1. Integración Compleja.

Teorema 1. Cauchy.
Sean D un disco y $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfa. Sea γ curva cerrada en D, C^1 por tramos. Entonces $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Proposición 1. *Sea γ curva C^1 por tramos.*

- *Para $a \in \mathbb{C} - \gamma$*
$$I(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a} \in \mathbb{Z}$$
- *Sea D un disco tal que $\gamma \subset D$ y $a \notin D$, entonces $I(\gamma, a) = 0$.*
- *Sea D una región tal que $\gamma \cap D = \emptyset$ y sean $a, b \in D$, entonces $I(\gamma, a) = I(\gamma, b)$.*

Teorema 2. Fórmula integral de Cauchy.
Sean D un disco y $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfa. Sea γ curva cerrada en $D - \{z_0\}$, C^1 por tramos. Entonces
$$2\pi i I(\gamma, z_0) f(z_0) = \int_\gamma \frac{f(z)dz}{z - z_0}$$

Teorema 3. *Sean γ curva C^1 por tramos y $\varphi : \gamma \to \mathbb{C}$ continua. La función $F : \mathbb{C} - \gamma \to \mathbb{C}$ definida por*
$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)}$$
es infinitamente diferenciable con
$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}.$$
De hecho F es analítica, o sea que si $a \notin \gamma$, $\{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\} \cap \gamma = \emptyset$,
$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k, \quad |z-a| < r$$

Corolario 1. *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces f es analítica.*
Si $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| \le r\} \subset \Omega$, $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}$, entonces
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \quad |z-a| < r$$

Corolario 2. *Sean Ω una región y $f : \Omega - \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorfa. Supongamos que*
$$\lim_{z \to a}(z-a)f(z) = 0.$$
Entonces f se extiende a una función holomorfa en Ω. Decimos que a es una singularidad removible de f.

Corolario 3. Morera. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua en la región Ω tal que $\int_\gamma f(z)dz = 0$ para cualquier curva cerrada γ en Ω. Entonces f es holomorfa en Ω.*

Corolario 4. Desigualdades de Cauchy.
Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa, $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq r\} \subset \Omega$, $M_r = \max_{|z-a|=r} |f(z)|$. Para $|z-a| < r$ tenemos

$$|f^{(k)}(z)| \leq \frac{k! r M_r}{(r - |z-a|)^{k+1}}.$$

Corolario 5. Liouville. *Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa y acotada entonces es constante.*

Corolario 6. Teorema fundamental del álgebra. *Todo polinomio no constante posee una raíz.*

Decimos que c es un **punto de acumulación** de A si hay una sucesión de puntos distintos en A que converge a c.

Teorema 4. Teorema de identidad.
Sean $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfas en la región Ω. Son equivalentes

- *$f(z) = g(z)$ para todo $z \in \Omega$.*
- *El conjunto $\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ tiene un punto de acumulación en Ω.*
- *Existe un $c \in \Omega$ tal que $f^{(k)}(c) = g^{(k)}(c)$ para toda $k \geq 0$.*

Definición 1. Integral de Poisson.
Sean $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ y $U : \gamma \to \mathbb{R}$ continua. Definimos

$$\begin{aligned} P_U(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} U(re^{i\theta}) d\theta, \quad |z| < r. \\ S_U(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{U(\zeta) d\zeta}{\zeta}, \quad |z| < r. \end{aligned}$$

Como S_U es holomorfa y $P_U = \Re S_U$, tenemos que P_U es armónica.

Teorema 5.

$$\lim_{z \to re^{i\phi}} P_U(z) = U(re^{i\phi})$$

Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa, $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq r\} \subset \Omega$ y definimos $U(\zeta) = \Re f(\zeta)$ para $|\zeta - a| = r$, entonces

$$\Re f(z) = P_U(z), \quad |z| < r.$$

Teorema 6. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa y no constante en la región Ω. Para $U \subset \Omega$ abierto se tiene que $f(U)$ es abierto.*

Teorema 7. Principio del máximo.

Versión 1. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa no constante, entonces $|f|$ no puede alcanzar un máximo local en Ω.*

Versión 2. *Sean Ω región acotada, $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{C}$ continua, holomorfa en Ω. Entonces $|f|$ alcanza su máximo en $\partial\Omega$.*

Lema 1. Schwarz. *Sea f holomorfa en el disco $|z| < 1$ y tal que*

$$|f(z)| \leq 1, \quad f(0) = 0.$$

Entonces

$$|f(z)| \leq |z|, \quad |f'(0)| \leq 1,$$

y si en algún punto $z_0 \neq 0$, $|f(z_0)| = |z_0|$ ó si $|f'(0)| = 1$, entonces $f(z) = cz$ para todo $|z| < 1$, $|c| = 1$.

Teorema 8. Weierstrass

Sea $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones holomorfas que converge uniformemente en cada disco cerrado a $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Entonces f es holomorfa y f_n' converge uniformemente en cada disco cerrado a f'.

Definición 2. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región.

- Decimos que Ω es **simplemente conexa** si y sólo si para todo $a \in \mathbb{C} - \Omega$ y toda curva cerrada γ en Ω, $I(\gamma, a) = 0$.
- Una curva cerrada γ en Ω se llama **homóloga a cero en** Ω (y escribimos $\gamma \sim 0 \mod \Omega$), si $I(\gamma, a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{C} - \Omega$.

Así, Ω es simplemente conexa si y sólo si toda curva cerrada γ en Ω es homóloga a cero en Ω.

Teorema 9. Fórmula integral. *Sean $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa, γ curva cerrada homóloga a cero en Ω que no pasa por z_0. Entonces*

$$2\pi i\, I(\gamma, z_0) f(z_0) = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Teorema 10. Cauchy. *Sean $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa, γ curva cerrada homóloga a cero en Ω. Entonces*

$$\int_\gamma f(z) dz = 0.$$

Corolario 7. *Sea Ω una región simplemente conexa. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa y γ es una curva cerrada en Ω,*

$$\int_\gamma f(z) dz = 0.$$

Corolario 8. *Sea Ω una región simplemente conexa, Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa. y $f(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$, entonces existe una rama holomorfa de $\log f$ en Ω.*

2. Singularidades, Series de Laurent, Residuos .

Definición 3.

1. Si f es holomorfa en una region $0 < |z-a| < \delta$ decimos que a es una **singularidad aislada** de f.
2. Una singularidad aislada a de f es un **polo** si $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$.
3. Una singularidad aislada que no es ni removible ni un polo se llama **esencial**

Si a es un polo de f, entonces hay $n \in \mathbb{N}$ y $f_n(z)$ holomorfa en $|z-a| < \delta'$, $f_n(a) \neq 0$, tal que

$$f(z) = \frac{f_n(z)}{(z-a)^n}$$

y decimos que a es un polo de orden n. Aplicando el teorema de Taylor a f_n tenemos

$$(z-a)^n f(z) = B_n + B_{n-1}(z-a) + \cdots + B_1(z-a)^{n-1} + \varphi(z)(z-a)^n$$

con $\varphi(z)$ holomorfa en $|z-a| < \delta''$. Para $0 < |z-a| < \delta''$ tenemos

$$f(z) = \frac{B_n}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{B_1}{(z-a)} + \varphi(z)$$

$f(z) - \varphi(z)$ se llama la **parte singular** de f en a.

Teorema 11. Cassorati - Weiersstrass. *Sea a una singularidad esencial de f. Entonces*

$$\forall b \in \mathbb{C}, \varepsilon > 0, \delta > 0,\ \exists z \in \mathbb{C} \textit{ con } 0 < |z-a| < \delta, |f(z) - b| < \varepsilon.$$

Teorema 12. Laurent

Toda función $f : A \to \mathbb{C}$ holomorfa en el anillo $A = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-c| < s\}$ tiene un desarrollo único de la forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n.$$

De hecho, para cualquier $r < \rho < s$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = \rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - c)^{n+1}}$$

Definición 4. El residuo de f en una singularidad aislada c es el coeficiente $\mathrm{Res}(f, c) = a_{-1}$ en el desarrollo de Laurent de f.

Teorema 13. *El residuo de f en una singularidad aislada c es el único número complejo A tal que $f(z) - \dfrac{A}{z-c}$ tiene una primitiva en $0 < |z-c| < \delta$ para δ pequeño.*

Teorema 14. Residuo. *Sea f holomorfa en Ω excepto por singularidades aisladas a_j. Si γ es una curva cerrada homóloga a cero en Ω que no pasa por ninguna de las singularidades,*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_j I(\gamma, a_j)\,\mathrm{Res}(f, a_j)$$

Teorema 15. Principio del argumento *Sea f meromorfa en Ω con ceros a_j y polos b_k. Si γ es un curva cerrada homóloga a cero en Ω que no pasa por ningún cero o polo*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_j I(\gamma, a_j) - \sum_k I(\gamma, b_k),$$

donde cada cero y polo se cuenta tantas veces como su multiplicidad.