

EJERCICIOS VARIABLE COMPLEJA I

1. INTEGRACIÓN

Ejercicio 1. Supón que f es holomorfa en una región que contiene a la curva cerrada γ . Demuestra que la parte real de $\int_{\gamma} f(z)\overline{f'(z)}dz$ es cero.

Ejercicio 2. Si $P(z)$ es un polinomio y γ es la circunferencia $|z - a| = R$, demuestra que

$$\int_{\gamma} \overline{P(z)}dz = 2\pi i R^2 \overline{P'(a)}.$$

Ejercicio 3. Sea γ la circunferencia unitaria y sea $f : \gamma \rightarrow \mathbb{C}$ continua. Demuestra que

$$\overline{\int_{\gamma} f(z)dz} = - \int_{\gamma} \overline{f(z)} \frac{dz}{z^2}$$

Ejercicio 4. Considera la elipse $\gamma = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$, calcula $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$ de 2 formas diferentes y deduce que

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$$

Ejercicio 5. Sea $\Omega = \mathbb{C} - [0, 1]$. Demuestra que para cualquier curva cerrada γ contenida en Ω

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z(z-1)} = 0$$

Ejercicio 6. Calcula

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z dz}{(z+1)^3(z-3)^2}, \quad \int_{|z|=2} z^m(1-z)^n dz, n, m \in \mathbb{Z}$$

Ejercicio 7. Sea f holomorfa en el disco $B_r(0), r > 1$. Calcula las integrales

$$\int_{|z|=1} (2 \pm (z + z^{-1}))f(z)z^{-1}dz$$

de 2 formas diferentes y deduce

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) dt = f(0) + \frac{1}{2}f'(0)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right) dt = f(0) - \frac{1}{2}f'(0)$$

Ejercicio 8. Obtén el desarrollo en serie de potencias alrededor del origen para las siguientes funciones

$$f(z) = \exp(z + \pi i), f(z) = \operatorname{sen}^2(z), f(z) = \cos(z^2 - 1),$$

$$f(z) = \int_0^z \exp(\zeta^2) d\zeta, f(z) = \frac{2z + 1}{(z^2 + 1)(z + 1)^2}.$$

Ejercicio 9. Sea f holomorfa en la región Ω . Demuestra que f es un polinomio si y sólo si hay un punto c en Ω para el cual $f^{(k)}(c) = 0$ para toda $k \geq n$.

Ejercicio 10. Supón que f y g son holomorfas y nunca se anulan en la región Ω . Demuestra que si el conjunto de puntos donde f'/f y g'/g coinciden tiene un punto de acumulación, entonces hay un $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $f = \lambda g$.

Ejercicio 11. Sea f una función entera. Demuestra que

- Si hay números $n \in \mathbb{N}, R, M > 0$ tales que $|f(z)| \leq M|z|^n$ para toda $|z| \geq R$, entonces f es un polinomio.
- Si la función $\Re f$ está acotada, entonces f es constante.

Ejercicio 12. Sean Ω una región acotada, f, g continuas nunca cero en $\bar{\Omega}$ y holomorfas en Ω , con $|f(z)| = |g(z)|$ en todos los puntos de $\partial\Omega = \bar{\Omega} - \Omega$. Demuestra que hay un $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$ tal que $f = \lambda g$ en $\bar{\Omega}$.

Ejercicio 13. Sea f holomorfa en la región Ω . Demuestra que si $\Re f$ posee un máximo local en algún $c \in \Omega$, entonces f es constante.

Ejercicio 14. Sea D el disco unitario abierto. Para $z, w \in D$ define

$$\Delta(w, z) = \frac{|z - w|}{|\bar{w}z - 1|}.$$

Demuestra que si $f : D \rightarrow D$ es holomorfa, entonces

- $\Delta(f(z), f(w)) \leq \Delta(w, z)$ para todo $z, w \in D$ y la igualdad se da en alguna pareja de puntos $z \neq w$ si y sólo si f es biholomorfa.
- $\frac{|f'(z)|}{1 - |f'(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$ para todo $z \in D$ y la igualdad se da en algún puntos z si y sólo si f es biholomorfa.

Sugerencia: Para $z \in D$ considera la transformación $g_w(z) = \frac{z-w}{\bar{w}z-1}$ y aplica el lema de Schwarz a $g_{f(w)} \circ f \circ g_w$.

Ejercicio 15. Sea H el semiplano superior abierto. Para $z, w \in H$ define

$$\delta(w, z) = \frac{|z-w|}{|z-\bar{w}|}.$$

Demuestra que si $f : H \rightarrow H$ es holomorfa, entonces

- $\delta(f(z), f(w)) \leq \delta(w, z)$ para todo $z, w \in H$ y la igualdad se da en alguna pareja de puntos $z \neq w$ si y sólo si f es biholomorfa.
- $\frac{|f'(z)|}{\Im f(z)} \leq \frac{1}{\Im z}$ para todo $z \in H$ y la igualdad se da en algún punto z si y sólo si f es biholomorfa.

Sugerencia: Considera la transformación $h_w = \frac{z-w}{z-\bar{w}}$ y aplica el lema de Schwarz a $h_{f(w)} \circ f \circ h_w^{-1}$.

Ejercicio 16. Sea $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y acotada. Demuestra que

$$p_V(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} V(t) dt$$

representa una función armónica en el semiplano superior H .

Sugerencia: Considera la integral de Poisson P_U para $U = V \circ h_i^{-1}$ (ver ejercicio 15) y demuestra que $P_U \circ h_i = p_V$.

Ejercicio 17.

- Muestra que la fórmula del valor medio es válida para la función armónica $u = \log |1+z|$, con $z_0 = 0, r = 1$.
- Calcula

$$\int_0^\pi \log \operatorname{sen} \theta \, d\theta$$

Ejercicio 18. Determina todas las parejas de funciones enteras f, g que satisfacen $f^2 + g^2 = 1$.

Ejercicio 19. Sea f holomorfa en una vecindad del origen tal que $f(0) = 0$. Demuestra que para cualquier $m \in \mathbb{N}$ hay una vecindad del origen U y una función holomorfa $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ que satisface $g(z)^m = f(z^m)$.

Ejercicio 20. Clasifica las singularidades de las siguientes funciones. En el caso de polos dar su orden

1. $\frac{z^2}{(z^4 + 16)^2}$
2. $\frac{1 - \cos z}{\operatorname{sen} z}$
3. $\frac{e^z - z + 1}{z^2 - \pi^2}$
4. $\frac{\operatorname{sen}^2 z}{1}$
5. $\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z - 2\pi i}$
6. $\frac{1}{\cos(1/z)}$

Ejercicio 21. Desarrolla las siguientes funciones en series de Laurent en los anillos indicados

1. $f(z) = \frac{4z - z^2}{(z^2 - 4)(z + 1)}$ en $A_{1,2}(0), A_{2,\infty}(0), A_{0,1}(-1)$
2. $f(z) = (z - c)^{-n}, n \in \mathbb{N}, c \neq 0$ en $A_{|c|,\infty}(0), \mathbb{C} - \{c\}$
3. $f(z) = \frac{1}{(z + 2)^2(z^2 - 9)}$ en $A_{2,3}(0), A_{3,\infty}(0), A_{0,1}(-2)$
4. $f(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{z}{z - 1}\right)$ en $\mathbb{C} - \{1\}$
5. $f(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{z - 1}{z}\right)$ en $\mathbb{C} - \{0\}$
6. $f(z) = \exp(-1/z)$ en $\mathbb{C} - \{0\}$

Ejercicio 22. Determina el anillo de convergencia de las series de Laurent

1. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{|n|!}$
2. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z - 1)^n}{n^2 + 1}$
3. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n (z - b)^n, a \neq 0, b \in \mathbb{C}$
4. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z - 3)^n}{(n^2 + 1)^n}$

Ejercicio 23. Sea $f : A_{r,s}(0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y sea $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ su representación de Laurent. Pruebe que f es par si y sólo si $a_n = 0$ para todo n impar y que f es impar si y sólo si $a_n = 0$ para todo n par.

Ejercicio 24. Para las siguientes funciones clasifica la singularidad en el origen y determina la parte singular del desarrollo de Laurent

1. $\frac{\operatorname{sen} z}{z^n}, n \in \mathbb{N}$

2. $\frac{z}{(z+1)\operatorname{sen}(z^n)}$
3. $\cos(1/z)\operatorname{sen}(1/z)$
4. $(1-z^{-n})^{-k}$, $n, k \in \mathbb{N}$

Ejercicio 25. Determina el número de ceros (contados tantas veces como su orden) de los polinomios dados en los dominios indicados.

1. $z^5 + 3z^4 + 9z^3 + 10$ en $B_1(0)$ y $B_2(0)$
2. $9z^5 + 5z - 3$ en $A_{\frac{1}{2},1}(0)$
3. $z^8 + z^7 + 4z^2 - 1$ en $B_1(0)$ y $B_2(0)$

Ejercicio 26. Muestra que

1. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a + \operatorname{sen}^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{a(a+1)}}$, $a > 0$
2. $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{x^4 + 6x^2 + 13} = \frac{\pi 2^{-3/2}}{\sqrt{3 + \sqrt{13}}}$
3. $\int_0^\infty \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx = \frac{5\pi}{12}$
4. $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{\pi}{16a^3}$, $a > 0$
5. $\int_0^\infty \frac{\cos x dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2ae^a}$, $a > 0$
6. $\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} x dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2e^a}$, $a > 0$
7. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi(1 - e^{-a})}{4a}$, $a > 0$. Qué pasa cuando $a = 0$?
8. $\int_0^\infty \frac{\log x dx}{1 + x^2} = 0$
9. $\int_0^\infty \frac{\log x dx}{(1 + x^2)^2} = -\frac{\pi}{4}$
10. $\int_0^\infty \frac{\log(1 + x^2) dx}{x^{1+b}} = \frac{\pi}{b \operatorname{sen}(\pi b/2)}$, $0 < b < 2$.
Sugerencia: Realiza primero una integración por partes.
11. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^b(1+x)} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi b)}$, $0 < b < 1$

Ejercicio 27. Demuestra que

1. $\sum_{n=-\infty}^\infty \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$
2. $\sum_{n=-\infty}^\infty \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{\pi}{\operatorname{senh} \pi}$
3. $\sum_{n=-\infty}^\infty \frac{1}{(n+a)^2} = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi a}$, a no es entero.