EJERCICIOS VARIABLE COMPLEJA I

Ejercicio 1. Muestra que

$$|\cos z|^2 = \sinh^2 y + \cos^2 x = \cosh^2 y - \sin^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2y + \cos 2x),$$
$$|\sin z|^2 = \sinh^2 y + \sin^2 x = \cosh^2 y - \cos^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2y - \cos 2x).$$

Ejercicio 2. Encuentra todos los ceros y periodos de $\cosh z$ y $\sinh z$.

Ejercicio 3. Describe la superficie de Riemann de $\arctan z$

Ejercicio 4. Encuentra el polinomio armónico mas general de la forma $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$. Determina la función armónica conjugada y la correspondiente función holomorfa.

Ejercicio 5. Para una región Ω definimos $\bar{\Omega} = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in \Omega\}$. Muestra que
(a) $f(z)$ es holomorfa en Ω si y sólo si $\overline{f(\bar{z})}$ es holomorfa en $\bar{\Omega}$
(b) $u(z)$ es armónica en Ω si y sólo si $u(\bar{z})$ es armónica en $\bar{\Omega}$

Ejercicio 6. Dá una definición precisa de una rama holomorfa, en una region apropiada, de
(a) $\sqrt{1+z} + \sqrt{1-z}$
(b) $\log \log z$

Ejercicio 7. Supón que $f(z)$ es holomorfa en una región Ω y satisface la condición $|f(z)^2 - 1| < 1$. Muestra que ó bien $\operatorname{Re} f(z) > 0$ $\forall z \in \Omega$ ó bien $\operatorname{Re} f(z) < 0$ $\forall z \in \Omega$.

Resuelve los siguientes 2 ejercicios sin utilizar las derivadas $\dfrac{\partial}{\partial z}, \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

Ejercicio 8. Dadas $g, h : \Omega \to \mathbb{C}$ diferenciables se define

$$D_\Omega(g,h) = \int_\Omega \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial \bar{h}}{\partial y}.$$

Muestra que si $f : U \to \Omega$ es una biyección holomorfa entonces $D_\Omega(g,h) = D_U(g \circ f, h \circ f)$.

Ejercicio 9. Muestra que si $h : \Omega \to \mathbb{C}$ es armónica y también $zh(z)$ es armónica entonces h es holomorfa.

Ejercicio 10. Muestra que en coordenadas polares

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Aquí si puedes utilizar las derivadas $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

Ejercicio 11. Muestra que cualquier transformación de Möbius que lleva el eje real en si mismo puede escribirse con coeficientes reales.

Ejercicio 12. Muestra que cualesquiera 4 puntos distintos puede llevarse bajo una transformación de Möbius en los puntos $1, -1, k, -k$ donde k depende de los 4 puntos dados. ¿Cuántas soluciones hay?

Ejercicio 13. Se dice que los puntos z y z^* de $\mathbb{C} \cup \infty$ son simétricos respecto a la circunferencia o recta C que pasa por z_0, z_1, z_2 si

$$(z^*, z_0, z_1, z_2) = \overline{(z, z_0, z_1, z_2)}.$$

La transformación que lleva z en su simétrico z^* se llama *reflexión* (respecto a C)

(a) Si C es una recta podemos tomar $z_2 = \infty$. ¿Qué es lo que hace la reflexión con respecto a C?. Es obvio cuando C es la recta real.
(b) Muestra que si T es una transformación de Möbius y z, z^* son simétricos respecto a C entonces $T(z), T(z^*)$ son simétricos respecto a $T(C)$.
(c) Sea C la circunferencia con centro en a y radio R. Con $z_0, z_1, z_2 \in C$, usando $\overline{(z, z_0, z_1, z_2)} = (\bar{z}, \bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2)$ y la transformación $T(z) = a + R^2/(z - \bar{a})$ muestra que puntos z, z^* simétricos respecto a C satisfacen

$$(z^* - a)\overline{(z - a)} = R^2.$$

Nota que esto dice que los puntos a, z, z^* son colineales.
(d) Obtén la reflexión del eje imaginario, la recta $x = y$, y la circunferencia $|z| = 1$ respecto a la circunferencia $|z - 2| = 1$.

Ejercicio 14. Encuentra la transformación de Möbius que lleva la circunferencia $|z| = 2$ en $|w + 1| = 1$, el punto -2 en el origen y el origen en i.

Ejercicio 15. Encuentra la transformación de Möbius más general que lleva la circunferencia $|z| = R$ en si misma.

Ejercicio 16. Encuentra una transformación de Möbius que lleve
(a) $|z| = 1$ y $|z - \frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$ en circunferencias concéntricas.
(b) $|z| = 1$ y $x = 2$ en circunferencias concéntricas.

En los siguientes ejercicios encuentra una transformación conforme biyectiva

Ejercicio 17. De la parte común de los discos $|z| < 1$ y $|z-1| < 1$ en la región entre $|w - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ y $|w| = 1$

Ejercicio 18. Del complemento del arco $|z| = 1$, $y \geq 0$ en $|w| > 1$ de manera que el ∞ vaya en si mismo.

Ejercicio 19. De la región a la izquierda de la parábola $y^2 = 2px$ en el disco unitario.

Ejercicio 20. De la región a la derecha de la rama derecha de la hipérbola $x^2 - y^2 = a^2$ en el disco unitario.

Ejercicio 21. De $(x/a)^2 + (y/b)^2 > 1$ en el disco unitario.