decir, no depende de t : Sea $T := \gamma'(t)$. La compatibilidad de la métrica permite decir que, $T \cdot \langle T, T \rangle = 2\langle D_T T, T \rangle = 0$. Ya que por el Lema 4.5.1, $D_T T$ es ortogonal a M y T es tangente a M .

Proposición 4.5.1 Sea M una superficie no degenerada en \mathbb{R}_1^3 . Supongamos que un plano no degenerado P en \mathbb{R}_1^3 intersecta ortogonalmente a M a lo largo de una curva γ . Entonces γ es geodésica de M .

Demostración. La curva $\gamma = M \cap P$ es regular y se puede parametrizar con velocidad constante $|\gamma'|$. Denotemos $T := \gamma'$. Como P es totalmente geodésico, su segunda forma fundamental se anula. La fórmula de Gauss implica que $D_T T = \nabla_T^P T + II(T, T) = \nabla_T^P T \in P$. Por supuesto, ∇^P denota la conexión inducida en P . La afirmación que vamos a verificar es que $D_T T$ es ortogonal a M . Como T tiene norma constante, sabemos que $\langle D_T T, T \rangle = 0$. Tenemos que probar que $D_T T$ es ortogonal a W . Para lo cual basta ver que W es ortogonal al plano P .

Por hipótesis, M y P son ortogonales a lo largo de γ . Esto nos dice que sus vectores ortogonales de norma uno son ortogonales: $\langle \xi^P, \xi \rangle = 0$, donde ξ^P es ortogonal a P y ξ ortogonal a M . Por lo tanto, ξ^P es tangente a M a lo largo de γ . También tenemos que, $\langle D_T T, \xi^P \rangle = 0$ y que $\langle \xi^P, T \rangle = 0$ a lo largo de γ . En resumen, T, ξ^P son vectores ortogonales y de norma constante a lo largo de γ . Esto prueba que son una base para el plano tangente de M a lo largo de γ . Como $D_T T$ es ortogonal a esta base, concluimos que es un campo de vectores ortogonal a M a lo largo de γ . \square

Proposición 4.5.2 Sea M una superficie no degenerada en \mathbb{R}_1^3 . Sea γ una curva regular en M y sea $\Sigma = \Sigma_\gamma$ la superficie reglada ortogonal a M a lo largo de γ . La curva γ es geodésica de M si y sólo si Σ tiene curvatura media constante cero a lo largo de γ .

Demostración. Sea $T(s) := \gamma'(s)$ un vector tangente de norma uno a lo largo de γ . Observemos que $\{T, \xi\}$ es una base ortonormal de $T\Sigma$ a lo largo de γ . El vector de curvatura media H^Σ de Σ a lo largo de γ es

$$H^\Sigma = II^\Sigma(T, T) + II^\Sigma(\xi, \xi);$$

donde II^Σ denota la segunda forma fundamental de Σ en \mathbb{R}_1^3 .

Condición necesaria:

La superficie Σ está foliada por las geodésicas $\sigma(t) := \gamma(s) + t\xi(s)$, ortogonales a M con punto inicial en $\gamma(s)$. Aquí $\xi(s) := \xi(\gamma(s))$. Así tenemos un campo vectorial de norma uno E tangente a Σ el cual extiende a $\xi(s)$. Este campo vectorial E es tangente a las geodésicas de la foliación. Por lo tanto, si D , ∇^Σ son las conexiones de Levi-Civita de \mathbb{R}_1^3 y Σ respectivamente

$$0 = D_E E_{|\gamma(s)} = \nabla_E^\Sigma E_{|\gamma(s)} + II^\Sigma(E(\gamma(s)), E(\gamma(s))) = II^\Sigma(\xi(s), \xi(s)).$$

Así $H^\Sigma = II^\Sigma(T, T)$, a lo largo de γ .

Finalmente, necesitamos introducir un campo vectorial W de M a lo largo de γ tal que $\{T, W\}$ es una base ortonormal de $T_\gamma M$. Observemos que W es una campo vectorial ortogonal a Σ a lo largo de γ , por lo tanto es paralelo a $II^\Sigma(T, T)$ Ahora,

$$\langle II^\Sigma(T, T), W \rangle = \langle W, D_T T \rangle,$$

y como γ es geodésica de M , entonces $D_T T$ es ortogonal a M y así $\langle W, D_T T \rangle = 0$. Esto prueba que $H^\Sigma = II^\Sigma(T, T) = 0$ a lo largo de γ .

Condición suficiente:

Asumimos que Σ tiene curvatura media cero a lo largo de γ : $II^\Sigma(T, T) + II^\Sigma(\xi, \xi) = 0$. Observemos que $\xi|_\gamma$ tiene una extensión a lo largo de Σ como un vector tangente a las geodésicas de \mathbb{R}_1^3 que dan una foliación de Σ .

Así $0 = D_\xi \xi = \nabla_\xi^\Sigma \xi + II^\Sigma(\xi, \xi)$. Por lo tanto, $\nabla_\xi^\Sigma \xi = 0$ and $II^\Sigma(\xi, \xi) = 0$. Podemos deducir que $II^\Sigma(T, T) = 0$.

Por la fórmula de Gauss para $\Sigma \subset \mathbb{R}_1^3$: $D_T T = \nabla_T^\Sigma T + II^\Sigma(T, T) = \nabla_T^\Sigma T$.

Usando de nuevo la fórmula de Gauss para $M \subset \mathbb{R}_1^3$: Tenemos que a lo largo de γ , $D_T T = \nabla_T T + II^\Sigma(T, T)$, donde ∇ es la conexión de Levi-Civita de M .

Esto prueba que $\nabla_T T = \nabla_T^\Sigma T - II^\Sigma(T, T)$. Fimanlmente, sólo tenemos que observar que: $\nabla_T T$ es tangente a M , $II^\Sigma(T, T)$ oe ortogonal a M y que $\nabla_T^\Sigma T$ es tangente a Σ pero ortogonal a T a lo largo de γ , es decir $\nabla_T^\Sigma T$ es una función por ξ el cual es ortogonal a M .

Ahora, debe ser claro que $\nabla_T T = 0$, es decir γ es una geodésica de M . \square

Definición 4.5.2 Sea M una superficie no degenerada en \mathbb{R}_1^3 . Sea $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ una curva regular contenida en M , es decir $\gamma(t) \in M$ para todo $t \in (a, b)$. La curva γ se dice *linea de curvatura* de M si $S_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \lambda(t)\gamma'(t)$

para todo $t \in (a, b)$. Es decir, si a lo largo de γ el vector velocidad de la curva es un vector propio del operador de forma de M .

Lema 4.5.2 *Una curva γ contenida en M es línea de curvatura de M si y sólo si*

$$\langle S(\gamma'(t)), \gamma'(t) \rangle = \langle \gamma''(t), \xi(t) \rangle$$

para todo $t \in (a, b)$ y donde $\xi(t) := \xi(\gamma(t))$.

Demostración. Basta derivar la condición $\langle \gamma'(t), \xi(t) \rangle = 0$, obtenemos,

$$\langle \gamma''(t), \xi(t) \rangle + \langle \gamma'(t), \xi'(t) \rangle = 0.$$

Recordemos la relación $\xi'(t) = D_T \xi = -S(T)$ donde $T := \gamma'(t)$. Entonces, la combinación nos da la igualdad $\langle \gamma''(t), \xi(t) \rangle - \langle \gamma'(t), S(T) \rangle = 0$. \square

Proposición 4.5.3 *Sean M y N dos superficies no degeneradas que se intersectan a lo largo de una curva regular γ . Si $\langle \xi^N(\gamma(t)), \xi(\gamma(t)) \rangle$ es constante a lo largo de γ la cual es línea de curvatura de N entonces γ es línea de curvatura de M .*

Demostración. Sea $T = \gamma'(t)$. Por hipótesis, $-D_T \xi^N = S^N(T) = \lambda(t)T$, donde S^N es el operador de forma de N .

Derivamos:

$$\begin{aligned} 0 &= T \cdot \langle \xi^N(\gamma(t)), \xi(\gamma(t)) \rangle = \langle D_T \xi^N, \xi \rangle + \langle \xi^N, D_T \xi \rangle \\ &= \langle \lambda(t)T, \xi \rangle + \langle \xi^N, D_T \xi \rangle \\ &= \langle \xi^N, D_T \xi \rangle. \end{aligned}$$

Además, $\langle D_T \xi, \xi \rangle = 0$ ya que ξ tiene norma uno. En consecuencia, $D_T \xi$ debe ser linealmente dependiente con $\xi^N \times \xi$.

El caso cuando $\xi = \pm \xi^N$ se realiza cuando M y N son tangentes a lo largo de γ . Aquí se tiene la igualdad $D_T \xi = \pm D_T \xi^N = \pm \lambda(t)T$. Pero $S(T) = -D_T \xi = \pm \lambda(t)T$, lo cual prueba que γ es línea de curvatura de M .

Si N y M no son tangentes a lo largo de γ , el vector $\xi^N \times \xi$ nunca es cero a lo largo de γ . Finalmente, notemos que T también es ortogonal a ξ^N y a ξ . Esto prueba que $D_T \xi$ y T son linealmente independientes. Concluimos que, $S(T) = -D_T \xi = \mu(t)T$. \square

Proposición 4.5.4 *Sea M una superficie no degenerada. Si γ es una geodésica y línea de curvatura de M entonces γ es una curva plana.*

Demostración. La hipótesis nos dice que γ'' es ortogonal a M y por el Lema 4.5.2,

\square

4.6 Campos vectoriales cerrados y conformes

En esta sección vamos a calcular la curvatura en una superficie que admite un campo vectorial llamado cerrado y conforme. Veremos que ejemplos de tales superficies son el plano hiperbólico y el espacio de De Sitter.

Definición 4.6.1 *Sea M una superficie lisa inmersa en \mathbb{R}_1^3 . Un campo vectorial sobre M , $X : M \rightarrow TM$, se llama cerrado y conforme si existe una función lisa $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\nabla_Y X = \varphi Y, \quad (4.11)$$

para todo campo vectorial Y sobre M .

Proposición 4.6.1 *Sea M una superficie en el espacio de Minkowski tipo espacio o tipo tiempo que admite un campo cerrado y conforme. Entonces en cada punto de M donde X no se anula y $X(p)$ no es tipo luz, la curvatura Gaussiana de M está dada por*

$$K(p) = -\frac{(X \cdot \varphi)(p)}{|X(p)|^2}. \quad (4.12)$$

Demostración. Sea $p \in M$ tal que $X(p) \neq 0$. Por tanto existe una vecindad U de p tal que $X(q) \neq 0$ para todo $q \in U$. Podemos suponer que U es suficientemente chica para que exista otro campo vectorial Y de M definido y que no se anula en U . Además Y debe ser asumido ortogonal a X , es decir $\langle X, Y \rangle = 0$.

Por el Teorema Egregium de Gauss, podemos calcular la curvatura Gaussiana calculando la curvatura seccional. Para empezar tenemos que calcular $\langle R(X, Y)Y, X \rangle$:

$\nabla_Y \nabla_X X = \nabla_Y(\varphi X) = (Y \cdot \varphi)X + \varphi^2 Y$. Por lo tanto

$$\langle \nabla_Y \nabla_X X, Y \rangle = \varphi^2 |Y|^2.$$

Ahora, $-\nabla_X \nabla_Y X = -\nabla_X(\varphi Y) = -(X \cdot \varphi)Y - \varphi \nabla_X Y$. Se tiene la igualdad,

$$-\langle \nabla_X \nabla_Y X, Y \rangle = -(X \cdot \varphi)|Y|^2 - \varphi \langle \nabla_X Y, Y \rangle.$$

Finalmente para calcular el último término de la curvatura necesitamos conocer el corchete $[Y, X]$. Como la conexión es libre de torsión

$[Y, X] = \nabla_Y X - \nabla_X Y = \varphi Y - \nabla_X Y$. Por lo tanto
 $-\langle \nabla_{[Y, X]} X, Y \rangle = -\varphi^2 |Y|^2 + \varphi \langle \nabla_X Y, Y \rangle$ y

$$R(Y, X)X = (Y \cdot \varphi)X - (X \cdot \varphi)Y.$$

En base a la Ecuación (4.7), deducimos $\langle R(Y, X)X, Y \rangle = -(X \cdot \varphi)|Y|^2$.
 Entonces la curvatura se calcula como

$$K = \frac{\langle R(Y, X)X, Y \rangle}{|X|^2 |Y|^2}.$$

□

Estamos listos para calcular la curvatura Gaussiana del plano hiperbólico y el espacio de De Sitter por medio de técnicas intrínsecas.

Lema 4.6.1 *Sea $M_c = \mathbb{S}_1^2(c)$ el plano hiperbólico si $c = -1$ ó el espacio de De Sitter si $c = 1$. Sea $p \in M$ y $v \in T_p M \setminus \{0\}$. Entonces el campo vectorial*

$$X(q) := v - c\langle v, q \rangle q, \quad q \in M$$

es cerrado y conforme sobre M y satisface la condición inicial $X(p) = v$. Además para todo campo Y tangente a M , $(\nabla_Y X)_q = \varphi Y$ donde $\varphi(q) := -c\langle X(p), q \rangle$ y $(Y \cdot \varphi)(p) = -c\langle X(p), Y(p) \rangle$.

Demostración. El vector tangente v induce un campo vectorial constante en \mathbb{R}_1^3 denotado también por v y el cual le asigna a cada punto de \mathbb{R}^3 el vector v . Ahora observemos que el campo vectorial X es en efecto tangente a M : Un punto $q \in M$ satisface la condición $\langle q, q \rangle = c$ por lo tanto $\langle X(q), q \rangle = \langle v, q \rangle - c\langle v, q \rangle \langle q, q \rangle = \langle v, q \rangle - c^2 \langle v, q \rangle = 0$. Finalmente, $X(p) = v - c\langle v, p \rangle p = v$ porque $v \in T_p M$ y el vector radial p con punto inicial $p \in M$ es ortogonal a M .

Sea Y un campo vectorial

$$\begin{aligned} \nabla_Y X &= (D_Y X)^T = (D_Y(v - c\langle v, q \rangle q))^T = -(D_Y(\langle v, q \rangle))^T \\ &= -((Y \cdot \langle v, q \rangle)q)^T - (\langle v, q \rangle D_Y q)^T = -(\langle v, q \rangle D_Y q)^T = -\langle v, q \rangle Y. \end{aligned}$$

En el cálculo anterior aplicamos que el campo vectorial v en \mathbb{R}_1^3 es paralelo y que q es ortogonal a M . □

Con la misma notación del Lema 4.6.1, tenemos lo siguiente.

Corolario 4.6.1 *La curvatura Gaussiana del plano hiperbólico o el espacio de De Sitter M_c está dada por $K = c$. El tensor de curvatura es*

$$R(X, Y)Z = c(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y).$$

Demostración. Por la Proposición 4.6.1, $K(p) = -\frac{(X \cdot \varphi)(p)}{|X(p)|^2}$ donde $p \in M$ es un punto donde el campo cerrado y conforme X no se anula. Para aplicar esta fórmula a M_c elegimos como X al campo dado por $X(q) := v - c\langle v, q \rangle q$, donde v no es tipo luz, el cual ya vimos es cerrado y conforme. Además vimos que $\varphi(q) = -c\langle v, q \rangle$. Se sigue que $(X \cdot \varphi)(p) = -c\langle v, X(p) \rangle = -c\langle v, v \rangle = -c|v|^2$ y $|X(p)|^2 = |v|^2 \neq 0$. Entonces

$$K(p) = c.$$

Es decir, la curvatura Gaussiana de $\mathbb{S}_1^2(c)$ es constante e igual a c . Sea $p \in M$ y sean X, Y, Z tres vectores tangentes en $T_p M$. Por el Lema 4.6.1, existen tres campos cerrados y conformes con estos valores en p y que denotamos de igual manera por X, Y, Z . Para cada uno de estos campos hay una función $\varphi_X(q) = -c\langle X(p), q \rangle, \varphi_Y = -c\langle Y(p), q \rangle, \varphi_Z = -c\langle Z(p), q \rangle$.

Vamos a calcular los términos del tensor de curvatura en el punto p :

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z &= \nabla_X(\varphi_Z Y) = (X \cdot \varphi_Z)Y + \varphi_Z \nabla_X Y \\ &= (X \cdot \varphi_Z)Y + \varphi_Z \varphi_Y X = -c\langle Z(p), X(p) \rangle Y + \varphi_Z \varphi_Y X. \end{aligned}$$

Por sustitución tenemos que,

$$-\nabla_Y \nabla_X Z = c\langle Z(p), Y(p) \rangle X - \varphi_Z \varphi_X Y.$$

Finalmente,

$$-\nabla_{[X, Y]} Z = -\varphi_Z[X, Y] = -\varphi_Z(\nabla_X Y - \nabla_Y X) = -\varphi_Z \varphi_Y X + \varphi_Z \varphi_X Y.$$

Podemos sumar los términos para concluir que

$$R(X, Y)Z = -c\langle Z(p), X(p) \rangle Y + c\langle Z(p), Y(p) \rangle X.$$

□

4.7 Aplicaciones

4.7.1 Superficies umbílicas

Definición 4.7.1 Una superficie no degenerada M se dice umbílica si su operador de forma satisface la igualdad $S(X) = \lambda X$, para todo campo vectorial X y donde $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función lisa.

Lema 4.7.1 Si M es una superficie umbílica entonces $S_p(X) = \lambda X$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ una constante.

Demostración. Vamos a aplicar la ecuación de Codazzi:

$\nabla_X(SY) - S(\nabla_X Y) = (\nabla_X S)(Y) = (\nabla_Y S)(X) = \nabla_Y(SX) - S(\nabla_Y X)$, la cual es válida para todo campo vectorial X tangente a M . Sean X, Y un marco ortonormal geodésico en $p \in M$, es decir $\nabla_X Y|_p = 0 = \nabla_Y X|_p$.

La ecuación de Codazzi se simplifica: $\nabla_X(SY) = \nabla_Y(SX)$. Como M es umbílica, obtenemos la expresión

$$(X \cdot \lambda)Y + \lambda \nabla_X Y = \nabla_X(\lambda Y) = \nabla_Y(\lambda X) = (Y \cdot \lambda)X + \lambda \nabla_Y X.$$

La igualdad anterior es válida en el abierto de definición del marco X, Y . En particular se satisface en el punto $p \in M$. Deducimos que $(X \cdot \lambda)Y|_p = (Y \cdot \lambda)X|_p$. Como X, Y son linealmente independientes concluimos que $(X \cdot \lambda) = (Y \cdot \lambda) = 0$. Se deduce que la función λ tiene derivada cero en el punto p . Finalmente observemos que p es un punto cualquiera. Entonces la derivada de λ en cualquier dirección y cualquier punto es cero. En consecuencia, la función λ es constante. \square

Proposición 4.7.1 Si M es una superficie umbílica entonces es parte ó de un plano, de una superficie de De Sitter ó de un modelo del hiperboloide del plano hiperbólico.

Demostración. Por hipótesis, el operador de forma de M satisface que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $SX = \lambda X$. Si $\lambda = 0$, la superficie M debe ser parte de un plano. Consideremos el siguiente campo vectorial a lo largo de la superficie M : $Z(p) = p + \frac{1}{\lambda}n(p)$, donde n es la aplicación de Gauss de M . Vamos a probar que Z es un campo constante a lo largo de M . Sea X un campo vectorial tangente a M . Derivamos en la dirección X :

$$D_X Z = D_X p + \frac{1}{\lambda} D_X n = X - \frac{1}{\lambda} S(X) = X - \frac{1}{\lambda} \lambda X = 0.$$

Como $Z = (a, b, c)$ es constante $\langle Z(p) - p, Z(p) - p \rangle = \frac{\epsilon}{\lambda^2}$, donde $\epsilon = \langle n, n \rangle$. Es decir M es parte de una superficie de De Sitter ó de un modelo del hiperboloide del plano hiperbólico de radio $1/|\lambda|$ y centro en $Z(p)$. \square

Proposición 4.7.2 Si M es una superficie no degenerada tal que sus rectas ortogonales concurren en un punto fijo fuera de M , entonces es parte ó de una superficie de De Sitter ó de un modelo del hiperboloide del plano hiperbólico.

Demostración. El hecho de que las rectas ortogonales son concurrentes en un punto (a, b, c) es equivalente a la igualdad

$$(a, b, c) = p + \lambda(p)n(p),$$

para todo $p \in M$ y donde λ es una función lisa en M . Derivando la igualdad en una dirección tangente a M obtenemos

$$0 = X + (X \cdot \lambda)n + \lambda D_X n = X + (X \cdot \lambda)n - \lambda S(X).$$

En esta igualdad tenemos una suma ortogonal de la parte tangente a M y la parte ortogonal a M :

$$X = \lambda S(X),$$

es decir M es umbílica. Se puede aplicar la Proposición ?? y resaltar que M no puede ser un plano ya que en tal caso las rectas ortogonales son paralelas. \square

4.7.2 Superficies de ángulo constante

Definición 4.7.2 Sea M una superficie no degenerada inmersa en \mathbb{R}_1^3 . Sea n un campo vectorial ortogonal a M y normalizado. Se dice que M es una superficie de hélice o de ángulo constante, si existe un vector $Z = (a, b, c)$ constante en \mathbb{R}_1^3 tal que $\langle Z, n \rangle$ es constante.

Cuando Z es ortogonal a M entonces M es parte de un plano ortogonal a Z .

Proposición 4.7.3 Si M es de ángulo constante no ortogonal a Z entonces

- $S(Z^\top) = 0$.
- El campo vectorial Z^\top es un campo geodésico en M .
- $II(Z^\top, X) = 0$ para todo campo vectorial X .

- M es una superficie reglada con rectas que son curvas integrales de Z^\top .
- M tiene curvatura Gaussiana constante cero.

Si además Z^\top no es un campo tipo luz, S es diagonalizable.

Demostración. Sabemos que $\langle Z, n \rangle$ es una función constante. Tomamos la derivada en la dirección dada por un campo vectorial X tangente a M arbitrario:

$0 = X \cdot \langle Z, n \rangle = \langle Z, D_X n \rangle = -\langle Z, S(X) \rangle = -\langle Z^\top, S(X) \rangle$. Como el operador de forma es simétrico, $\langle S(Z^\top), X \rangle = 0$. La igualdad anterior es cierta para todo campo vectorial tangente X . Como la métrica de Lorentz es no degenerada podemos deducir que $S(Z^\top) = 0$.

Por otro lado tenemos una fórmula para la parte tangente de Z : $Z^\top = Z - \epsilon \langle Z, n \rangle n$. Tomamos la derivada en la dirección Z^\top :

$$\begin{aligned} D_X Z^\top &= -\epsilon X \cdot [\langle Z, n \rangle n] = -\epsilon \langle Z, D_X n \rangle n - \epsilon \langle Z, n \rangle D_X n \\ &= \epsilon \langle Z, S(X) \rangle n + \epsilon \langle Z, n \rangle S(X) \\ &= \epsilon \langle S(Z^\top), X \rangle n + \epsilon \langle Z, n \rangle S(X) = \epsilon \langle Z, n \rangle S(X) \\ &= \nabla_X Z^\top + II(X, Z^\top). \end{aligned}$$

Se obtiene que si $X = Z^\top$, entonces $D_{Z^\top} Z^\top = 0$. Esto prueba que Z^\top es un campo constante en el espacio de Minkowski y que sus curvas integrales son rectas, es decir M es una superficie reglada. Recordemos que la suma $\nabla_X Z^\top + II(X, Z^\top)$ es una suma ortogonal. Lo cual implica que $\nabla_X Z^\top = \epsilon \langle Z, n \rangle S(X)$ y que $II(X, Z^\top) = 0$. Por el Corolario 4.4.1, se deduce que M tiene curvatura Gaussiana cero ya que el campo tangente Z^\top se puede completar a una base local de los planos tangentes a M . En particular, $\nabla_{Z^\top} Z^\top = 0$, es decir Z^\top es un campo geodésico.

Para la última parte definimos $T = Z^\top / |Z^\top|$ donde $|Z^\top| = |\langle Z^\top, Z^\top \rangle|^{1/2}$. Completamos localmente a una base ortonormal T, W del plano tangente de la superficie. Entonces, $S(W) = \epsilon_T \langle S(W), T \rangle T + \epsilon_W \langle S(W), W \rangle W$, donde $\epsilon_T = \langle T, T \rangle$ y $\epsilon_W = \langle W, W \rangle$. Pero S es un operador simétrico:

$S(W) = \epsilon_T \langle W, S(T) \rangle T + \epsilon_W \langle S(W), W \rangle W = \epsilon_W \langle S(W), W \rangle W$, es decir T es una dirección principal de S . Esto prueba que la matriz asociada a S en el marco ortonormal T, W es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_W \langle S(W), W \rangle \end{pmatrix}.$$

□

Ejemplo 4.7.1 Consideremos la curva tipo espacio $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ con vector ortogonal normalizado $\eta(u)$, es decir $\langle \eta(u), \eta(u) \rangle = 1$. Definimos una superficie parametrizada por

$$\varphi(u, v) = \alpha(u) + v(\sinh(a)\eta(u) + \cosh(a)e_3),$$

donde $a \in \mathbb{R}$ y $e_3 = (0, 0, 1)$. Vamos a verificar que esta parametrización define una superficie tipo tiempo de ángulo constante:

Los vectores tangentes dados por φ son $\varphi_u = \alpha'(u) + v \sinh(a)\eta'(u)$ y $\varphi_v = \sinh(a)\eta(u) + \cosh(a)e_3$. Un vector ortogonal a estos dos vectores es $n = \cosh(a)\eta(u) + \sinh(a)e_3$. Tenemos que $\langle n, n \rangle = \cosh^2(a) - \sinh^2(a) = 1$. Como el vector ortogonal a la superficie es tipo espacio entonces la superficie parametrizada por φ es tipo tiempo.

Por último, $\langle n, e_3 \rangle = -\sinh(a)$ es una constante. El ejemplo es una superficie temporal de ángulo constante.

Corolario 4.7.1 Si M es una superficie de ángulo constante con curvatura media cero y tal que Z^\top no es vector tipo luz entonces M es parte de un plano.

Demostración. Por la Proposición 4.7.3, $S(T) = 0$ y $S(W) = \epsilon_W \langle S(W), W \rangle$. Así que la curvatura media de M es igual a

$$H = \epsilon \frac{1}{2} (\epsilon_T \langle S(T), T \rangle + \epsilon_W \langle S(W), W \rangle) = \epsilon \epsilon_W \langle S(W), W \rangle.$$

Concluimos que $S(W) = 0$ ya que $\langle S(W), W \rangle = 0$ y $\langle S(W), T \rangle = \langle W, S(T) \rangle = 0$. Entonces $S = 0$ ya que T, W es un marco ortonormal local alrededor de un punto arbitrario de M . Por el Lema 3.3.2, obtenemos que M es parte de un plano. \square

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función lisa. Consideremos a la superficie $M := \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}_1^3 \mid (x, y) \in U\}$, es decir M es la gráfica de la función f . Vimos que para que f sea no degenerada es equivalente que ó $|\nabla f|^2 = f_x^2 + f_y^2 < 1$ ó $|\nabla f|^2 > 1$. Cada plano tangente de M está generado por los vectores tangentes $(1, 0, f_x)$ y $(0, 1, f_y)$. El vector ortogonal normalizado a la gráfica de f es $n = (f_x, f_y, 1) / \sqrt{|\nabla f|^2 - 1}$.

Definición 4.7.3 Una función lisa $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se dice eikonal si $|\nabla f|^2 = f_x^2 + f_y^2$ es constante.

Proposición 4.7.4 Una superficie no degenerada dada como la gráfica de una función $M := \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}_1^3 \mid (x, y) \in U\}$ es de ángulo constante con respecto al vector $e_3 = (0, 0, 1)$ si y sólo si f es una función eikonal.

Demostración. Basta hacer el cálculo

$$\langle n, e_3 \rangle = \frac{-1}{\sqrt{|\nabla f|^2 - 1}}.$$

La cantidad anterior es constante si y sólo si $|\nabla f|^2 - 1$ es constante. Es decir, es constante si y sólo si f es eikonal. \square

4.8 Superficies con dirección principal canónica

Definición 4.8.1 Una superficie no degenerada M se dice que tiene dirección principal canónica si existe un vector $Z = (a, b, c)$ constante en \mathbb{R}_1^3 tal que Z^\top es una dirección principal del operador de forma de M . Es decir, $S(Z^\top) = \lambda Z^\top$ donde $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función lisa.

Observación 4.8.1 Estamos considerando una superficie tipo espacio ó tipo tiempo M . De este modo tenemos una descomposición $Z = Z^\top + Z^\perp$.

Si $Z^\top = 0$ quiere decir que Z es ortogonal a M y efectivamente $Z^\top = 0$ cumple que $S(Z^\top) = \lambda 0$, donde λ es la función constante cero. Además, si Z es ortogonal a M deducimos que Z es tipo espacio o tipo tiempo y que M es un plano no degenerado ortogonal a Z .

Si $Z^\perp = 0$, se deduce que Z es tangente a M . Entonces M es una superficie reglada con rectas paralelas a la dirección Z . Si además, Z es tipo espacio ó tipo tiempo entonces un plano ortogonal a Z intersecta localmente a M en una curva plana. En este caso podemos visualizar a M como un cilindro ortogonal a una curva plana contenida en un plano no degenerado.

Puede suceder que Z sea tangente u ortogonal a M únicamente en algunos puntos. Así que para hacer esta historia más accesible vamos a asumir que en ningún punto Z es ortogonal ó tangente a M .

Lema 4.8.1 Si M es una superficie no degenerada y Z es una campo constante no cero, entonces su parte tangente y ortogonal a M satisfacen la igualdad

$$\nabla_X Z^\top = \epsilon \langle Z^\perp, \xi \rangle S(X).$$

Demostración. Sea ξ el campo ortogonal a M de norma uno y sea $\epsilon = \langle \xi, \xi \rangle$. $Z^\perp = \epsilon \langle Z, \xi \rangle \xi$. De esta forma tenemos la descomposición

$$Z = Z^T + Z^\perp = Z^T + \epsilon \langle Z, \xi \rangle \xi.$$

Derivamos en una dirección arbitraria X tangente a M :

$$\begin{aligned} D_X Z = 0 &= D_X Z^T + \epsilon \langle Z, D_X \xi \rangle \xi + \epsilon \langle Z, \xi \rangle D_X \xi \\ &= \nabla_X Z^T + II(Z^T, X) - \epsilon \langle Z, S(X) \rangle \xi + -\epsilon \langle Z, \xi \rangle S(X) \\ &= (\nabla_X Z^T - \epsilon \langle Z^\perp, \xi \rangle S(X)) + (II(Z^T, X) - \epsilon \langle Z^T, S(X) \rangle \xi) \\ &= \nabla_X Z^T - \epsilon \langle Z^\perp, \xi \rangle S(X). \end{aligned}$$

Aquí hemos aplicado la relación $II(Z^T, X) = \langle Z^T, S(X) \rangle$. Se concluye la identidad deseada. \square

Teorema 4.8.1 *Las siguientes condiciones son equivalentes*

- M tiene dirección principal canónica con respecto a Z .
- Las curvas integrales de $T = Z^\top / |Z^\top|$ son geodésicas de M .

Demostración. Primero un cálculo clásico:

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= \nabla_{Z^T / |Z^T|} (Z^T / |Z^T|) = \frac{1}{|Z^T|} \nabla_{Z^T} (Z^T / |Z^T|) \\ &= \frac{1}{|Z^T|^2} \nabla_{Z^T} Z^T + \frac{1}{|Z^T|} (Z^T \cdot \frac{1}{|Z^T|}) Z^T \\ &= \frac{1}{|Z^T|^2} \epsilon \langle Z^\perp, \xi \rangle S(Z^T) + \frac{1}{|Z^T|} (Z^T \cdot \frac{1}{|Z^T|}) Z^T. \end{aligned}$$

El cálculo anterior dice que $\nabla_T T$ es linealmente dependiente de Z^T y $S(Z^T)$. Aplicamos el Lema 4.8.1 con $X = Z^T$: $\nabla_{Z^T} Z^T = \epsilon \langle Z^\perp, \xi \rangle S(Z^T)$.

Si M tiene una dirección principal canónica con respecto a Z , entonces $S(Z^T) = \lambda Z^T$ para alguna función λ . Apliquemos esta igualdad al cálculo anterior:

$$\nabla_T T = \epsilon \langle Z^\perp, \xi \rangle \lambda Z^T + \frac{1}{|Z^T|} (Z^T \cdot \frac{1}{|Z^T|}) Z^T,$$

es decir $\nabla_T T$ es un múltiplo de Z^T . Ahora recordemos que T es de norma uno y es linealmente dependiente con Z^T . Entonces $\nabla_T T$ es ortogonal a T , es decir ortogonal a Z^T . Esto hace posible concluir que $\nabla_T T = 0$. Es decir las curvas integrales de T son geodésicas de M .

La implicación recíproca: Si $\nabla_T T = 0$ entonces del cálculo clásico de arriba se deduce que Z^T es un vector propio de S . \square

Ejemplo 4.8.1

4.9 Superficies con dirección nula canónica

La siguiente noción sólo tiene sentido para las superficies tipo tiempo.

Definición 4.9.1 Una superficie tipo tiempo M se dice que tiene *dirección nula canónica* si existe un campo constante $Z \in \mathbb{R}_1^3$ tal que la parte tangente Z^T de Z en M es un vector nulo:

$$\langle Z^T, Z^T \rangle = 0.$$

Observación 4.9.1 Como M es no degenerada podemos considerar la descomposición: $Z = Z^T + Z^\perp$. La igualdad tiene como consecuencia que

$$\langle Z, Z \rangle = \langle Z^T, Z^T \rangle + \langle Z^\perp, Z^\perp \rangle = \langle Z^\perp, Z^\perp \rangle.$$

Como M es tipo tiempo, Z^\perp es tipo espacio y Z tipo tiempo. Así que podemos asumir que $\langle Z, Z \rangle = 1$. Esto obliga a que $\langle Z^\perp, Z^\perp \rangle = 1$. En particular, hemos obtenido que Z debe ser tipo espacio. De esta forma, $\xi := Z^\perp$ es un vector ortogonal a M y de norma uno.

Lema 4.9.1 *Sea M una superficie con dirección nula canónica. Entonces para todo X campo tangente a M ,*

- $II(Z^T, X) = 0$,
- $\nabla_X Z^T = S(X)$,
- $\nabla_{Z^T} Z^T = 0$, es decir la curvas integrales de Z^T son geodésicas nulas,
- $S(Z^T) = 0$, es decir Z^T es una dirección principal de S ,
- $D_{Z^T} Z^T = 0$ es decir, las geodésicas nulas son rectas de \mathbb{R}_1^3 .

Demostración. Es cuestión de derivar la descomposición $Z = Z^T + Z^\perp$ en la dirección X :

$$\begin{aligned} 0 &= D_X Z = D_X Z^T + D_X Z^\perp \\ &= \nabla_X Z^T + II(Z^T, X) - S(X). \end{aligned}$$

Se deduce que la parte tangente de la igualdad es cero, es decir $\nabla_X Z^T - S(X) = 0$. Análogamente, $II(Z^T, X) = 0$. Ahora, podemos aprovechar la relación entre la segunda forma fundamental y el operador de forma: $0 = \langle II(Z^T, X), Z^\perp \rangle = \langle S(Z^T), X \rangle$. Esta igualdad se satisface para todo

X tangente a M . Como la métrica en M es no degenerada, encontramos que $S(Z^T) = 0$. Finalmente, $\nabla_{Z^T} Z^T = S(Z^T) = 0$ y $D_{Z^T} Z^T = \nabla_{Z^T} Z^T + II(Z^T, Z^T) = 0$. \square

El campo de vectores nulos Z^T es tangente a M . Esto nos permite completar localmente a una base de vectores nulos tangentes a M debido a que M es tipo tiempo.

Sea W un campo de vectores nulos tangentes a M definido localmente. Además requerimos que $\langle Z^T, W \rangle = 1$. De esta manera tenemos una base local de vectores nulos tangentes a M dada por Z^T, W . A una base como esta se le llama base pseudo ortonormal. Vea la Definición 1.4.1.

Lema 4.9.2 *Sea M una superficie tipo tiempo. En la base pseudo ortonormal de vectores nulos Z^T, W .*

- El vector de curvatura media satisface la relación

$$\tilde{H} = II(Z^T, W).$$

- La curvatura Gaussiana satisface la igualdad

$$K = \langle II(Z^T, W), II(Z^T, W) \rangle - \langle II(Z^T, Z^T), II(W, W) \rangle.$$

Demostración. Por definición, el vector de curvatura media esta definido por $\tilde{H} = \frac{1}{2}tr(II) = \frac{1}{2}(\epsilon_1 II(v_1, v_1) + \epsilon_2 II(v_2, v_2))$, donde v_1, v_2 es una base ortonormal y $\epsilon_1 = \langle v_1, v_1 \rangle, \epsilon_2 = \langle v_2, v_2 \rangle$. Vamos a aplicar la fórmula a la base ortonormal inducida siguiente: Sea $v_1 := \frac{Z^T + W}{\sqrt{2}}, v_2 := \frac{Z^T - W}{\sqrt{2}}$. En este caso tenemos los valores $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = -1$. Ahora, evaluamos la relación del vector de curvatura media.

$$\begin{aligned} II(Z^T + W, Z^T + W) &= II(Z^T, Z^T) + 2II(Z^T, W) + II(W, W), \\ II(Z^T - W, Z^T - W) &= II(Z^T, Z^T) - 2II(Z^T, W) + II(W, W). \\ \tilde{H} &= \frac{1}{4} [II(Z^T + W, Z^T + W) - II(Z^T - W, Z^T - W)] \\ &= \frac{1}{4} [II(Z^T, Z^T) + 2II(Z^T, W) + II(W, W)] \\ &\quad + \frac{1}{4} [-II(Z^T, Z^T) + 2II(Z^T, W) - II(W, W)] \\ &= II(Z^T, W). \end{aligned}$$

De la ecuacion de Gauss (4.3.3) y el Corolario 4.4.1 se deduce que la curvatura Gaussiana esta dada por la fórmula

$$K = \frac{\langle II(Z^T, Z^T), II(W, W) \rangle - \langle II(Z^T, W), II(Z^T, W) \rangle}{\langle Z^T, Z^T \rangle \langle W, W \rangle - \langle Z^T, W \rangle^2}.$$

Pero es cierto que $\langle Z^T, Z^T \rangle \langle W, W \rangle - \langle Z^T, W \rangle^2 = -1$. \square

Corolario 4.9.1 Si M es una superficie con dirección nula canónica entonces tiene curvatura Gaussiana cero y curvatura media cero.

Demostración. Por el Lema 4.9.1, $II(Z^T, X) = 0$ para todo campo de vectores tangente a M . En particular, $II(Z^T, Z^T) = 0 = II(Z^T, W)$. El resultado es una consecuencia de las fórmulas del Lema 4.9.2. \square

Proposición 4.9.1 Si M es una superficie con dirección nula canónica entonces $\nabla_{Z^T} S = 0$.

Demostración. Aplicamos la definición de la derivada del operador de forma: $(\nabla_{Z^T} S)(Z^T) = \nabla_{Z^T}(S(Z^T)) - S(\nabla_{Z^T} Z^T) = 0$. Se aplicó el Lema 4.9.1. Por la ecuación de Codazzi, $(\nabla_{Z^T} S)(W) = (\nabla_W S)(Z^T) = \nabla_W(S(Z^T)) - S(\nabla_W Z^T) = -S(\nabla_W Z^T)$. Ahora observemos que $\nabla_W Z^T = \langle \nabla_W Z^T, W \rangle Z^T + \langle \nabla_W Z^T, Z^T \rangle W = \langle \nabla_W Z^T, W \rangle Z^T$. Como S es operador lineal,

$$S(\nabla_W Z^T) = S(\langle \nabla_W Z^T, W \rangle Z^T) = \langle \nabla_W Z^T, W \rangle S(Z^T) = 0.$$

Hemos probado que, $(\nabla_{Z^T} S)(W) = 0$. Como Z^T y W son base del plano tangente de M , tenemos en consecuencia que, $\nabla_{Z^T} S = 0$. \square

Observación 4.9.2 El siguiente ejemplo es similar al Ejemplo 3.3.4 construido con una curva γ tipo tiempo. Son superficies tipo tiempo con curvatura Gaussiana constante cero y curvatura media constante cero. La diferencia es que en el ejemplo siguiente la curva γ es tipo luz.

Ejemplo 4.9.1 Consideremos la superficie tipo tiempo M en \mathbb{R}_1^3 parametrizada por

$$\varphi(s, t) = \gamma(s) + tW,$$

donde $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ es una curva tipo luz y $W \in \mathbb{R}_1^3$ es un vector tipo luz. Asumimos que para todo $s \in (a, b)$ se satisface la condición $\langle \gamma'(s), W \rangle \neq 0$, es decir $\gamma'(s)$ y W son vectores nulos linealmente independientes para todo s . Vamos a probar directamente que M tiene curvatura Gaussiana cero, curvatura media cero y que tiene una dirección nula canónica.

$$\begin{aligned} \varphi_s &= \gamma'(s), \quad \varphi_t = W \\ \varphi_{ss} &= \gamma''(s) \quad \varphi_{st} = 0, \quad \varphi_{tt} = 0 \\ E &= \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle = 0, \quad F = \langle \varphi_s, \varphi_t \rangle = \langle \gamma'(s), W \rangle, \quad G = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle = 0 \\ e &= \langle \varphi_{ss}, \xi \rangle, \quad f = \langle \varphi_{st}, \xi \rangle = 0, \quad g = \langle \varphi_{tt}, \xi \rangle = 0, \end{aligned}$$

Figura 4.1: Superficie tipo tiempo con curvaturas Gaussiana y media constantes igual a cero. Con curva tipo luz y vector tipo luz dados por $\gamma(s) = (\sin(s), \cos(s), s)$, $W = (1, 0, 1)$

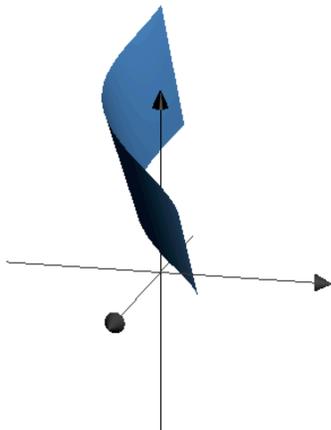
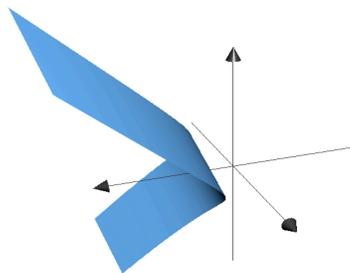


Figura 4.2: Superficie tipo tiempo con curvaturas Gaussiana y media constantes igual a cero. Con curva tipo luz y vector tipo luz dados por $\gamma(s) = (\cosh(s), s, \sinh(s))$, $W = (\cos(5), \sin(5), 1)$



donde ξ es un campo de vectores ortogonales a M y normalizado. Por sustitución encontramos que $EG - F^2 = -F^2 = -\langle \gamma'(s), W \rangle^2$, $eg - f^2 = 0$ y $eG - 2fF + gE = 0$. Ahora aplicamos las fórmulas de la Proposición 3.3.4 para concluir que M es una superficie tipo tiempo con curvatura Gaussiana constante $K = 0$ y curvatura media constante $H = 0$.

Resta comprobar que M es una superficie con dirección nula canónica. Como W es un vector tipo luz fijo entonces el complemento ortogonal de W es un plano degenerado tangente al cono de luz y que contiene a W . Consideremos un vector tipo espacio Z tal que $\langle Z, W \rangle = 0$. El vector Z está en el plano tipo luz que contiene a W , pues tal plano contiene a todos los vectores ortogonales a W .

La afirmación es que M tiene dirección nula canónica con respecto a Z :

Para verificarlo, vamos a calcular la parte tangente Z^T de Z en M . Similarmente a la Proposición 1.4.1,

$$Z^T = \frac{\langle Z, \gamma'(s) \rangle}{\langle \gamma'(s), W \rangle} W + \frac{\langle Z, W \rangle}{\langle \gamma'(s), W \rangle} \gamma'(s) = \frac{\langle Z, \gamma'(s) \rangle}{\langle \gamma'(s), W \rangle} W.$$

Lo cual demuestra que Z^T es tipo tiempo, es decir M tiene dirección canónica nula con respecto a un vector tipo espacio Z ortogonal a W .

Notesé que el coeficiente $\frac{\langle Z, \gamma'(s) \rangle}{\langle \gamma'(s), W \rangle}$ puede ser cero cuando $\gamma'(s)$ sea simétrico a W con respecto al eje del cono de luz. Es cuestión de convenir si queremos que el vector cero sea considerado ó no. Además, tal coeficiente es constante a lo largo de las rectas de M determinadas por la dirección tangente W .

Finalmente, vamos a analizar la posibilidad de que el coeficiente $\frac{\langle Z, \gamma'(s) \rangle}{\langle \gamma'(s), W \rangle}$ sea constante también a lo largo de γ :

$$\begin{aligned} D_{\gamma'} \frac{\langle Z, \gamma'(s) \rangle}{\langle \gamma'(s), W \rangle} &= \frac{\langle Z, \gamma'' \rangle \langle W, \gamma' \rangle - \langle Z, \gamma' \rangle \langle W, \gamma'' \rangle}{\langle \gamma'(s), W \rangle^2} = \frac{\langle \langle W, \gamma' \rangle Z - \langle Z, \gamma' \rangle W, \gamma'' \rangle}{\langle \gamma'(s), W \rangle^2} \\ &= \frac{\langle \langle W, \gamma' \rangle Z - \langle Z^T, \gamma' \rangle W, \gamma'' \rangle}{\langle \gamma'(s), W \rangle^2} = \frac{\langle \langle W, \gamma' \rangle Z^\perp, \gamma'' \rangle}{\langle \gamma'(s), W \rangle^2} \\ &= \frac{\langle \langle W, \gamma' \rangle \langle Z, \xi \rangle \xi, \gamma'' \rangle}{\langle \gamma'(s), W \rangle^2} = \frac{\langle W, \gamma' \rangle \langle Z, \xi \rangle \langle \xi, \gamma'' \rangle}{\langle \gamma'(s), W \rangle^2}. \end{aligned}$$

Observemos que $\langle Z, \xi \rangle$ nunca es cero ya que Z no puede ser tangente a M . Si Z fuese tangente a M entonces Z y W generarían el plano tangente de M . Pero Z y W generan el plano degenerado que contiene a W . Aquí usamos el hecho de que Z y W son linealmente independiantes pues Z es tipo espacio. En conclusión: El coeficiente $\frac{\langle Z, \gamma'(s) \rangle}{\langle \gamma'(s), W \rangle}$ es constante en M si y sólo si $\langle \xi, \gamma'' \rangle = 0$. Si $\gamma'' = 0$ entonces γ es una recta y por lo tanto M es un plano. Si $\gamma'' \neq 0$ entonces $\langle \xi, \gamma'' \rangle = \langle \gamma' \times W, \gamma'' \rangle = 0$. Es decir, los vectores γ' , γ'' , W son

linealmente dependientes. Lo cual implica que $W = a\gamma' + b\gamma''$ para algunas funciones a, b . La función b nunca es cero pues W y γ' son linealmente independientes. Hacemos producto escalar con γ' en ambos lados de la ecuación anterior para obtener:

$$0 \neq \langle W, \gamma' \rangle = b\langle \gamma'', \gamma' \rangle = 0,$$

una contradicción.

Así que la única posibilidad para que el coeficiente sea constante es que γ sea una línea recta y por lo tanto M un plano.

Lema 4.9.3 *Consideremos a la superficie $M \subset \mathbb{R}_1^3$ parametrizada como $\varphi(s, t) := \gamma(s) + tT(s)$, donde γ es una curva tipo luz y para cada s , el vector $T(s)$ es tipo luz linealmente independiente de $\gamma'(s)$. Entonces M es una superficie tipo tiempo con curvaturas Gaussiana y media constantes igual a cero. Además, el vector de curvatura media es, $\tilde{H} = T'(s) - \lambda(s)T(s)$ donde $\nabla_{\gamma'(s)}T(s) = \lambda(s)T(s)$. La curvatura Gaussiana es*

$$K = \frac{\langle T'(s), \gamma'(s) \times T(s) \rangle^2}{\langle \gamma'(s), T(s) \rangle^4}.$$

En particular, M tiene curvaturas media y Gaussiana constantes cero si y sólo si $T'(s) = \lambda(s)T(s)$.

Demostración. La condición $\langle \gamma'(s), T(s) \rangle \neq 0$ es equivalente a que $\gamma'(s)$ y $T(s)$ sean linealmente independientes. Debemos notar que $\nabla_{W(s)}T(s)$ es ortogonal al vector tipo luz $T(s)$. Los vectores ortogonales a $T(s)$ consisten del plano tipo luz que contiene a $T(s)$. Por lo tanto $\nabla_{W(s)}T(s)$ está contenido en tal plano. Esto implica que $\nabla_{W(s)}T(s)$ es linealmente dependiente de $T(s)$. La afirmación anterior es correcta ya que si $T(s)$ y $\nabla_{W(s)}T(s)$ fueran linealmente independientes, generarían un plano tipo luz. Esto es una contradicción ya que $\nabla_{W(s)}T(s)$ y $T(s)$ son vectores tangentes a la superficie tipo tiempo M . Hemos establecido la relación $\nabla_{W(s)}T(s) = \lambda(s)T(s)$, para alguna función λ . Necesitamos calcular las curvaturas usando la parametrización.

$$\begin{aligned} \varphi_s &= \gamma'(s) + tT'(s) = \gamma'(s) + t\lambda(s)T(s), \quad \varphi_t = T(s), \\ E &= \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle = 2t\lambda(s)\langle \gamma'(s), T(s) \rangle, \quad F = \langle \varphi_s, \varphi_t \rangle = \langle \gamma'(s), T(s) \rangle, \\ G &= \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle = 0, \quad EG - F^2 = -F^2 = -\langle \gamma'(s), T(s) \rangle^2 < 0. \end{aligned}$$

La desigualdad anterior establece el hecho de que M es una superficie tipo tiempo. Continuamos con las segundas derivadas,

$$\begin{aligned}\varphi_{ss} &= \gamma''(s) + tT''(s), \quad \varphi_{tt} = 0. \\ \varphi_{st} &= T'(s) = D_{\gamma'(s)}T(s) = \nabla_{\gamma'(s)}T(s) + II(\gamma'(s), T(s)) \\ &= \lambda(s)T(s) + II(\gamma'(s), T(s)) \\ e &= \langle \varphi_{ss}, \xi \rangle = \langle \gamma''(s), \xi \rangle, \quad f = \langle \varphi_{st}, \xi \rangle, \quad g = \langle \varphi_{tt}, \xi \rangle = 0.\end{aligned}$$

Despejando obtenemos,

$$\tilde{H} = II(\gamma'(s), T(s)) / \langle \gamma'(s), T(s) \rangle = (T'(s) - \lambda(s)T(s)) / \langle \gamma'(s), T(s) \rangle.$$

Nótese que aplicamos el Lema 4.9.2, ya que $\gamma'(s)$ y $T(s) / \langle \gamma'(s), T(s) \rangle$ forman una base pseudo ortonormal. Vamos a ver explícitamente el valor de f :

Como $\varphi_s \times \varphi_t = \gamma'(s) \times T(s)$, podemos definir $\xi = \frac{\gamma'(s) \times T(s)}{|\gamma'(s) \times T(s)|}$, el cual es un campo vectorial tipo espacio ortogonal a M y normalizado. Vamos a calcular la segunda forma fundamental de M con ayuda de ξ : Usaremos la notación $\mu(s) = \frac{1}{|\gamma'(s) \times T(s)|}$,

$$\begin{aligned}f &= \langle \varphi_{st}, \xi \rangle = \langle T'(s), \mu(s)\gamma'(s) \times T(s) \rangle \\ &= \mu(s) \langle T'(s), \gamma'(s) \times T(s) \rangle\end{aligned}$$

Por sustitución encontramos que,

$$eg - f^2 = -f^2 = -\mu^2(s) \langle T'(s), \gamma'(s) \times T(s) \rangle^2.$$

Ahora aplicamos las fórmulas de la Proposición 3.3.4 para concluir que M es una superficie tipo tiempo con curvatura Gaussiana igual a

$$K = \frac{\mu^2(s) \langle T'(s), \gamma'(s) \times T(s) \rangle^2}{\langle \gamma'(s), T(s) \rangle^2}.$$

Podemos reescribir $\mu^2(s)$ con ayuda del ejercicio 10 del Capítulo 1:

$$\mu^2(s) = \frac{1}{|\gamma'(s) \times T(s)|^2} = \frac{1}{\langle \gamma'(s), T(s) \rangle^2}.$$

Al sustituir en K obtenemos la fórmula buscada. \square

Lema 4.9.4 *Consideremos a la superficie $M \subset \mathbb{R}_1^3$ parametrizada como $\varphi(s, t) := \gamma(s) + tT(s)$, donde γ es una curva conexa tipo luz que no está contenida en una recta y para cada s , el vector $T(s)$ es tipo luz linealmente independiente de $\gamma'(s)$. La superficie M tiene dirección nula canónica con respecto a $Z \in \mathbb{R}_1^3$ si y sólo si $T(s) = h(s)T_0$ para algún vector tipo luz fijo T_0 y alguna función h y Z tiene parte tangente Z^T en la dirección T_0 .*

Demostración. Hay que calcular Z^T usando la parametrización: La parte tangente de un campo vectorial constante Z se escribe en la base φ_s, φ_t como, $Z^T = A(s, t)\varphi_s + B(s, t)\varphi_t$, donde A, B son funciones de s y t . En particular, a lo largo de γ , $Z^T(s) = A(s, 0)\gamma'(s) + B(s, 0)T(s)$. Como $\gamma'(s)$ y $T(s)$ son linealmente independientes, la combinación a lo largo de γ debe ser:

$$Z^T(s) = \frac{\langle Z, T(s) \rangle}{\langle \gamma'(s), T(s) \rangle} \gamma'(s) + \frac{\langle Z, \gamma'(s) \rangle}{\langle \gamma'(s), T(s) \rangle} T(s). \quad (4.13)$$

El campo vectorial $Z^T(s)$ es tipo luz a lo largo de γ si y sólo si

$$\langle Z, T(s) \rangle \langle Z, \gamma'(s) \rangle = 0.$$

Deducimos que ó $\langle Z, T(s) \rangle = 0$ ó $\langle Z, \gamma'(s) \rangle = 0$. Por la Proposición 2.1.2, ó la imagen de T es parte de una recta nula ó γ es parte de la otra recta nula. Por la hipótesis, deducimos que la imagen de T es parte de una recta nula. Esto no dice que $T(s) = h(s)T_0$, donde T_0 es la dirección de una de las rectas nulas del plano ortogonal a Z y h es una función que nunca es cero. Sin perder generalidad, podemos suponer que $h > 0$. Notemos que $T'(s) = \lambda(s)T(s)$ donde $\lambda(s) := \frac{h'(s)}{h(s)}$. Para más detalles se puede consultar la demostración de la Proposición 2.1.2. Además, Z es un vector tipo espacio ortogonal a T_0 : La combinación lineal de arriba se reduce a

$$Z^T(s) = \frac{\langle Z, \gamma'(s) \rangle}{\langle \gamma'(s), T(s) \rangle} T(s) = \frac{\langle Z, \gamma'(s) \rangle}{\langle \gamma'(s), T(s) \rangle} h(s)T_0(s). \quad (4.14)$$

Esto fue a lo largo de γ . Ahora regresamos a la combinación general: Como $\varphi_s = \gamma'(s) + tT'(s) = \gamma'(s) + t\lambda(s)T(s)$ y $\varphi_t = T(s)$

$$\begin{aligned} Z^T &= A(s, t)\varphi_s + B(s, t)\varphi_t \\ &= A(s, t)(\gamma'(s) + t\lambda(s)T(s)) + B(s, t)T(s) \\ &= A(s, t)\gamma'(s) + [A(s, t)t\lambda(s) + B(s, t)]T(s). \end{aligned}$$

Lo cual prueba que Z^T en cualquier punto de M se puede escribir como combinación lineal de $\gamma'(s)$ y $T(s)$. Pero tal combinación lineal es la de la Ecuación (4.13). Como Z es ortogonal a T_0 , en cualquier punto de M es válida la combinación de la Ecuación (4.14). \square

Teorema 4.9.1 *Si $M \subset \mathbb{R}_1^3$ es una superficie con dirección nula canónica entonces se puede parametrizar localmente como*

$$\varphi(s, t) = \gamma(s) + tT_0.$$

Aquí $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ es una curva tipo luz y $T_0 \in \mathbb{R}_1^3$ es un vector tipo luz tal que para todo $s \in (a, b)$ se cumple la condición $\langle \gamma'(s), T_0 \rangle \neq 0$.

Demostración. Sea $p \in M$. Por hipótesis existe $Z \in \mathbb{R}_1^3$ un vector tipo tiempo tal que Z^T es un campo tipo luz. Podemos suponer que $\langle Z, Z \rangle = 1$. Completamos Z^T a una base pseudo ortonormal de campos de vectores tangentes a M : Sea W un campo vectorial definido localmente en una vecindad de M que contiene a p y tal que Z^T, W forman una base pseudo ortonormal en cada punto de la vecindad. Asumimos que $\langle Z^T, W \rangle = 1$. Sea γ la curva integral de W que pasa por p , es decir $W(\gamma(s')) = \gamma'(s')$. Para simplificar, usaremos la notación $W(s') := W(\gamma(s'))$ y $T(s') := Z^T(\gamma(s'))$. Por el Lema 4.9.1, las curvas integrales de Z^T son geodésicas del ambiente, es decir son segmentos de rectas en \mathbb{R}_1^3 . En particular, a lo largo de los puntos $\gamma(s')$ la superficie M contiene a segmentos de recta con dirección $T(s')$. Hemos obtenido que M se puede parametrizar alrededor de p como

$$\varphi(s', t') := \gamma(s') + t'T(s').$$

Por el Lema 4.9.4, los vectores $T(s') = h(s')T_0$ son múltiplo de un vector tipo luz fijo $T_0 \in \mathbb{R}_1^3$.

Inferimos que M tiene una parametrización de la forma $\varphi(s', t') := \gamma(s') + t'h(s')T_0$, donde $h > 0$ como se menciona en la prueba del Lema 4.9.4. Ahora podemos hacer un cambio de variable:

$$s = s', \quad t = t'h(s').$$

Este cambio de variable es localmente un difeomorfismo $(s', t') \mapsto (s, t)$ ya que la matriz Jacobiana

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t'h'(s') & h(s') \end{pmatrix}$$

tiene determinante positivo dado por $h(s')$. Entonces M se parametriza como

$$\varphi(s, t) := \gamma(s) + tT_0.$$

□

4.10 Ejercicios

1. Pruebe que el corchete de Lie de campos vectoriales X, Y, Z en \mathbb{R}_1^3 satisface la siguiente igualdad llamada identidad de Jacobi

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

2. Verifique que $[X, Y] = -[Y, X]$ para todo campo vectorial X . En particular deduzca que $[X, X] = 0$.
3. Sea $X : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ un campo vectorial. Recordemos la definición de cálculo III de derivada direccional de la función f en la dirección $X(p)$:

$$f'(p, X(p)) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + hX(p)) - f(p)}{h}.$$

Demuestre que $f'(p, X(p)) = X \cdot f$.

4. Compruebe que si D es una función que satisface la fórmula de Koszul entonces es una conexión de Levi-Civita.
5. Demuestre que el tensor de curvatura Riemanniana de M satisface que

$$fR(X, Y)Z = R(fX, Y)Z = R(X, fY)Z = R(X, Y)(fZ).$$

6. Pruebe que la curvatura seccional no depende de la base ortonormal en el punto p , es decir pruebe que

$$\frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} = \frac{\langle R(Z, W)W, Z \rangle}{\langle Z, Z \rangle \langle W, W \rangle - \langle Z, W \rangle^2},$$

donde X, Y y Z, W pares de campos vectoriales tales que $X(p), Y(p)$ y $Z(p), W(p)$ son dos bases ortonormales de T_pM .

7. Sea M una superficie tipo espacio. Pruebe que si la segunda forma fundamental es cero en cada punto, entonces M es parte de un plano.
8. Suponga que dos superficies no degeneradas se intersectan tangencialmente a lo largo de una curva regular la cual es geodésica de una de las dos superficies. Deduzca que la curva de intersección también es geodésica de la otra superficie.
9. Compruebe la afirmación siguiente. Si un segmento de recta está contenido en una superficie no degenerada M de \mathbb{R}_1^3 entonces es una geodésica de M .

10. Demuestre que si un plano intersecta tangencialmente a una superficie no degenerada a lo largo de una curva entonces la curva es línea de curvatura de la superficie. Lo mismo es cierto si la intersección es ortogonal.
11. Compruebe que una superficie M es de ángulo constante si y sólo si $\langle Z^\top, Z^\top \rangle$ es constante. Equivalentemente, $\langle Z^\perp, Z^\perp \rangle$ es constante.
12. Muestre que una superficie M es umbílica si y sólo si $II(X, Y) = a\langle X, Y \rangle n$ para todo par de campos X, Y .

CAPITULO 5

Gradiente, Hessiano, Laplaciano

En este capítulo vamos a suponer que M es una superficie lisa no degenerada en el espacio de Minkowski, es decir M es tipo espacio o tipo tiempo.

5.1 Gradiente

Definición 5.1.1 Sea $M \subset \mathbb{R}_1^3$ una superficie lisa. Dada una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ lisa, definimos un campo vectorial tangente a M , llamado campo *gradiente*: $\nabla_M f : M \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ definido por

$$\langle \nabla_M f, X \rangle = X \cdot f.$$

Proposición 5.1.1 Dada una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ lisa, su gradiente en M se puede calcular como

$$\nabla_M f = \epsilon_1(X_1 \cdot f)X_1 + \epsilon_2(X_2 \cdot f)X_2, \quad (5.1)$$

donde X_1, X_2 es un marco ortonormal como en el Lemma 5.3.1.

Demostración.

$$\begin{aligned} \nabla_M f &= \epsilon_1 \langle \nabla_M f, X_1 \rangle X_1 + \epsilon_2 \langle \nabla_M f, X_2 \rangle X_2 \\ &= \epsilon_1 (X_1 \cdot f) X_1 + \epsilon_2 (X_2 \cdot f) X_2. \end{aligned}$$

□

Proposición 5.1.2 Sea $F : \mathbb{R}_1^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Denotemos su restricción a una superficie M como $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, es decir $F|_M = f$. Entonces la restricción a M del gradiente de F en el espacio de Minkowski, $\nabla F|_M$, está relacionado con el gradiente de f en M :

$$((\nabla F)|_M)^T = \nabla_M f.$$

Demostración. Sea $X : M \longrightarrow \mathbb{R}_1^3$ un campo vectorial tangente a M . Por definición $X \cdot F = \langle \nabla F, X \rangle = \langle (\nabla F)^T, X \rangle$ ya que X es tangente a M . Por otro lado, $X \cdot f = \langle \nabla_M f, X \rangle$. Esto prueba que $\langle (\nabla F)^T, X \rangle = \langle \nabla_M f, X \rangle$. Como esta relación es válida para todo campo X tangente a M , se deduce que $((\nabla F)|_M)^T = \nabla_M f$. \square

Definición 5.1.2 *Funciones importantes*

1. *Función altura.* Sea d un vector en \mathbb{R}_1^3 . La función *altura* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ de M se define como

$$f(p) = \langle p, d \rangle.$$

2. *Función soporte.*

Sea $n : M \longrightarrow \mathbb{R}_1^3$ la aplicación de Gauss de M dirigida al futuro. La función *soporte* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ de M se define como

$$f(p) = \langle p, n(p) \rangle.$$

3. *Función ángulo.*

Sea d un vector en \mathbb{R}_1^3 . Sea $n : M \longrightarrow \mathbb{R}_1^3$ la aplicación de Gauss de M dirigida al futuro. La función *ángulo* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ de M se define como

$$f(p) = \langle n(p), d \rangle.$$

Ejemplo 5.1.1 Las funciones coordenadas $\pi_{1|M}$, $\pi_{2|M}$ y $\pi_{3|M}$ de una superficie M son ejemplos de funciones altura. Recordemos que $\pi_{1|M}(p) = x$, $\pi_{2|M}(p) = y$, $\pi_{3|M}(p) = z$, donde $p = (x, y, z)$ es un punto en M . Para esto note que

$$\pi_{1|M}(p) = \langle p, e_1 \rangle, \pi_{2|M}(p) = \langle p, e_2 \rangle, \pi_{3|M}(p) = \langle p, -e_3 \rangle,$$

donde $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

Ejemplo 5.1.2 Gradiente de la función altura. Sea $d = (a, b, c) \in \mathbb{R}_1^3$ un vector fijo. Definimos la función $F : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$F(x, y, z) = \langle (a, b, c), (x, y, z) \rangle = ax + by - cz.$$

La función altura de la superficie M en la dirección $d = (a, b, c) \in \mathbb{R}_1^3$ es $f = F|_M$. El gradiente de F es $\nabla F = (a, b, c) = aE_1 + bE_2 + cE_3$. Por la Proposición 5.1.2, el gradiente de la función altura f es la parte tangente de (a, b, c) . Es decir,

$$\nabla_M f = ((\nabla F)|_M)^T = (a, b, c)^T = d^T = d - \langle n, n \rangle \langle d, n \rangle n.$$

Ejemplo 5.1.3 Gradiente de la función soporte. Sea X_1, X_2 una base ortonormal local de M tal que $\nabla_{X_i} X_j|_p = 0$ para todo $i, j \in \{1, 2\}$. En este marco local, el gradiente se puede calcular como: Sea $\epsilon_i := \langle X_i, X_i \rangle$.

$$\begin{aligned} \nabla_M \langle p, n \rangle &= \epsilon_1 \langle X_1 \langle p, n \rangle \rangle X_1 + \epsilon_2 \langle X_2 \langle p, n \rangle \rangle X_2 \\ &= \epsilon_1 \langle D_{X_1} p, n \rangle X_1 + \epsilon_1 \langle p, D_{X_1} n \rangle X_1 + \epsilon_2 \langle D_{X_2} p, n \rangle X_2 + \epsilon_2 \langle p, D_{X_2} n \rangle X_2 \\ &= \epsilon_1 \langle X_1, n \rangle X_1 - \epsilon_1 \langle p, S(X_1) \rangle X_1 + \epsilon_2 \langle X_2, n \rangle X_2 - \epsilon_2 \langle p, S(X_2) \rangle X_2 \\ &= -\epsilon_1 \langle p^T, S(X_1) \rangle X_1 - \epsilon_2 \langle p^T, S(X_2) \rangle X_2 \\ &= -\epsilon_1 \langle S(p^T), X_1 \rangle X_1 - \epsilon_2 \langle S(p^T), X_2 \rangle X_2 \\ &= -S(p^T), \end{aligned}$$

donde p^T es la proyección ortogonal de p en $T_p M$. Además, usamos el hecho de que el operador de forma es autoadjunto. Tenemos una fórmula sencilla:

$$\nabla_M \langle p, n \rangle = -S(p^T).$$

Ejemplo 5.1.4 Gradiente de la función ángulo. El cálculo es similar al caso del gradiente de la función soporte. Sea X_1, X_2 una base ortonormal local de M tal que $\nabla_{X_i} X_j|_p = 0$ para todo $i, j \in \{1, 2\}$. En este marco local, el gradiente se puede calcular como: Sea $\epsilon_i := \langle X_i, X_i \rangle$.

$$\begin{aligned} \nabla_M \langle d, n \rangle &= \epsilon_1 \langle X_1 \langle d, n \rangle \rangle X_1 + \epsilon_2 \langle X_2 \langle d, n \rangle \rangle X_2 \\ &= \epsilon_1 \langle D_{X_1} d, n \rangle X_1 + \epsilon_1 \langle d, D_{X_1} n \rangle X_1 + \epsilon_2 \langle D_{X_2} d, n \rangle X_2 + \epsilon_2 \langle d, D_{X_2} n \rangle X_2 \\ &= -\epsilon_1 \langle d, S(X_1) \rangle X_1 - \epsilon_2 \langle d, S(X_2) \rangle X_2 \\ &= -\epsilon_1 \langle d^T, S(X_1) \rangle X_1 - \epsilon_2 \langle d^T, S(X_2) \rangle X_2 \\ &= -\epsilon_1 \langle S(d^T), X_1 \rangle X_1 - \epsilon_2 \langle S(d^T), X_2 \rangle X_2 \\ &= -S(d^T), \end{aligned}$$

donde d^T es la proyección ortogonal de d en T_pM . Tenemos una fórmula sencilla:

$$\nabla_M \langle d, n \rangle = -S(d^T).$$

Proposición 5.1.3 *Sea M una superficie no degenerada inmersa en \mathbb{R}_1^3 y sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ la función lisa $f(x) = \langle x, x \rangle$. Entonces $\nabla_M f = 2x^T$.*

Demostración. Sea X_1, X_2 un marco ortonormal de M alrededor de un punto $p \in M$. Sabemos que

$$\begin{aligned} \nabla_M \langle x, x \rangle &= \sum_{i=1}^2 \epsilon_i (X_i \cdot f) X_i = 2 \sum_{i=1}^2 \epsilon_i \langle D_{X_i} x, x \rangle X_i \\ &= 2 \sum_{i=1}^2 \epsilon_i \langle X_i, x \rangle X_i = 2x^T. \end{aligned}$$

□

5.2 Hessiano

Definición 5.2.1 Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función lisa. El *Hessiano* de la función f , $Hess_M f : TM \times TM \rightarrow \mathbb{R}$ se define como

$$Hess_M f(X, Y) = \langle \nabla_X (\nabla_M f), Y \rangle.$$

Observación 5.2.1 El *Hessiano* $HessF$ para una función $F : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}$ en el espacio de Minkowski se define de manera similar:

$$HessF(Z, W) = \langle D_Z (\nabla F), W \rangle.$$

Lema 5.2.1 *El Hessiano de f tiene las siguientes propiedades*

$$\begin{aligned} Hess_M f(X, Y) &= Hess_M f(Y, X), \\ Hess_M f(hX, Y) &= Hess_M f(X, hY) = h Hess_M f(X, Y). \end{aligned}$$

donde $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ es cualquier función lisa.

Proposición 5.2.1 *Sea $F : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Denotemos su restricción a una superficie M como $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, es decir $F|_M = f$. Entonces*

$$HessF = Hess_M f - \langle \nabla F, II(\cdot, \cdot) \rangle.$$

Demostración. Sean $X, Y \in TM$.

$$\begin{aligned}
HessF(X, Y) &= \langle D_X(\nabla F), Y \rangle = \langle D_X(\nabla F)^T, Y \rangle + \langle D_X(\nabla F)^\perp, Y \rangle \\
&= \langle \nabla_X(\nabla F)^T, Y \rangle - \langle (\nabla F)^\perp, D_X Y \rangle \\
&= \langle \nabla_X(\nabla_M f), Y \rangle - \langle (\nabla F)^\perp, (D_X Y)^\perp \rangle \\
&= Hess_M f(X, Y) - \langle \nabla F, (D_X Y)^\perp \rangle \\
&= Hess_M f(X, Y) - \langle \nabla F, II(X, Y) \rangle.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.2.1 Hessiano de la función altura. Sea $d = (a, b, c) \in \mathbb{R}_1^3$ un vector fijo. Sea

$$F(x, y, z) = \langle (a, b, c), (x, y, z) \rangle = ax + by - cz.$$

La función altura de la superficie M en la dirección $(a, b, c) \in \mathbb{R}_1^3$ es $f = F|_M$. Por la Proposición 5.2.1, $HessF(X, Y) = Hess_M f(X, Y) - \langle \nabla F, II(X, Y) \rangle$. Por el Ejemplo 5.1.2, $\nabla F = (a, b, c)$. Además como F es lineal, $HessF(X, Y) = 0$. Se sigue que,

$$Hess_M f(X, Y) = \langle II(X, Y), d \rangle.$$

Ejemplo 5.2.2 Hessiano de la función soporte. Sea $t(p) = \langle p, n \rangle$ la función soporte. Se sigue del Ejemplo 5.1.3 que:

$$Hess_M t(X, Y) = \langle \nabla_X(\nabla_M t), Y \rangle = -\langle \nabla_X(S(p^T)), Y \rangle.$$

Ejemplo 5.2.3 Hessiano de la función ángulo. Sea $a(p) = \langle n, d \rangle$ la función ángulo. Se sigue del Ejemplo 5.1.4 que:

$$Hess_M a(X, Y) = \langle \nabla_X(\nabla_M a), Y \rangle = -\langle \nabla_X(S(d^T)), Y \rangle.$$

Lema 5.2.2 Sea M con aplicación de Gauss n . Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función lisa. El Hessiano de f satisface la relación

$$Hess_M f(X, Y) = X \cdot (Y \cdot f) - \nabla_X Y \cdot f.$$

Demostración. Por la compatibilidad con la métrica de la conexión de Levi-Civita de M ,

$$\begin{aligned}
Hess_M f(X, Y) &= \langle \nabla_X(\nabla_M f), Y \rangle = X \cdot \langle \nabla_M f, Y \rangle - \langle \nabla_M f, \nabla_X Y \rangle \\
&= X \cdot (Y \cdot f) - \nabla_X Y \cdot f,
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos la definición del gradiente de una función.

□

Proposición 5.2.2 Sea M una superficie no degenerada inmersa en \mathbb{R}_1^3 y sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ la función lisa $f(x) = \langle x, x \rangle$. Entonces $Hessf(X, Y) = 2\langle X, Y \rangle + 2\langle n, n \rangle \langle x, n \rangle \langle S(X), Y \rangle$, para todo par de campos vectoriales X, Y de M .

Demostración. Por definición

$$\begin{aligned} Hessf(X, Y) &= \langle \nabla_X(\nabla_M f), Y \rangle = 2\langle \nabla_X x^T, Y \rangle = 2\langle D_X x^T, Y \rangle \\ &= 2\langle D_X x, Y \rangle - 2\langle D_X x^\perp, Y \rangle \\ &= 2\langle X, Y \rangle - 2\langle n, n \rangle \langle x, n \rangle \langle D_X n, Y \rangle \\ &= 2\langle X, Y \rangle + 2\langle n, n \rangle \langle x, n \rangle \langle S(X), Y \rangle. \end{aligned}$$

En las igualdades anteriores usamos que $x = x^T + x^\perp$ y $x^\perp = \langle n, n \rangle \langle x, n \rangle n$.
□

5.3 El Laplaciano

Definición 5.3.1 Sea M una superficie no degenerada. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función lisa. Sea X_1, X_2 una base ortonormal de TM . Sea $\epsilon_i := \langle X_i, X_i \rangle$. El *Laplaciano* de f , $\Delta_M f : M \rightarrow \mathbb{R}$, está definido por

$$\Delta_M f = \epsilon_1 Hess_M f(X_1, X_1) + \epsilon_2 Hess_M f(X_2, X_2).$$

Aquí usamos el subíndice M para enfatizar que el laplaciano y hessiano se calculan usando sólo direcciones tangentes a M .

Observación 5.3.1 El Laplaciano ΔF para una función $F : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ en el espacio de Minkowski $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ se define como

$$\Delta F = (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3).$$

Denotemos su restricción a una superficie M como $f := F|_M : M \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ y análogamente al laplaciano en M por $\Delta_M f = (\Delta_M(F_1|_M), \Delta_M(F_2|_M), \Delta_M(F_3|_M))$.

Proposición 5.3.1 Sea $F : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función lisa. Entonces a lo largo de M

$$\Delta F - \epsilon HessF(n, n) = \Delta_M f - \langle \nabla F, \tilde{H} \rangle,$$

donde \tilde{H} es el vector de curvatura media de M .

Demostración. Por la Proposición 5.2.1,

$$\sum_{i=1}^2 \epsilon_i \text{Hess}F(X_i, X_i) = \sum_{i=1}^2 \epsilon_i \text{Hess}_M f(X_i, X_i) - \langle \nabla F, \sum_{i=1}^2 \epsilon_i II(X_i, X_i) \rangle.$$

Es decir,

$$\sum_{i=1}^2 \epsilon_i \text{Hess}F(X_i, X_i) = \Delta_M f - \langle \nabla F, \tilde{H} \rangle.$$

Para concluir, basta observar que

$$\Delta F = \sum_{i=1}^2 \epsilon_i \text{Hess}F(X_i, X_i) + \epsilon \text{Hess}F(n, n).$$

□

Ejemplo 5.3.1 Laplaciano de una función altura. Sea $d = (a, b, c) \in \mathbb{R}_1^3$ un vector fijo. Definimos la función $F : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$F(x, y, z) = \langle (a, b, c), (x, y, z) \rangle = ax + by - cz.$$

La función altura de la superficie M en la dirección $(a, b, c) \in \mathbb{R}_1^3$ es $f = F|_M$. Por la Proposición 5.3.1, tenemos la relación

$$\Delta F - \epsilon \text{Hess}F(n, n) = \Delta_M f - \langle \nabla F, \tilde{H} \rangle.$$

Pero ya vimos que $\nabla F = (a, b, c)$ y que $\text{Hess}F(X, Y) = 0$, lo cual implica que $\Delta F = 0$. Entonces $\Delta_M f = \langle \tilde{H}, d \rangle$, ó en forma equivalente

$$\Delta_M \langle p, d \rangle = \langle \tilde{H}, d \rangle, \quad (5.2)$$

donde $p \in M$.

Corolario 5.3.1 *El vector de curvatura media de M se puede calcular con el Laplaciano del vector de posición p de M :*

$$\tilde{H} = \Delta_M p = (\Delta_M \langle p, e_1 \rangle, \Delta_M \langle p, e_2 \rangle, -\Delta_M \langle p, e_3 \rangle).$$

Demostración. El vector de curvatura media de M , \tilde{H} se puede escribir como,

$$\tilde{H} = \langle \tilde{H}, e_1 \rangle e_1 + \langle \tilde{H}, e_2 \rangle e_2 - \langle \tilde{H}, e_3 \rangle e_3.$$

Para concluir basta sustituir la ecuación (5.2) para los casos en que d es e_1, e_2, e_3 . Con lo cual obtenemos,

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= (\Delta_M \langle p, e_1 \rangle) e_1 + (\Delta_M \langle p, e_2 \rangle) e_2 - (\Delta_M \langle p, e_3 \rangle) e_3 \\ &= (\Delta_M \langle p, e_1 \rangle, \Delta_M \langle p, e_2 \rangle, -\Delta_M \langle p, e_3 \rangle) \\ &= \Delta_M(\langle p, e_1 \rangle, \langle p, e_2 \rangle, -\langle p, e_3 \rangle) \\ &= \Delta_M(\langle p, e_1 \rangle e_1 + \langle p, e_2 \rangle e_2 - \langle p, e_3 \rangle e_3) = \Delta_M p. \end{aligned}$$

□

Corolario 5.3.2 *Si la superficie M tiene curvatura media constante cero, entonces sus funciones coordenadas son armónicas, es decir*

$$\Delta_M a = 0,$$

donde a es cualquiera de las funciones $\langle p, e_1 \rangle, \langle p, e_2 \rangle, \langle p, e_3 \rangle$.

Demostración. Como M tiene curvatura media constante cero, por el Corolario 5.3.1, $(\Delta_M \langle p, e_1 \rangle, \Delta_M \langle p, e_2 \rangle, -\Delta_M \langle p, e_3 \rangle) = 0$ □

Definición 5.3.2 Sea M una superficie lisa y sea $p \in M$. Un *marco local* alrededor de p , es un par de campos vectoriales tangentes a M , $X_1, X_2 : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ definidos en un abierto U de M el cual contiene a p . Además, para cada $q \in U$, $X_1(q), X_2(q)$ forman una base de $T_q M$. El marco local se dice *marco local ortonormal* si para cada $q \in U$, $X_1(q), X_2(q)$ forman una base ortonormal de $T_q M$.

Vamos a enunciar sin prueba el siguiente resultado de Geometría Semi-Riemanniana.

Lema 5.3.1 *En cada punto $p \in M$ existe un marco local ortonormal alrededor de p , $X_1, X_2 : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ tal que*

$$\nabla_{X_i} X_j|_p = 0,$$

para $j = 1, 2$. A un marco con esta propiedad se le llama *marco geodésico* en p .

Corolario 5.3.3 Sea $p \in M$ y sea X_1, X_2 un marco geodésico en p , como en el Lema 5.3.1. Entonces el Laplaciano de una función f lisa definida en M se puede calcular como

$$\Delta_M f = \epsilon_1 X_1 \cdot (X_1 \cdot f) + \epsilon_2 X_2 \cdot (X_2 \cdot f).$$

Demostración. Por el Lema 5.2.2, el Laplaciano en cualquier marco local ortonormal está dado por

$$\Delta_M f = \epsilon_1 (X_1 \cdot (X_1 \cdot f) - \nabla_{X_1} X_1 \cdot f) + \epsilon_2 (X_2 \cdot (X_2 \cdot f) - \nabla_{X_2} X_2 \cdot f).$$

Pero en nuestro caso para el marco que elejimos, el Laplaciano en p es

$$\Delta_M f = \epsilon_1 X_1 \cdot (X_1 \cdot f) + \epsilon_2 X_2 \cdot (X_2 \cdot f).$$

□

Definición 5.3.3 Sea $M \subset \mathbb{R}_1^3$ una superficie no degenerada con operador de forma S . La traza de S^2 es

$$tr(S^2) = \epsilon_1 \langle S^2(X_1), X_1 \rangle + \epsilon_2 \langle S^2(X_2), X_2 \rangle,$$

y $\langle S, S \rangle$ está dada por

$$\begin{aligned} \langle S, S \rangle &= \sum_{i,j=1}^2 \epsilon_i \epsilon_j \langle S(X_i), X_j \rangle^2 \\ &= \langle S(X_1), X_1 \rangle^2 + \epsilon_1 \epsilon_2 \langle S(X_1), X_2 \rangle^2 + \epsilon_1 \epsilon_2 \langle S(X_2), X_1 \rangle^2 + \langle S(X_2), X_2 \rangle^2 \\ &= \langle S(X_1), X_1 \rangle^2 + 2\epsilon_1 \epsilon_2 \langle S(X_1), X_2 \rangle^2 + \langle S(X_2), X_2 \rangle^2. \end{aligned}$$

donde X_1, X_2 es una base ortonormal de TM .

Lema 5.3.2 Sea $M \subset \mathbb{R}_1^3$ una superficie no degenerada con operador de forma S . Entonces $tr(S^2) = \langle S, S \rangle$.

Demostración. Sea X_1, X_2 una base ortonormal de TM . Denotemos por $S_{ij} = \langle S(X_i), X_j \rangle$ donde $i, j \in \{1, 2\}$. Usando la base ortonormal tenemos que

$$S(X_1) = \epsilon_1 S_{11} X_1 + \epsilon_2 S_{12} X_2, \quad S(X_2) = \epsilon_1 S_{21} X_1 + \epsilon_2 S_{22} X_2.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
tr(S^2) &= \epsilon_1 \langle S(X_1), S(X_1) \rangle + \epsilon_2 \langle S(X_2), S(X_2) \rangle \\
&= \epsilon_1 \langle S(X_1), \epsilon_1 S_{11} X_1 + \epsilon_2 S_{12} X_2 \rangle + \epsilon_2 \langle S(X_2), \epsilon_1 S_{21} X_1 + \epsilon_2 S_{22} X_2 \rangle \\
&= S_{11}^2 + \epsilon_1 \epsilon_2 S_{12}^2 + \epsilon_1 \epsilon_2 S_{21}^2 + S_{22}^2 = S_{11}^2 + 2\epsilon_1 \epsilon_2 S_{12}^2 + S_{22}^2 = \langle S, S \rangle.
\end{aligned}$$

□

Lema 5.3.3 *Sea $p \in M$ y sea X_1, X_2 un marco local ortonormal alrededor de p como en el Lema 5.3.1. Entonces la conexión de Levi-Civita del espacio de Minkowski \mathbb{R}_1^3 satisface que*

$$D_{X_i} D_{X_k} X_j = D_{X_k} D_{X_i} X_j. \quad (5.3)$$

Demostración. Por el Lema 4.2.2, sabemos que el espacio de Minkowski tiene curvatura cero. Esto nos dice que para todos los campos vectoriales $X, Y, Z : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$:

$$D_X(D_Y Z) - D_Y(D_X Z) = D_{[X, Y]} Z.$$

Ahora tomamos $X = X_i$ y $Y = X_k$, en consecuencia

$$[X_i, X_k]_{|p} = \nabla_{X_i} X_k|_p - \nabla_{X_k} X_i|_p = 0,$$

debido a la elección de los campos vectoriales X_i, X_k .

Entonces, $D_{[X_i, X_k]} Z = 0$ para todo Z .

□

En el siguiente resultado calculamos el laplaciano de la función ángulo de una superficie con curvatura media constante.

Teorema 5.3.1 *Sea $a \in \mathbb{R}_1^3$ un vector fijo. Sea $n : M \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ la aplicación de Gauss de la superficie lisa no degenerada M . Si M tiene curvatura media constante, entonces el Laplaciano de la función ángulo $\langle n, a \rangle$ está dado por*

$$\Delta_M \langle n, a \rangle = -\epsilon tr(S^2) \langle n, a \rangle, \quad (5.4)$$

donde S es el operador de forma de M .

Demostración. La prueba a continuación está tomada de [4]. Véase [7] página 14, para ver otra prueba parecida. Sea $p \in M$ y sea X_1, X_2 un marco geodésico en p como en el Lema 5.3.1. Por hipótesis, tenemos que la curvatura media H de M dada por $H = \langle \tilde{H}, n \rangle$ es constante.

Como primer paso vamos a demostrar que

$$\sum_{i=1}^2 \epsilon_i D_{X_i} D_{X_i} n$$

es ortogonal a la superficie:

Derivamos la igualdad $\langle n, X_k \rangle = 0$ para obtener, $\langle D_{X_i} n, X_k \rangle = -\langle n, D_{X_i} X_k \rangle$. Tomando derivada de ambos lados:

$$\langle D_{X_i} D_{X_i} n, X_k \rangle + \langle D_{X_i} n, D_{X_i} X_k \rangle = -\langle D_{X_i} n, D_{X_i} X_k \rangle - \langle n, D_{X_i} D_{X_i} X_k \rangle.$$

Notemos que la igualdad $\langle n, n \rangle = \epsilon$ implica que $\langle D_{X_i} n, n \rangle = 0$, es decir $D_{X_i} n$ es tangente a M . Además por hipótesis, $\nabla_{X_i} X_k|_p = 0$. Se deduce que $D_{X_i} X_k = II(X_i, X_k) = II(X_k, X_i) = D_{X_k} X_i$ y que $\langle D_{X_i} n, D_{X_i} X_k \rangle = \langle D_{X_i} n, II(X_i, X_k) \rangle = 0$. Entonces,

$$\langle D_{X_i} D_{X_i} n, X_k \rangle = -\langle n, D_{X_i} D_{X_i} X_k \rangle = -\langle n, D_{X_i} D_{X_k} X_i \rangle.$$

Ahora vamos a usar que la curvatura Riemanniana de \mathbb{R}_1^3 con la métrica de Lorentz es constante cero, lo cual es equivalente a la igualdad

$$D_{X_i} D_{X_k} X_i = D_{X_k} D_{X_i} X_i.$$

Con esta igualdad podemos escribir la anterior como

$$\langle D_{X_i} D_{X_i} n, X_k \rangle = -\langle n, D_{X_k} D_{X_i} X_i \rangle.$$

Entonces sumando sobre i obtenemos

$$\sum_{i=1}^2 \epsilon_i \langle D_{X_i} D_{X_i} n, X_k \rangle = -\langle n, D_{X_k} \left(\sum_{i=1}^2 \epsilon_i D_{X_i} X_i \right) \rangle = -\langle n, D_{X_k} \tilde{H} \rangle. \quad (5.5)$$

Recordemos que los campos vectoriales X_1, X_2 satisfacen que $\nabla_{X_i} X_j|_p = 0$. Esto implica que en el punto p , $\sum_{i=1}^2 \epsilon_i D_{X_i} X_i = \sum_{i=1}^2 \epsilon_i II(X_i, X_i) = \tilde{H}$ el vector de curvatura media. Por hipótesis, la curvatura media es constante,

es decir $H = \langle n, \tilde{H} \rangle$ es constante. Así que derivando obtenemos $0 = X_k \langle n, \tilde{H} \rangle = \langle n, D_{X_k} \tilde{H} \rangle + \langle D_{X_k} n, \tilde{H} \rangle$. Sustituimos en la ecuación (5.5),

$$\left\langle \sum_{i=1}^2 \epsilon_i D_{X_i} D_{X_i} n, X_k \right\rangle = -\langle n, D_{X_k} \tilde{H} \rangle = \langle D_{X_k} n, \tilde{H} \rangle = 0,$$

ya que $D_{X_k} n$ es tangente a M y \tilde{H} es ortogonal a M . Esto concluye el primer paso a probar.

Para concluir,

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i=1}^2 \epsilon_i D_{X_i} D_{X_i} n, n \right\rangle &= -\sum_{i=1}^2 \epsilon_i \langle D_{X_i} n, D_{X_i} n \rangle = -\sum_{i=1}^2 \epsilon_i \langle S(X_i), S(X_i) \rangle \\ &= -\sum_{i=1}^2 \epsilon_i \langle S^2(X_i), X_i \rangle = -\text{tr}(S^2). \end{aligned}$$

Esto prueba que

$$\sum_{i=1}^2 \epsilon_i D_{X_i} D_{X_i} n = -\epsilon \text{tr}(S^2) n.$$

Ahora podemos concluir que en el punto p

$$\begin{aligned} \Delta_M \langle n, a \rangle &= \sum_{i=1}^2 \epsilon_i X_i \cdot (X_i \cdot \langle n, a \rangle) = \left\langle \sum_{i=1}^2 \epsilon_i D_{X_i} D_{X_i} n, a \right\rangle \\ &= -\epsilon \text{tr}(S^2) \langle n, a \rangle. \end{aligned}$$

Pero p era un punto arbitrario en M . \square

Observación 5.3.2 Como consecuencia de este Lema 5.3.2, podemos reescribir la ecuación (5.4) como

$$\Delta_M \langle n, a \rangle = -\epsilon \langle S, S \rangle \langle n, a \rangle,$$

que es como aparece en [7] página 14 para el caso Riemanniano.

Proposición 5.3.2 *Sea M una superficie no degenerada inmersa en \mathbb{R}_1^3 y sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ la función lisa $f(x) = \langle x, x \rangle$. Entonces $\Delta_M f = 2\langle \tilde{H}, x \rangle + 4$.*

Demostración. El laplaciano se calcula como,

$$\begin{aligned}
 \Delta_M f &= \sum_{i=1}^2 \epsilon_i \text{Hess} f(X_i, X_i) \\
 &= \sum_{i=1}^2 \epsilon_i (2\langle X_i, X_i \rangle + 2\epsilon \langle x, n \rangle \langle S(X_i), X_i \rangle) \\
 &= 4 + 2\epsilon \langle \sum_{i=1}^2 \epsilon_i II(X_i, X_i), n \rangle \langle n, x \rangle \\
 &= 4 + 2\epsilon \langle \tilde{H}, n \rangle \langle n, x \rangle = 2\langle \tilde{H}, x \rangle + 4.
 \end{aligned}$$

□

5.4 Ejercicios

- Sean $F, H : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ funciones lisas. Demuestre las relaciones:

$$\begin{aligned}
 \nabla(FH) &= F\nabla H + H\nabla F, \\
 \Delta(FH) &= F\Delta H + H\Delta F + 2\langle \nabla F, \nabla H \rangle.
 \end{aligned}$$

- Sea M una superficie tipo espacio con curvatura media constante cero. Calcule el gradiente y el Laplaciano de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(p) = \langle p, p \rangle$. En el caso Euclidiano el resultado es

$$\Delta_M f = 4.$$

Sugerencia: Escriba f en términos de funciones altura.

- Pruebe directamente la fórmula

$$\det_{*I}(A) = \text{tr}(A),$$

donde A es cualquier matriz de 2×2 y donde I es la matriz identidad de 2×2 .

- Sea M el disco abierto de radio uno encajado en \mathbb{R}_1^3 , es decir $M = \{(u, v, 0) \in \mathbb{R}_1^3 \mid u^2 + v^2 \leq 1\}$. Consideremos la siguiente variación de M : Sea $X : (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ dada por

$$X(t, u, v) = (u, v, t(1 - u^2 - v^2)).$$

Note que estas superficies son tipo espacio para t suficientemente cercano a cero. Calcule la métrica $g(t)$ en tiempo t y la funcional de área

$A(t)$. Finalmente, encuentre la derivada $A'(0)$ e interprete el resultado usando la primera fórmula de variación.

5. Deduzca la expresión para el gradiente de la función soporte. Esta se puede escribir usando el operador de forma de M .
6. Sea M una superficie tipo espacio con curvatura media constante. Pruebe que si su función ángulo es constante, entonces M es parte de un cilindro de revolución ó es parte de un plano.
Sugerencia: Use el Laplaciano de la función ángulo.

CAPITULO 6

Superficies tipo luz

En este capítulo vamos a suponer que M es una superficie lisa degenerada o tipo luz en el espacio de Minkowski, es decir, cada espacio tangente de M es un plano paralelo a un plano tangente del cono de luz.

6.1 Ejemplos

Ejemplo 6.1.1 Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función lisa. Consideremos a la superficie $M := \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}_1^3 \mid (x, y) \in U\}$, es decir, M es la gráfica de la función f . Vimos que para que f sea tipo luz es equivalente que $|\nabla f|^2 = f_x^2 + f_y^2 = 1$. Una tal función f se conoce en la literatura como función eikonal.

Cada plano tangente de M está generado por los vectores tangentes $(1, 0, f_x)$ y $(0, 1, f_y)$. Este plano es tipo luz y contiene al vector tangente tipo luz $(f_x, f_y, 1)$ ya que

$$\langle (f_x, f_y, 1), (f_x, f_y, 1) \rangle = f_x^2 + f_y^2 - 1 = 0$$

y

$$(f_x, f_y, 1) = f_x(1, 0, f_x) + f_y(0, 1, f_y).$$

Ejemplo 6.1.2 Consideremos la curva tipo espacio $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ tal que su vector tangente $T(u) := \alpha'(u)$ sea de longitud $|T(u)| = 1$. Recordemos que las fórmulas de Serret-Frenet para una curva plana tipo espacio son

$$T'(u) = \kappa(u)N(u), \quad N'(u) = -\kappa(u)T(u),$$

donde N es el vector ortogonal normalizado, es decir $\langle N(u), N(u) \rangle = 1$. Definimos una superficie parametrizada por

$$\varphi(u, v) = \alpha(u) + v(N(u) + e_3),$$

donde $e_3 = (0, 0, 1)$. Vamos a verificar que esta parametrización define una superficie nula:

Los vectores tangentes dados por φ son

$$\varphi_u = T(u) + vN'(u) = T(u) - v\kappa(u)T(u), \quad \varphi_v = N(u) + e_3.$$

Veamos el carácter causal $\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle > 0$, ya que T es tipo espacio. El otro vector tangente es tipo luz: $\langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = 0$. Un vector ortogonal a estos dos vectores es $n = N(u) + e_3$. Tenemos que $\langle n, n \rangle = 0$. Como el vector tangente $n = \varphi_v$ es ortogonal a la superficie, entonces la superficie parametrizada por φ es degenerada. Concluimos que M es tipo luz.

6.2 Funciones eikonales vs Superficies nulas

Lema 6.2.1 *Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ satisface que $f_x^2 + f_y^2 = 1$ entonces las curvas integrales del campo $\nabla f = (f_x, f_y)$ son segmentos de línea recta ortogonales a las curvas de nivel de f .*

Demostración. Queremos ver que $\nabla f / |\nabla f|$ es un campo vectorial con curvas integrales que son geodésicas de \mathbb{R}^2 con la métrica riemanniana estándar de \mathbb{R}^2 . Sea D la conexión de Levi-Civita asociada a tal métrica de \mathbb{R}^2 . Usando el hecho que f es eikonal tenemos que $|\nabla f| = 1$.

$$\begin{aligned} D_{\frac{\nabla f}{|\nabla f|}} \frac{\nabla f}{|\nabla f|} &= D_{\nabla f} \nabla f \\ &= \nabla f \cdot (f_x, f_y) = (\langle \nabla f, \nabla f_x \rangle, \langle \nabla f, \nabla f_y \rangle). \end{aligned}$$

Hagamos el cálculo con $\nabla f_x = (f_{xx}, f_{xy})$ y $\nabla f_y = (f_{yx}, f_{yy})$:

$$\langle \nabla f, \nabla f_x \rangle = f_x f_{xx} + f_y f_{xy} = \frac{1}{2} \frac{\partial (f_x^2 + f_y^2)}{\partial x} = 0$$

y

$$\langle \nabla f, \nabla f_y \rangle = f_x f_{yx} + f_y f_{yy} = \frac{1}{2} \frac{\partial (f_x^2 + f_y^2)}{\partial y} = 0.$$

Esto prueba que $D_{\frac{\nabla f}{|\nabla f|}} \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = 0$. Es decir, las curvas integrales de $\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ son segmentos líneas rectas. Esto implica que las curvas integrales de ∇f son segmentos de líneas rectas en U . Además, es bien conocido que el gradiente ∇f es ortogonal a las curvas de nivel de f . Por lo tanto tales segmentos de recta son ortogonales a las curvas de nivel también. \square

Corolario 6.2.1 *La gráfica de una función eikonal es una superficie reglada y cada dirección de tal línea recta generatriz es un vector tipo luz .*

6.3 Ejercicios

1. Dé un ejemplo de una función eikonal en un abierto de \mathbb{R}^2 .
2. Sea $V \subset \mathbb{R}_1^3$ un plano tipo luz y sean $u, v \in \mathbb{R}_1^3 \setminus \{0\}$. Suponga que $\langle u, v \rangle = 0$. Pruebe que ó u y v son un múltiplo de un mismo vector tipo luz ó que un vector es tipo luz y el otro es tipo espacio.

Referencias

- [1] R. Courant, *Differential and integral calculus Vol. II*, Interscience Publishers, Inc.
- [2] A. Gray, E. Abbena and S. Salamon, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Chapman Hall/CRC.
- [3] W. Kunhel, *Differential Geometry*, Student Mathematical Library Vol. 16, AMS.
- [4] R. Lopez, *Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space*, arXiv:0810.3551v1.
- [5] G. L. Naber, *The Geometry of Minkowski Spacetime*, Applied Math. Sciences **92**. Springer.
- [6] B. O'Neill, *Elementary Differential Geometry*, Elsevier 2006.
- [7] Y. Xin, *Minimal submanifolds and related topics*, Nankai Tracts in Mathematics, Vol. 8, 2003.

Indice

Caracter causal de curvas, 25

Ecuación de Codazzi, 77

Ecuación de Gauss, 75

Función, 101

 ángulo, 100

 altura, 100

 soporte, 100

Gradiente, 67, 99

Hessiano, 102

Laplaciano, 104

 de la función ángulo, 108

 de la función altura, 105

Métrica de Lorentz, 1

Producto Cruz, 3