1. Ecuaciones de primer orden

Ejercicio 1. Encuentre la solución general de la ecuación diferencial dada

$$\frac{dy}{dt} + y \cos t = 0 \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} + y\sqrt{t} \sin t = 0 \tag{2}$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{2t}{1+t^2} y = \frac{1}{1+t^2} \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dt} + y = te^t \tag{4}$$

$$\frac{dy}{dt} + t^2 y = 1 \tag{5}$$

$$\frac{dy}{dt} + t^2 y = t^2 \tag{6}$$

$$(1+t^2)\frac{dy}{dt} + ty = (1+t^2)^{5/2} \tag{7}$$

Ejercicio 2. Encuentre la solución al problema con valor inicial dado

$$\frac{dy}{dt} + \sqrt{1+t^2} e^{-t} y = 0, \quad y(0) = 1 \tag{8}$$

$$\frac{dy}{dt} + \sqrt{1+t^2} e^{-t} y = 0, \quad y(0) = 0 \tag{9}$$

$$\frac{dy}{dt} - 2ty = t, \quad y(0) = 1 \tag{10}$$

$$\frac{dy}{dt} + ty = 1 + t, \quad y(\frac{3}{2}) = 0 \tag{11}$$

$$\frac{dy}{dt} + y = \frac{1}{1+t^2}, \quad y(1) = 2 \tag{12}$$

$$\frac{dy}{dt} - 2ty = 1, \quad y(0) = 1 \tag{13}$$

$$(1+t^2)\frac{dy}{dt} + 4ty = t, \quad y(1) = \frac{1}{4} \tag{14}$$

Ejercicio 3. Encuentre una solución continua al problema de valor inicial

$$y' + y = g(t), \quad y(0) = 0, \quad g(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Si $a, c > 0$ y b es cualquier número, muestre que todas las soluciones de la ecuación

$$\frac{dy}{dt} + ay = be^{-ct}$$

tienden a cero cuando t tiende a infinito.

Ejercicio 5. Suponga que $a(t), f(t)$ son funciones continuas en el intervalo $-\infty < t < \infty$ y que $a(t) \geq c > 0$ y $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$. Muestre que todas las soluciones de la ecuación

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = f(t)$$

tienden a cero cuando t tiende a infinito.

Ejercicio 6. Determine el comportamiento de las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales cuando $t \to a$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{t} = \frac{1}{t^2}, \quad a = 0 \tag{15}$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{t} = \cos t + \frac{\sin t}{t}, \quad a = 0 \tag{16}$$

$$\frac{dy}{dt} + y \tan t = \sin t \cos t, \quad a = \pi/2 \tag{17}$$

Ejercicio 7. Enuentre la solución general de la ecuación diferencial dada

$$(1+t^2)\frac{dy}{dt} = 1+y^2. \quad \textit{Sugerencia} \quad \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \tag{18}$$

$$\frac{dy}{dt} = (1+t)(1+y) \tag{19}$$

$$\frac{dy}{dt} = e^{t+y+3} \tag{20}$$

$$\frac{dy}{dt} = 1 - t + y^2 - ty^2 \tag{21}$$

$$\cos y \sin t \frac{dy}{dt} = \sin y \cos t \tag{22}$$

Ejercicio 8. Encuentre la solución al problema con valor inicial dado y determine el intervalo de existencia de la solución

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2t}{y+yt^2}, \quad y(2) = 3 \tag{23}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3t^2+4t+2}{2(y-1)}, \quad y(0) = 1 \tag{24}$$

$$\cos y \frac{dy}{dt} = \frac{-t\sin y}{1+t^2}, \quad y(1) = \pi/2 \tag{25}$$

$$\frac{dy}{dt} = k(a-y)(b-y), \quad y(0) = 0, a, b > 0 \tag{26}$$

$$3t\frac{dy}{dt} = y\cos t, \quad y(1) = 0 \tag{27}$$

$$t\frac{dy}{dt} = y + \sqrt{t^2+y^2}, \quad y(1) = 0 \tag{28}$$

Ejercicio 9. Enuentre la solución general de la ecuación diferencial dada

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y^3+t^3}{yt^2+y^3} \tag{29}$$

$$2ty\frac{dy}{dt} = 3y^2 - t^2 \tag{30}$$

$$(t - \sqrt{ty})\frac{dy}{dt} = y \tag{31}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t+y}{t-y} \tag{32}$$

$$e^{t/y}(y-t)\frac{dy}{dt} + y(1+e^{t/y}) = 0 \tag{33}$$

Sugerencia: $\int \frac{v-1}{ve^{-1/v}+v^2}dv = \ln(1+ve^{1/v})$.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t+y+1}{t-y+3} \tag{34}$$

$$(t+2y+3) + (2t+4y-1)\frac{dy}{dt} = 0 \tag{35}$$

Ejercicio 10.

- Sean t_0, t_1, t_2 tres tiempos tales que $t_1 - t_0 = t_2 - t_1$. Muestre que la ecuacion
$$p(t) = \frac{ap_0}{bp_0 + (a - bp_0)e^{-a(t-t_0)}}$$
determina univocamente los valores de a y b en términos de $t_i, p(t_i)$, $i = 0, 1, 2$.
- Si la población $p(t)$ crece de acuerdo a la ley logística y t^* es el tiempo al cual se alcanza la mitad de la población límite, muestre que
$$p(t) = \frac{a/b}{1 + e^{-a(t-t^*)}}$$

Ejercicio 11. Si se desprecia la emigración, atentados terroristas, etc, la población de la ciudad de Nueva York satisface la ley logística
$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{25}p - \frac{1}{25 \cdot 10^6}p^2$$
donde t se mide en años

- Modifique esta ecuación para tomar en cuenta que 9000 gentes al año se mudan fuera de la ciudad y 1000 gentes al año son asesinadas
- Suponga que la población de la ciudad de Nueva York era de 8 millones en 1970. Encuentre la población para todo tiempo futuro. Que ocurrirá cuando $t \to \infty$.

Ejercicio 12. Podemos modelar una población que resulte suceptible a las espidemias de la siguiente manera: supongamos que nuestra población está originalmente gobernada por laley logística
$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2 \tag{36}$$
y que la epidemia ataca cuando p alcanza un cierto valor Q, donde Q es menor que el límite de la población $\frac{a}{b}$. En este período los coeficientes vitales se convierten en $A < a, B < b$ y la ecuación (36) se reemplaza por la ecuación:
$$\frac{dp}{dt} = Ap - Bp^2 \tag{37}$$
Supóngase que $Q > \frac{A}{B}$. La población empieza entonces a decrecer y llega un momento en que alcanza un cierto valor $q > \frac{A}{B}$. En ese momento la epidemia cesa y la población empieza a crecer de acuerdo a la

ecuación (36) hasta la incidencia de una nueva epidemia. De esta manera hay fluctuaciones periódicas de p entre q y Q. Ahora indicaremos cómo calcular el periódo T de estas fluctuaciones.

- Mostrar que el tiempo T_1 tomado como la primera parte del ciclo, cuando p crece desde q hasta Q está dado por:
$$T_1 = \frac{1}{a} \ln \frac{Q(a - bq)}{q(a - bQ)}$$
- Mostrar que el tiempo T_2 tomado como la segunda parte del ciclo, cuando p decrece desde Q a q está dado por
$$T_2 = \frac{1}{A} \ln \frac{q(QB - A)}{Q(qB - A)}$$
y entonces el tiempo para el cilo total es $T_1 + T_2$.

Ejercicio 13. Se ha observado que las plagas aparecen en poblaciones de ratones, cuando la población crece demasiado. Aún más, un incremento local en la densidad atrae depredadores en gran número. Estos dos factores lograrán destruir el $97 - 98\%$ de una población de pequeños roedores en dos o tres semanas, y entonces la densidad cae al nivel en donde la enfermedad no se puede extender. La población reducida a un 2% de su máximo, encuentra suficiente espacio para los roedores y comida abundante. Por lo tanto la población empieza a crecer nuevamente hasta alcanzar un nivel favorable para otra ola de enfermedades y depredación. La velocidad de reproducción en el ratón es tan grande que podemos tomar $b = 0$ en la ecuación (36) del ejercicio 12. En lasegunda parte del ciclo, por el contrario A es muy pequeña en comparación con B, y puede ser ignorada en la ecuación (37).

- bajo estas suposiciones, demostrar que:
$$T_1 = \frac{1}{a} \ln \frac{Q}{q}, T_2 = \frac{Q - q}{qQB}$$
- Suponiendo que T_1 es aproximadamente cuatro años, y Q/q es aproximadamente 50, demostrar que a es aproximadamente 1.

Ejercicio 14. Un paracaidista cae desde el reposo hacia la tierra. El peso combinado del hombre y el paracaidas es de 80 kilos. Cuando el paracaídas esta cerrado la resistencia del aire es igual a $v/2$.

A. Suponga que el paracaídas tarda 5 segundos en abrirse y entonces la resistencia del aire es igual a $v^2/2$. Encuentre la velocidad $v(t)$ del paracaidista. después que el paracaídas se abre.
B. Suponga que el paracaídas tarda 10 segundos en abrirse y entonces la resistencia del aire es igual a $10v$. Encuentre la velocidad $v(t)$ del paracaidista. después que el paracaídas se abre.

Ejercicio 15. Un objeto de masa m se lanza verticalmente hacia abajo con una velocidad inicial v_0 en un medio que ofrece una resistencia igual a $c\sqrt{v}$.

A. Encuentre la relación entre la velocidad v y el tiempo t.
B. Encuentre la velocidad terminal. *Observación:* No es necesario despejar $v(t)$ para encontrarla.

Ejercicio 16. Un objeto de masa m se lanza verticalmente hacia arriba desde la superficie de la tierra, con una velocidad inicial V_0. Consideraremos que el eje y es positivo hacia arriba, con el origen en la superficie de la tierra. Despreciando la resistencia del aire pero tomando en cuenta la variación con la altura del campo gravitacional de la tierra tenemos que

$$m\frac{dV}{dt} = -\frac{mgR^2}{(y+R)^2}$$

donde R es el radio de la tierra.

A. Sea $V(t) = v(y(t))$. Encuentre al ecuación diferencial que satisface $v(y)$.
B. Encuentre la velocidad incial V_0 más pequeña para la cual el cuerpo no regresa a la tierra (llamada velocidad de escape). *Sugerencia:* Se requiere que $v(y)$ permanezca siempre positivo para que el cuerpo no regrese.

Ejercicio 17. Enuentre la solución general de la ecuación diferencial dada

$$2t\sin y + y^3e^t + (t^2\cos y + 3y^2e^t)\frac{dy}{dt} = 0 \tag{38}$$

$$y\sec^2 t + \sec t\tan t + (2y + \tan t)\frac{dy}{dt} = 0 \tag{39}$$

$$\frac{y^2}{2} - 2ye^t + (y - e^t)\frac{dy}{dt} = 0 \tag{40}$$

Ejercicio 18. Resuelva el problema con valor inicial dado

$$2ty^3 + 3t^2y^2\frac{dy}{dt} = 0, \quad y(1) = 1 \tag{41}$$

$$3t^2 + 4ty + (2y + 2t^2)\frac{dy}{dt} = 0, \quad y(0) = 1 \tag{42}$$

$$(y\cos 2t - 2\sin 2t)e^{ty} + 2t + (t(\cos 2t)e^{ty} - 3)\frac{dy}{dt} = 0, y(0) = 0 \tag{43}$$

$$3ty + y^2 + (t^2 + ty)\frac{dy}{dt} = 0, \quad y(2) = 1 \tag{44}$$

Ejercicio 19. Determinar la constante a de tal manera que la ecuación sea exacta, y luego resolver la ecuación resultante.

$$t + ye^{2ty} + ate^{2ty}\frac{dy}{dt} = 0 \tag{45}$$

$$\frac{1}{t^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{at+1}{y^3}\frac{dy}{dt} = 0 \tag{46}$$

$$e^{at+y} + 3t^2y^2 + (2yt^3 + e^{at+y})\frac{dy}{dt} + 0 \tag{47}$$

Ejercicio 20. Hallar todas las funciones $f(t)$ tales que la ecuación diferencial

$$y^2 \sin t + yf(t)\frac{dy}{dt} = 0$$

sea exacta. Resolver la ecuación diferencial para esas $f(t)$.

Ejercicio 21. Mostrar que si

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial t} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M} = Q(y),$$

entonces la ecuación diferencial $M(t, y) + N(t, y)\dfrac{dy}{dt} = 0$ tiene un factor integrante $\mu(y) = e^{\int Q(y)dy}$.

Ejercicio 22. La ecuación diferencial

$$e^t \sec y - \tan y + \frac{dy}{dt} = 0$$

tiene un factor integrante de la forma $e^{-at}\cos y$ para alguna constante a. Determinar a, y resolver la ecuación diferencial.

Ejercicio 23. Un tanque contiene al tiempo $t = 0$, Q_0 kg de sal disueltos en 150 litros de agua. Suponga que una solución, de medio kg de sal por litro de agua, entra al tanque a razón de tres litros por minuto, y que la solución bien mezclada sale del tanque a la misma razón. Encuentre la concentración de sal en el tanque al tiempo t.

Ejercicio 24. Encuentre las trayectorias ortogonales a las siguientes familias

$$y = cx^2, \quad y^2 - x^2 = c, \quad y = \sin x, \quad y = ce^x, \quad y = e^c x$$

Ejercicio 25. Construya las iteradas de Picard para el problema con el valor inicial dado

$$\frac{dy}{dt} = 2t(y+1), \quad y(0) = 0 \tag{48}$$

y demuestre que converge a la solucion $y(t) = e^{t^2} - 1$

Ejercicio 26. Calcule las dos primeras iteradas de Picard para el problema con el valor inicial dado

$$\frac{dy}{dt} = y^2 + e^t, \quad y(0) = 0 \tag{49}$$

$$\frac{dy}{dt} = y^2 + t^2, \quad y(0) = 1 \tag{50}$$

Ejercicio 27. Demuestre que la solución del problema con el valor inicial dado esta definida en el intervalo dado

$$\frac{dy}{dt} = 1 + y + y^2 \cos t, \quad y(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \tag{51}$$

$$\frac{dy}{dt} = e^{-t^2} + y^2, \quad y(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \tag{52}$$

$$\frac{dy}{dt} = e^{-t^2} + y^2, \quad y(0) = 1, \quad 0 \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{1 + (1+\sqrt{2})^2} \tag{53}$$

$$\frac{dy}{dt} = y^3 + e^{-5t}, \quad y(0) = .4, \quad 0 \leq t \leq .3 \tag{54}$$

$$\frac{dy}{dt} = (4y + e^{-t^2})e^{2y}, \quad y(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{8\sqrt{e}} \tag{55}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{4}(1 + \cos 4t)y - \frac{1}{800}(1 - \cos 4t)y^2,\ y(0) = 100, 0\ \leq t \leq 1 \tag{56}$$

Ejercicio 28. Encuentre una solución no trivial del problema con el valor inicial dado

$$\frac{dy}{dt} = ty^a, \quad y(0) = 0, \quad 0 < a < 1 \tag{57}$$

$$\frac{dy}{dt} = t\sqrt{1 - y^2}, \quad y(0) = -1 \tag{58}$$

Contradice esto al teorema de existencia y unicidad?

2. Ecuaciones de segundo orden

Ejercicio 29.

- Muestre que $y_1(t) = e^{-t^2/2}$ y $y_2(t) = e^{-t^2/2} \int_0^t e^{s^2/2} ds$ son soluciones de

$$y'' + ty' + y = 0 \tag{59}$$

- Calcule el wronskiano $W[y_1, y_2](t)$ y muestre que que y_1, y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones de (59) en todo $\mathbb{R}$.
- Resuelva el problema con valores iniciales $y'' + ty' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Ejercicio 30. Sean y_1, y_2 las soluciones de la ecuación de Bessel

$$t^2 y'' + ty' + (t^2 - n^2)y = 0 \tag{60}$$

en el intervalo $(0, \infty)$ con $y_1(1) = 1$, $y_1'(1) = 0$, $y_2(1) = 0$, $y_2'(1) = 1$. Calcule $W[y_1, y_2](t)$.

Ejercicio 31. Suponga que p y q son continuas y que las fuciones y_1, y_2 son soluciones de la ecuación diferencial

$$y'' + p(t)y' + q(t) = 0 \tag{61}$$

en el intervalo (α, β).

- Pruebe que si y_1 y y_2 se anulan en el mismo punto, no pueden formar un conjunto fundamental de soluciones en (α, β).
- Pruebe que si y_1 y y_2 alcanzan un mínimo o máximo en el mismo punto, no pueden formar un conjunto fundamental de soluciones en (α, β).
- Pruebe que si y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones, no pueden tener un punto de inflexión en común a menos que p y q se anulen en ese punto.
- Pruebe que si y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones, entonces existe un único cero de y_1 entre dos ceros consecutivos de y_2. *Sugerencia:* Aplique el teorema de Rolle a y_2/y_1.
- Suponga que $W[y_1, y_2](t^*) = 0$ y que $y_1(t^*) = 0$. Pruebe que $y_1 \equiv 0$ ó $y_2(t) = y_1(t)y_2(t^*)/y_1(t^*)$ *Sugerencia:* $y_2(t^*)y_1'(t^*) = 0$.

Ejercicio 32. Sea $y(t)$ la solución del problema con valor inicial

$$y'' + 5y' + 6y = 0; \quad y(0) = 1, y'(0) = v \tag{62}$$

Para que valores de v, $y(t)$ permanece no negativa $\forall t \geq 0$?

Ejercicio 33. Resolver cada uno de los siguientes problemas con valor inicial

$$y'' + y' + 2y = 0; \quad y(0) = 1, y'(0) = -2 \tag{63}$$

$$y'' + 2y' + 5y = 0; \quad y(0) = 0, y'(0) = 2 \tag{64}$$

$$9y'' - 12y' + 4y = 0; \quad y(\pi) = 0, y'(\pi) = 2 \tag{65}$$

$$y'' + 2y' + y = 0; \quad y(2) = 1, y'(2) = -1 \tag{66}$$

Ejercicio 34. La ecuación diferencial

$$L[y] = t^2 y'' + \alpha t y' + \beta y = 0 \tag{67}$$

se conoce como ecuación de Euler.

Si $y = t^r$, entonces $t^2 y''$ y ty' son múltiplos de y. Muestre que $y = t^r$ es solución de (67) si $r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0$.

- Encuentre la solución general de

$$t^2 y'' + 5ty' - 5y = 0 \quad t > 0. \tag{68}$$

  Resuelva el problema con valores iniciales

$$t^2 y'' - ty' - 2y = 0 \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1 \tag{69}$$

  para $t > 0$.
- Sea $r_1 = \lambda + i\mu$ una raíz compleja de $r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0$. Probar que $t^{\lambda + i\mu} = t^\lambda t^{i\mu} = t^\lambda e^{(\ln t) i\mu} = t^\lambda[\cos \mu \ln t + i \sin \mu \ln t]$ es solución compleja de (67).
- Hallar la solución general de la ecuación

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + y = 0, t > 0 \tag{70}$$

- Suponiendo que $(\alpha - 1)^2 = 4\beta$, use el método de reducción del orden para mostrar que $t^{(1-\alpha)/2} \ln t$ es otra solución de (67)
- Hallar la solución general de la siguiente ecuación

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 3t\frac{dy}{dt} + y = 0 \tag{71}$$

- Dar dos soluciones linealmente independientes de $t^2 y'' - 2y = 0$ de la forma $y(t) = t^r$. Usando estas soluciones, hallar la solución general de $t^2 y'' - 2y = t^2$.

Ejercicio 35. Una solución de la ecuación (61) es $(1 + t)^2$ y el Wronskiano de cualesquiera dos soluciones es constante. Hallar la solución general de

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 1 + t \tag{72}$$

Ejercicio 36. Hallar una solución particular para cada una de las siguientes ecuaciones

$$y'' + 3y' = t^3 - 1 \tag{73}$$

$$y'' - y = t^2 e^t \tag{74}$$

$$y'' + 2y' + y = e^{-t} \tag{75}$$

$$y'' + 4y = t \sin 2t \tag{76}$$

$$y'' - 2y' + 5y = t(\cos t)^2 \tag{77}$$

$$y'' + y' - 6y = \sin t + te^{2t} \tag{78}$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^t + e^{2t} \tag{79}$$

$$y'' + y = \cos t \cos 2t \tag{80}$$

Ejercicio 37. Sea $L[y] = y'' - 2ry' + r^2 y$. Demuestre que $L[e^{rt}v(t)] = e^{rt}v''(t)$. Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' - 6y' + 9y = t^{3/2}e^{3t}. \tag{81}$$

Ejercicio 38. Un sistema resorte-masa-amortiguador con $m = 1, k = 2, c = 2$ cuelga en equilibrio. Una fuerza externa $F(t) = \pi - t$ actúa entre los tiempos $t = 0$ y $t = \pi$. Encuentre la posición de la masa para cualquier tiempo $t > \pi$.

Ejercicio 39. Una masa de 1 kg se fija a un resorte con constante $k = 4$ N/m y cuelga en equilibrio. Una fuerza externa $F(t) = 1 + t + \sin t$ N comienza a actuar al tiempo $t = 0$. Al estirarse el resorte $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$ m, se rompe. En que tiempo se rompe el resorte

Ejercicio 40. Determine una solución particular de $my'' + cy' + ky = F_0 \cos \omega t$ de la forma $\psi(t) = A\cos(\omega t - \delta)$. Muestre que la amplitud A es máxima cuando $\omega^2 = k/m - \frac{1}{2}(c/m)^2$. Que sucede cuando $k/m < \frac{1}{2}(c/m)^2$

Ejercicio 41. La ecuación

$$y'' - 2ty' + \lambda y = 0 \tag{82}$$

con λ constante, se conoce como ecuación de Hermite

- Encuentre 2 soluciones linealmente independientes de (82)
- Muestre que si $n = \lambda/2 \in \mathbb{N}$ entonces (82) tiene una solución polinomial de grado n.

Ejercicio 42. La ecuación

$$(1-t^2)y'' - 2ty' + \alpha(\alpha+1)y = 0 \tag{83}$$

con α constante, se conoce como ecuación de Legendre

- Encuentre 2 soluciones linealmente independientes de (83)
- Muestre que si $\alpha \in \mathbb{N}$ entonces (83) tiene una solución polinomial de grado α.

Ejercicio 43. La ecuación

$$(1-t^2)y'' - ty' + \alpha^2 y = 0 \tag{84}$$

con α constante, se conoce como ecuación de Tchevichev

- Encuentre 2 soluciones linealmente independientes de (84)
- Muestre que si $\alpha \in \mathbb{N}$ entonces (84) tiene una solución polinomial de grado α.

Ejercicio 44. Encuentre 2 soluciones linealmente independientes de

$$L[y] = y'' + t^3 y' + 3t^2 y = 0. \tag{85}$$

Encuentre los 5 primeros términos en el desarrollo de Taylor alrededor de $t = 0$ de la solución al problema con valores iniciales $L[y] = e^t$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

Ejercicio 45. La ecuación

$$ty'' + (1-t)y' + \lambda y = 0 \tag{86}$$

con λ constante, se conoce como ecuación de Laguerre.

- Encuentre una solución de (86) en serie de potencias.
- Muestre que si $\lambda \in \mathbb{N}$ esta solución es polinomial.

Ejercicio 46. La ecuación

$$t(1-t)y'' + [\gamma - (1+\alpha+\beta)t]y' - \alpha\beta y = 0 \tag{87}$$

con α, β, γ constantes, se conoce como ecuación hipergeométrica.

- Muestre que $t = 0$ es un punto singular regular y que las raíces de la ecuación indicial son 0 y $1-\gamma$.
- Muestre que $t = 1$ es también un punto singular regular y que las raíces de la ecuación indicial son 0 y $\gamma - \alpha - \beta$.

- Suponga que $\gamma \notin \mathbb{Z}$. Encuentre dos soluciones de (87) de las formas

$$y_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad y_2(t) = t^{1-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n.$$

Ejercicio 47. La ecuación

$$t^2 y'' + ty' + (t^2 - \nu^2) y = 0 \tag{88}$$

con $\nu > 0$, se conoce como ecuación de Bessel de orden ν.

- Encuentre una solución en serie de potencias

$$J_\nu(t) = t^\nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad a_0 = 1. \tag{89}$$

  Esta función se conoce como función de Bessel de orden ν.
- Encuentre una segunda solución de (88) si $2\nu \notin \mathbb{Z}$.

Ejercicio 48. Dado que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$, haga el cambio de variable $u = \sqrt{t}$ para calcular $\mathcal{L}\{1/\sqrt{t}\}$

Ejercicio 49. Utilice que $t^2 - st > t$ si $t > s + 1$ para demostrar que e^{t^2} no posee una transformada de Laplace.

Ejercicio 50. Utilice las propiedades de la transformada de Laplace para calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones

$$t^n, \quad t^n e^{at}, \quad t^n \sin at, \quad t^n \cos at, \quad t^n \sqrt{t}.$$

Ejercicio 51. Sea $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

- Demuestre por inducción que

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

- Suponga que $\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t}$ existe. Pruebe que

$$\mathcal{L}\Big\{\frac{f(t)}{t}\Big\} = \int_s^\infty F(u) du. \tag{90}$$

- Utilice la ecuación (90) para calcular la transformada de Laplace de las siguientesn funciones

$$\frac{\sin at}{t}, \quad \frac{\cos at - 1}{t}, \quad \frac{e^{at} - e^{bt}}{t}.$$

- Muestre que

$$f(t)t = -\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} \tag{91}$$

- Utilice la ecuación (91) para calcular la transformada de Laplace inversa de las siguientes funciones
$$\ln(\frac{s+a}{s-a}), \quad \arctan\frac{a}{s}, \quad \ln(1-\big(\frac{a}{s}\big)^2)$$

Ejercicio 52. Calcule la transformada de Laplace inversa de las siguientes funciones

$$\frac{s}{(s+a)^2+b^2}, \qquad \frac{s^2-5}{s^3+4s^2+3s},$$
$$\frac{1}{s(s^2+4)}, \qquad \frac{s}{s^2-3s-12},$$
$$\frac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}, \qquad \frac{3s}{(s+1)^2}$$

Ejercicio 53. Utilice transformadas de Laplace para resolver los siguientes problemas con valores iniciales

$$y''+y=\sin t; \quad y(0)=1, y'(0)=2 \tag{92}$$

$$y''+y=t\sin t; \quad y(0)=1, y'(0)=2 \tag{93}$$

$$y''-2y'+y=te^t; \quad y(0)=0, y'(0)=0 \tag{94}$$

$$y''-2y'+7y=\sin t; \quad y(0)=0, y'(0)=0 \tag{95}$$

$$y''+y'+y=1+e^{-t}; \quad y(0)=3, y'(0)=-5 \tag{96}$$

$$y''+y=\begin{cases}2, & 0\le t\le 3\\ 3t-7, & 3<t<\infty\end{cases}; \quad y(0)=0, y'(0)=0 \tag{97}$$

$$y'''-6y''+11y'-6y=e^{4t}; \quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0 \tag{98}$$

$$y''+2y'+y=2(t-3)H_3(t); \quad y(0)=2, y'(0)=1 \tag{99}$$

$$y''+4y=1-H_4(t); \quad y(0)=3, y'(0)=2 \tag{100}$$

$$y''+y=\cos t(1-H_{\pi/2}(t)); \quad y(0)=3, y'(0)=-1 \tag{101}$$

$$y''+y'+7y=t*1-H_2(t)); \quad y(0)=0, y'(0)=0 \tag{102}$$

$$y''-2y'+y=\begin{cases}0, & 0\le t<1\\ t, & 1\le t<2\\ 0, & 2\le t<\infty\end{cases}; \quad y(0)=1, y'(0)=2 \tag{103}$$

3. Sistemas de ecuaciones diferenciales

Ejercicio 54. Encuentre la solución al problema de valores iniciales $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ y dibuje el retrato fase del sistema para las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 9 & 18 \\ 5 & 10 & 15 & 30 \\ 7 & 14 & 21 & 42 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 55.

- Muestre que los valores propios de A^{-1} son los reciprocos de los valores propios de A.
- Muestre que los valores propios de A^n son las potencias $n-$ésimas de A.
- Muestre mediante un ejemplo, que los valores propios de $A+B$ no son necesariamente la suma de valores propios de A y de B.
- Muestre mediante un ejemplo, que los valores propios de AB no son necesariamente el producto de valores propios de A y de B.
- Muestre que A y TAT^{-1} tienen el mismo polinomio característico
- Suponga que A o B es invertible. Demuestre que AB y BA tienen los mismos valores propios.

Ejercicio 56. Encuentre la solución al problema de valores iniciales $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ y dibuje el retrato fase del sistema para las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 57. Determine los vectores $\boldsymbol{x}_0$ para los que la solución al problema de valores iniciales $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ es una función periódica.

Ejercicio 58. Encuentre la solución al problema de valores iniciales $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ y dibuje el retrato fase del sistema para las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 10 & 9 & 1 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 59. Use el método de variación de parámetros para resolver el problema de valores iniciales $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t)$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} 4e^t \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \tan t \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 60.

- Considere la ecuación escalar de orden n

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(t) \tag{104}$$

Sea $v(t)$ la solución a $L[y] = 0$ que satisface $y(0) = \cdots = y^{(n-2)} = 0, y^{(n-1)} = 1$. Muestre $y(t) = \int_0^t v(t-s)f(s)$ es la solución (104) que satisface $y(0) = \cdots = y^{(n-1)} = 0$.

Sugerencia: Convierta la ecuación $L[y] = 0$ a un sistema $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ y muestre que la n-ésima columna de e^{tA} es $\begin{pmatrix} v(t) \\ v'(t) \\ \vdots \\ v^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$.

- Encuentre la solucion al problema de valores iniciales

$$y''' + y' = \sec t \tan t, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$

Ejercicio 61. Encuentre la solución al problema de valores iniciales $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t)$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ para

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 3e^t \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t, \qquad \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} 4e^t \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} 1 - H_\pi(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t, \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 62. Encuentre todos los puntos de equilibrio del sistema de ecuaciones diferenciales dado y determine, si es posible, si ellos son estables o inestables

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -bxy + c \\ bxy - cy \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x^2 - 2xy \\ 2y - 2y^2 - 3xy \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x^3 - y^2 \\ 2y - y^5 - yx^4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan(x+y) \\ x + x^3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 3x^2 \\ x - 3y^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - bxy \\ -cy + dxy \\ z + x^2 + y^2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - y - e^x \\ x^2 + y(e^x - 1) \\ x + \sin z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y^2 \\ x^2 - y \\ e^z - 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} gz - hx \\ c(a+bx)^{-1} - ky \\ ey - fz \end{pmatrix}, \; egc = 0$$