

# Notas para un curso de Geometría Diferencial

Héctor Sánchez Morgado

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM, CIUDAD UNIVERSITARIA  
C. P. 04510, CD. DE MÉXICO, MÉXICO.



## Índice General

Capítulo 1. Variedades diferenciables.	5
1. Variedades diferenciables.	5
2. El espacio tangente	8
3. El teorema del rango, inmersiones y encajes	10
4. Variedades con frontera	14
Capítulo 2. Haces vectoriales	17
1. Haces vectoriales y sus transformaciones	17
2. Orientabilidad	20
3. Algebra multilineal, operaciones con haces	22
4. Campos vectoriales y flujos	25
5. La derivada de Lie	27
6. Conexiones. Transporte paralelo. Geodésicas	31
Capítulo 3. Formas diferenciales	37
1. El algebra exterior	37
2. Formas diferenciales	40
3. Cohomología de de Rham	44
4. Integración en cadenas	46
5. Integración en variedades	49
Capítulo 4. Curvatura	55
1. Curvatura	55
2. Campos de Jacobi. Puntos conjugados	60
3. La primera y segunda variaciones de la acción	63
Problemas	69
Bibliografía	79



## CAPÍTULO 1

### Variedades diferenciables.

#### 1. Variedades diferenciables.

DEFINICIÓN 1.1. Un *espacio localmente euclidiano* de dimensión  $d$  es un espacio  $M$  de Hausdorff tal que cada punto tiene una vecindad homeomorfa a un abierto de  $\mathbb{R}^d$ . Si  $U \subset M$  es abierto y  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  es un homeomorfismo sobre un abierto de  $\mathbb{R}^d$ , la pareja  $(U, \varphi)$  se llama *carta de coordenadas*. Dos cartas  $(U, \varphi), (V, \psi)$  se llaman  *$C^k$  compatibles* si  $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \mathbb{R}^d, \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \mathbb{R}^d$  son de clase  $C^k$ .

OBSERVACIÓN 1.1. Un espacio localmente euclidiano es localmente compacto.

DEFINICIÓN 1.2. Sea  $M$  un espacio localmente euclidiano

- (1) Un *atlas*  $\mathcal{A}$  de clase  $C^k$  en  $M$  es una colección de cartas de coordenadas cuyos dominios cubren  $M$  y cualesquiera dos de ellas son  $C^k$  compatibles.
- (2) Una *estructura diferenciable* es un atlas maximal  $\mathcal{A}$ , o sea que si la carta  $(U, \varphi)$  es  $C^k$  compatible con todas las cartas de  $\mathcal{A}$ , entonces  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ .

OBSERVACIÓN 1.2. Si  $\mathcal{A}$  es un atlas, podemos agregar todas las cartas  $(U, \varphi)$  que son  $C^k$  compatibles con todas las cartas de  $\mathcal{A}$  para formar una estructura diferenciable  $\mathcal{A}_0$  de clase  $C^k$ .

DEFINICIÓN 1.3. Una *variedad diferenciable* de dimensión  $d$  y clase  $C^k$  es un espacio localmente euclidiano  $M$  con base numerable junto con una estructura diferenciable  $\mathcal{A}$  de clase  $C^k$ .

EJEMPLO 1.1.

- (1)  $U$  abierto de  $\mathbb{R}^d$  con la estructura diferenciable determinada por la carta identidad  $(U, I)$ .
- (2) Sean  $(M, \mathcal{A})$  variedad diferenciable y  $W \subset M$  abierto, entonces  $(W, \mathcal{A}_W)$  con  $\mathcal{A}_W = \{(U, \varphi) \in \mathcal{A} : U \subset W\}$  es una variedad diferenciable de la misma dimensión.
- (3) El conjunto  $M_n$  de matrices reales  $n \times n$  junto con una identificación  $\varphi : M_n \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$  determinan una estructura diferenciable

en  $M_n$ . El grupo lineal de matrices invertibles  $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$  es un abierto.

- (4) Sean  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$  y  $\pi_{\pm} : S^n \setminus \{p_{\pm}\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  las proyecciones estereográficas desde los polos  $p_{\pm} = (0, \dots, 0, \pm 1)$ . Entonces  $\{(S^n \setminus \{p_+\}, \pi_+), (S^n \setminus \{p_-\}, \pi_-)\}$  determina una estructura diferenciable.
- (5) Sean  $(M, \mathcal{A}), (N, \mathcal{B})$  variedades diferenciables de dimensiones  $m, n$ , la colección de cartas coordenadas  $(U \times V, \varphi \times \psi)$  con  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}, (V, \psi) \in \mathcal{B}$  determina una estructura diferenciable de dimensión  $m + n$  en  $M \times N$

DEFINICIÓN 1.4. Sean  $(M, \mathcal{A}), (N, \mathcal{B})$  variedades de clase  $C^k$ ,  $W \subset M$  abierto.

- La función  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$  se llama *diferenciable de clase  $C^k$*  y escribimos  $f \in C^k(W)$ , si  $f \circ \varphi^{-1}$  es de clase  $C^k$  para toda  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ . Para  $f \in C^\infty(M)$  definimos

$$\text{soporte } f = \overline{\{x \in M : f(x) \neq 0\}}.$$

- La transformación continua  $F : M \rightarrow N$  se llama *diferenciable de clase  $C^k$*  y escribimos  $F \in C^k(M, N)$ , si  $g \circ F \in C^k(F^{-1}(V))$  para toda  $g \in C^k(V)$ ,  $V$  abierto de  $N$ .

DEFINICIÓN 1.5.

- Una colección  $\{U_\alpha\}$  de subconjuntos (abiertos) de  $M$  es una *cubierta (abierto)* de  $W \subset M$  si  $W \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$ .
- Un *refinamiento* de la cubierta  $\{U_\alpha\}$ , es una cubierta  $\{V_\beta\}$  tal que  $\forall \beta \exists \alpha$  tal que  $V_\beta \subset U_\alpha$ .
- Una colección  $\{A_\alpha\}$  es *localmente finita* si  $\forall m \in M \exists W_m$  vecindad de  $m$  tal que  $\{\alpha : W_m \cap A_\alpha \neq \emptyset\}$  es finito.
- $M$  es *paracompacto* si toda cubierta abierta de  $M$  tiene un refinamiento localmente finito.
- Una *partición de la unidad* en una variedad diferenciable  $M$  es una colección  $\{\varphi_\alpha\} \subset C^\infty(M)$  tal que
  - (1)  $\{\text{soporte } \varphi_\alpha\}$  es localmente finita
  - (2)  $\varphi_\alpha \geq 0, \sum_\alpha \varphi_\alpha \equiv 1$
- Se dice que  $\{\varphi_\alpha\}$  está subordinada a  $\{U_\beta\}$  si  $\forall \alpha \exists \beta$  tal que  $\text{soporte } \varphi_\alpha \subset U_\beta$ .

LEMA 1.1. *Sea  $M$  Hausdorff, localmente compacto con base numerable. Entonces toda cubierta abierta tiene un refinamiento numerable localmente finito consistente de abiertos con cerradura compacta.*

**Demostración.** Existe una cubierta numerable  $\{G_k\}$  de abiertos con  $\overline{G}_k$  compacto tal que  $\overline{G}_k \subset G_{k+1}$ . En efecto, sea  $\mathcal{A}$  una base numerable y sea  $\{U_k\}$  la subcolección que consiste de los elementos

con cerradura compacta. Como  $M$  es Hausdorff, localmente compacto,  $\{U_k\}$  es una base. Sea  $G_1 = U_1$  y supongamos que  $G_k = U_1 \cup \dots \cup U_{j_k}$ . Sea

$$j_{k+1} = \min\{m > j_k : \overline{G}_k \subset U_1 \cup \dots \cup U_m\}$$

y definamos

$$G_{k+1} = U_1 \cup \dots \cup U_{j_{k+1}}.$$

Sea  $\{V_\alpha\}$  una cubierta abierta arbitraria. Para  $k \geq 3$ ,  $\overline{G}_k - G_{k-1}$  es compacto y esta contenido en  $G_{k+1} \setminus \overline{G}_{k-2}$ . Tomemos una subcubierta finita de la cubierta  $\{V_\alpha \cap (G_{k+1} \setminus \overline{G}_{k-2})\}$  de  $\overline{G}_k - G_{k-1}$ . Escojamos también una subcubierta finita de la cubierta  $\{V_\alpha \cap G_3\}$  de  $\overline{G}_2$ . La unión de estas subcubiertas finitas es la subcubierta deseada.  $\square$

LEMA 1.2. *Existe  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  tal que  $0 \leq \varphi \leq 1$ ,  $\varphi = 1$  en  $\overline{C(1)}$ ,  $\varphi = 0$  en  $\mathbb{R}^d \setminus C(2)$ , donde  $C(r) = (-r, r)^d$ .*

TEOREMA 1.1. *Particiones de la Unidad. Sean  $M$  variedad  $C^\infty$  y  $\{U_\alpha\}$  cubierta abierta. Existe una partición numerable de la unidad  $\{\varphi_k\}$  con soporte  $\varphi_k$  compacto, subordinada a  $\{U_\alpha\}$ . Existe una partición de la unidad  $\{\varphi_\alpha\}$  con una cantidad a lo más numerable de elementos no nulos y soporte  $\varphi_\alpha \subset U_\alpha \forall \alpha$ .*

**Demostración.** Sea  $\varphi$  como en Lema 1.2. Sea  $\{G_k\}$  como en el Lema 1.1,  $G_0 = \emptyset$ . Para  $p \in M$  sea  $k_p = \max\{k : p \notin \overline{G}_k\}$ . Escojamos  $\alpha(p)$  tal que  $p \in U_{\alpha(p)}$  y  $(V, \tau)$  carta tal que

$$\tau(p) = 0, \overline{C(2)} \subset \tau(V), V \subset U_{\alpha(p)} \cap (G_{k_p+2} \setminus \overline{G}_{k_p})$$

Definamos  $\psi_p = \varphi \circ \tau$  en  $V$ , cero afuera de  $V$ . Así  $\psi_p = 1$  en un abierto  $W_p$  y soporte  $\psi_p \subset V$ . Para cada  $k$  escojamos un subconjunto finito  $F_k$  de  $\overline{G}_k \setminus G_{k-1}$  tal que  $\{W_p : p \in F_k\}$  es una cubierta de  $\overline{G}_k \setminus G_{k-1}$ . Así  $\{W_p : p \in F_k, k \in \mathbb{N}\}$  es una cubierta numerable de  $M$ . Ordenemos  $\{\psi_p : p \in F_k, k \in \mathbb{N}\}$  en una sucesión  $\{\psi_i\}$ . La colección  $\{\text{soporte } \psi_i\}$  es localmente finita. Sea  $\psi = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i$ , entonces  $\psi(p) > 0 \forall p \in M$ . Definimos  $\varphi_i = \psi_i / \psi$ .

Para cada  $i$  escogemos  $\alpha(i)$  tal que soporte  $\varphi_i \subset U_{\alpha(i)}$ . Sea  $\phi_\alpha = \sum_{\alpha(i)=\alpha} \varphi_i$ , entonces soporte  $\phi_\alpha \subset \bigcup_{\alpha(i)=\alpha} \text{soporte } \varphi_i$ .

Sea  $x \in M$ , entonces hay una vecindad  $W_x$  de  $x$  tal que

$$\{i : \text{soporte } \varphi_i \cap W_x \neq \emptyset\} = \{i_1, \dots, i_r\}$$

Si soporte  $\phi_\alpha \cap W_x \neq \emptyset$ ,  $\alpha = \alpha(i_j)$  para algún  $j = 1, \dots, r$  y así

$$\{\alpha : \text{soporte } \phi_\alpha \cap W_x \neq \emptyset\} = \{\alpha(i_1), \dots, \alpha(i_r)\}.$$

Por lo tanto  $\{\text{soporte } \phi_\alpha\}$  es localmente finita.  $\square$

**COROLARIO 1.2.** Sean  $M$  una variedad  $C^\infty$ ,  $V \subset M$  abierto y  $A \subset V$  cerrado. Entonces existe  $\varphi \in C^\infty(M)$  tal que  $0 \leq \varphi \leq 1$ ,  $\varphi = 1$  en  $A$  y  $\varphi = 0$  en  $M \setminus V$ .

**Demostración.**  $\{V, M \setminus A\}$  es una cubierta abierta de  $M$ . Sea  $\{\varphi, \psi\}$  una partición de la unidad con soporte  $\varphi \subset V$ , soporte  $\psi \subset M \setminus A$ . Si  $x \in A$ ,  $\psi(x) = 0$  y entonces  $\varphi(x) = 1$ .  $\square$

## 2. El espacio tangente

Sean  $U \subset \mathbb{R}^d$  abierto y  $p \in U$ ,  $v \in \mathbb{R}^d$ . Definiendo

$$v(f) := Df_p(v) = \langle \nabla f(p), v \rangle = \sum_{i=1}^d D_i f(p) v_i$$

para  $f \in C^1(U)$  podemos considerar a  $v$  como un operador lineal en  $C^1(U)$  que satisface  $v(1) = 0$  y  $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$ .

**DEFINICIÓN 1.6.** Sean  $M$  variedad diferenciable y  $p \in M$ . Definimos una relación de equivalencia en el conjunto de funciones diferenciables en una vecindad de  $p$ :  $f \sim_p g \iff f \equiv g$  en alguna vecindad de  $p$ . Una clase de equivalencia  $[f]$  se llama *gérmen de función* en  $p$ . Notemos que podemos definir  $[f](p) = f(p)$  sin ambigüedad. Sea  $G_p M$  el conjunto de estos gérmenes.

En  $G_p M$  definimos las operaciones  $[f] + [g] = [f + g]$ ,  $a[f] = [af]$   $a \in \mathbb{R}$ ,  $[f][g] = [fg]$ .

**DEFINICIÓN 1.7.** Sea  $M$  variedad diferenciable. El espacio tangente a  $M$  en el punto  $p \in M$ , es el conjunto  $T_p M$  de operadores lineales  $v : G_p M \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfacen la regla de Leibnitz

$$v([fg]) = f(p)v([g]) + g(p)v([f]).$$

Como  $[1] = [1][1]$ , para  $v \in T_p M$  tenemos

$$v([1]) = 1 \cdot v([1]) + 1 \cdot v([1]) = 2 \cdot v([1])$$

y así  $v([1]) = 0$ .

**EJEMPLO 1.2.** Sea  $p \in M$  y sea  $(U, \varphi)$  carta con  $p \in U$ . Definimos

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p : G_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p ([f]) \right) = D_i(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)).$$

Probaremos que  $\left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x_m} \right)_p$  es una base de  $T_p M$ .

LEMA 1.3. Sea  $U \subset \mathbb{R}^m$  abierto convexo con  $0 \in U$ . Sea  $f \in C^\infty(U)$ . Existen  $g_1, \dots, g_m \in C^\infty(U)$  tales que

$$f(z) = f(0) + \sum_{i=1}^m z_i g_i(z), \quad g_i(0) = D_i f(0).$$

**Demostración.** Sea  $z \in U$  y definamos  $h(t) = f(tz)$ , entonces

$$f(z) - f(0) = h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(t) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^m z_i D_i f(tz) dt.$$

Definiendo  $g_i(z) = \int_0^1 D_i f(tz) dt$  obtenemos el Lema □

PROPOSICIÓN 1.1. Sean  $M$  variedad diferenciable,  $p \in M$ . Sea  $(U, \varphi)$  carta con  $p \in U$ . Escribiendo  $\varphi = (x_1, \dots, x_m)$  tenemos que

$$v = \sum_{i=1}^m v([x_i]) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$$

para todo  $v \in T_p M$ .

**Demostración.** Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\varphi(p) = 0$ . Sea  $f \in C^\infty(\varphi^{-1}(B_r(0)))$ . Por el Lema 1.3 tenemos que

$$f \circ \varphi^{-1}(z) = f(p) + \sum_{i=1}^m z_i g_i(z), \quad g_i(0) = D_i(f \circ \varphi^{-1})(0),$$

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^m x_i g_i \circ \varphi.$$

Así

$$v([f]) = \sum_{i=1}^m v([x_i]) g_i \circ \varphi(p) + \sum_{i=1}^m x_i(p) v([g_i \circ \varphi]) = \sum_{i=1}^m v([x_i]) D_i(f \circ \varphi^{-1})(0)$$

□

COROLARIO 1.3. Sean  $M$  variedad diferenciable,  $p \in M$ . Entonces  $T_p M$  es un espacio vectorial de la misma dimensión que  $M$

DEFINICIÓN 1.8. Sean  $M, N$  variedades diferenciables  $F \in C^\infty(M, N)$ . Definimos la derivada  $F_{*p} : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$  de  $F$  en el punto  $p$  por

$$F_{*p}(v)([g]) = v([g \circ F])$$

donde  $v \in T_p M$ ,  $[g] \in G_{F(p)} N$ . Algunas veces omitiremos el subíndice  $p$  en la derivada.

PROPOSICIÓN 1.2. Sean  $M, N, P$  variedades diferenciables  $F \in C^\infty(M, N)$ ,  $H \in C^\infty(N, P)$ ,  $p \in M$ ,  $q = F(p)$ .

- (1) Si  $F$  es constante entonces  $F_* = 0$ .
- (2)  $(H \circ F)_{*p} = H_{*q} \circ F_{*p}$ .
- (3) Sean  $(U, \varphi)$  carta con  $p \in U, z = \varphi(p), \varphi = (x_1, \dots, x_m)y$   
 $e_1, \dots, e_m$  la base canónica de  $\mathbb{R}^m$ . Entonces

$$\varphi_{* \varphi(p)}^{-1}(e_i) = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$$

de donde  $T_p M = \varphi_{* \varphi(p)}^{-1}(\mathbb{R}^m)$ .

**Demostración.**

Sean  $v \in T_p M, [f] \in G_p M, [g] \in G_q N, [h] \in G_{H(q)} P$ .

- (1) Si  $F$  es constante,  $[g \circ F]$  es un germen constante. Así

$$F_{*p}(v)([g]) = v([g \circ F]) = 0.$$

- (2)  $(H \circ F)_{*p}(v)([h]) = v([h \circ H \circ F])$   
 $= F_{*p}(v)([h \circ H]) = (H_{*q} \circ F_{*p})(v)([h])$
- (3)  $(\varphi_{* \varphi(p)}^{-1}(e_i)([f]) = e_i([f \circ \varphi^{-1}]) = D_i(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$ .

□.

Sean  $(U, \varphi), (V, \psi)$  cartas con  $p \in U, F(p) \in V$ , con  $\psi = (y_1, \dots, y_n)$

$$F_{*p} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p ([y_j]) = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p ([y_j \circ F]) = D_i(y_j \circ F \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)).$$

Por la Proposición 1.1

$$F_{*p} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p = \sum_{j=1}^n D_i(y_j \circ F \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \left( \frac{\partial}{\partial y_j} \right)_{F(p)}.$$

O sea que la matriz de  $F_{*p}$  en las bases  $\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right\}_{i=1}^m, \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial y_j} \right)_{F(p)} \right\}_{j=1}^n$   
es la matriz jacobiana  $D(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$ .

### 3. El teorema del rango, inmersiones y encajes

**TEOREMA 1.4.** Sean  $M, N$  variedades diferenciables de dimensiones  $m, n$  y  $h : M \rightarrow N$  diferenciable.

- (1) Supongamos que  $\text{rango } h_{*p} = \dim h_{*p}(T_p M) = k$ . Entonces existen cartas  $(U, \varphi), (V, \psi)$  con  $\varphi(p) = 0, \psi(h(p)) = 0$  tales que

$$\psi \circ h \circ \varphi^{-1}(t_1, \dots, t_m) = (t_1, \dots, t_k, g_{k+1}(t), \dots, g_n(t))$$

- (2) Si  $\text{rango } h_* = k$  en una vecindad de  $p$  entonces existen cartas  $(U, \varphi), (V, \psi)$  con  $\varphi(p) = 0, \psi(h(p)) = 0$  tales que

$$\psi \circ h \circ \varphi^{-1}(t_1, \dots, t_m) = (t_1, \dots, t_k, 0, \dots, 0)$$

**Demostración.** Como el resultado es local podemos suponer que que  $M$  es una vecindad del origen en  $\mathbb{R}^m$ ,  $N = \mathbb{R}^n$  y  $h(0) = 0$ . La hipótesis es que la matriz  $Dh(0)$  tiene rango  $k$ . Permutando las coordenadas podemos suponer que

$$Dh(x) = \begin{bmatrix} A(x) & * \\ * & * \end{bmatrix}, \det A(0) \neq 0.$$

En una vecindad del origen tenemos  $\det A(x) \neq 0$ . Definimos  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  por

$$\varphi(s_1, \dots, s_m) = (h_1(s), \dots, h_k(s), s_{k+1}, \dots, s_m)$$

$$D\varphi(0) = \begin{bmatrix} A(0) & * \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Así  $\det D\varphi(0) \neq 0$  y por el teorema de la función inversa existe una vecindad  $U$  del origen tal que  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  es un difeomorfismo. Como  $h_i \circ \varphi^{-1}(t_1, \dots, t_m) = t_i$  para  $i = 1, \dots, k$

$$h \circ \varphi^{-1}(t_1, \dots, t_m) = (t_1, \dots, t_k, g_{k+1}(t), \dots, g_n(t))$$

Supongamos ahora que  $\text{rango } Dh(x) = k$  en una vecindad del origen. Sea  $g = h \circ \varphi^{-1}$ , entonces

$$Dg(t) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ * & \left[ \frac{\partial g_i}{\partial t_j} \right]_{i,j \geq k} \end{bmatrix}.$$

Como  $\text{rango } Dg(t) = k$  en una vecindad del origen,  $\frac{\partial g_i}{\partial t_j} = 0$  para  $i, j \geq k$  y así  $g_i(t) = f_i(t_1, \dots, t_k)$  para  $i \geq k$ . Sea

$$\psi(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_k, y_{k+1} - f_{k+1}(y_1, \dots, y_k), \dots, y_n - f_n(y_1, \dots, y_k)),$$

$$\text{entonces } D\psi(y) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ * & I \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$\psi \circ g(t_1, \dots, t_m) = \psi(t_1, \dots, t_k, g_{k+1}(t), \dots, g_n(t)) = (t_1, \dots, t_k, 0, \dots, 0)$$

□

**COROLARIO 1.5.** Sean  $M, N$  variedades diferenciables de dimensiones  $m, n$  y  $h : M \rightarrow N$  diferenciable. Sea  $q \in N$  tal que  $\text{rango } h_{*p} = k$  para todo punto  $p$  en una vecindad de  $h^{-1}(q) \neq \emptyset$ . Entonces  $h^{-1}(q)$  es una variedad diferenciable de dimensión  $m - k$ . Cuando  $k = n$ ,  $q$  se llama valor regular de  $h$ .

**Demostración.** Sea  $p \in h^{-1}(q)$ . Por el Teorema 1.4 existen cartas  $(U, \varphi), (V, \psi)$  tales que  $\varphi(p) = 0, \psi(q) = 0$  y

$$\psi \circ h \circ \varphi^{-1}(t_1, \dots, t_m) = (t_1, \dots, t_k, 0, \dots, 0).$$

Sea  $z \in U$ , entonces

$$h(z) = q \iff \psi \circ h \circ \varphi^{-1}(\varphi(z)) = 0 \iff \varphi(z) = (0, \dots, 0, z_{k+1}, \dots, z_m).$$

Así  $h^{-1}(q) \cap U = \varphi^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{m-k})$ , y podemos definir la carta  $\phi = \Pi \circ \varphi|_{h^{-1}(q) \cap U}$ , donde  $\Pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$  es la proyección sobre las últimas  $m - k$  coordenadas. Si  $j : \mathbb{R}^{m-k} \rightarrow \{0\} \times \mathbb{R}^{m-k} \subset \mathbb{R}^m$  es la inyección natural,  $\phi^{-1} = \varphi^{-1} \circ j$ .  $\square$

**PROPOSICIÓN 1.3.** *Sea  $q \in N$  valor regular de  $h : M \rightarrow N$ . Para  $p \in h^{-1}(q)$  se tiene que  $T_p h^{-1}(q) = \ker h_{*p}$ .*

**Demostración.** Sean  $m = \dim M, n = \dim N$ . Sea  $(U, \varphi)$  carta de  $h^{-1}(q)$  con  $p \in U$ . Entonces  $h \circ \varphi^{-1}$  es constante. Así

$$h_{*p}(T_p h^{-1}(q)) = (h \circ \varphi^{-1})_{*x}(\mathbb{R}^{m-n}) = \{0\},$$

donde  $x = \varphi(p)$ . Es decir  $T_p h^{-1}(q) \subset \ker h_{*p}$ . Como  $h_{*p}$  es suprayectiva  $\dim T_p h^{-1}(q) = m - n = \dim \ker h_{*p}$ .  $\square$

**EJEMPLO 1.3.** Sean  $M_n \cong \mathbb{R}^{n^2}$  el conjunto de matrices reales  $n \times n$ ,  $S_n = \{C \in M_n : C^t = C\} \cong \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ ,  $f : M_n \rightarrow S_n$ ,  $f(A) = AA^t$ . El grupo ortogonal  $O(n) = f^{-1}(I)$  es una variedad de dimensión  $n(n-1)/2$  ya que  $I$  es un valor regular de  $f$ . En efecto sean  $A, B \in M_n$ , entonces

$$f_{*A}(B) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} ((A + sB)(A + sB)^t - AA^t) = AB^t + BA^t.$$

Sean  $A \in O(n)$ ,  $C \in S_n$ . Tomando  $B = \frac{1}{2}CA$  tenemos que

$$f_{*A}(B) = \frac{1}{2}(AA^t C^t + CAA^t) = \frac{1}{2}(C^t + C) = C.$$

Así  $f_{*A}$  es suprayectiva.

$$T_I O(n) = \ker f_{*I} = \{B \in M_n : B^t + B = 0\}$$

es el conjunto de matrices antisimétricas.

**DEFINICIÓN 1.9.** Sean  $M, N$  variedades diferenciables y sea  $h \in C^\infty(M, N)$ .

- Decimos que  $h$  es una *inmersión* si  $h_{*x}$  es inyectiva para todo  $x \in M$ .
- Una inmersión  $h$  se llama *encaje* si es un homeomorfismo sobre su imagen  $h(M)$ , teniendo esta última la topología relativa como subconjunto de  $N$ .

**PROPOSICIÓN 1.4.** *Si  $h : M \rightarrow N$  es una inmersión inyectiva y  $M$  es compacto entonces  $h$  es un encaje.*

**Demostración.** Sólo tenemos que probar que  $h^{-1} : h(M) \rightarrow M$  es continua. Sea  $U \subset M$  abierto, entonces  $M \setminus U$  es cerrado. Como  $M$  es compacto,  $M \setminus U$  es compacto. Así  $h(M \setminus U)$  es compacto y por

consiguiente cerrado. Como  $h$  es inyectiva,  $h(M \setminus U) = h(M) \setminus h(U)$ , de donde  $h(U)$  es abierto en  $h(M)$ .  $\square$

**OBSERVACIÓN 1.3.** Si  $h : M \rightarrow N$  es un encaje entonces  $h(M)$  es una variedad de la misma dimensión que  $M$ . En efecto para  $p \in M$  sean  $(U, \varphi), (V, \psi)$  con cartas tales que  $\varphi(p) = 0, \psi(h(p)) = 0, h(U) \subset V$  y

$$\psi \circ h \circ \varphi^{-1}(t_1, \dots, t_m) = (t_1, \dots, t_k, 0, \dots, 0)$$

Como  $h$  es un encaje,  $h(U)$  es un abierto y por lo tanto hay una abierto

Si rango  $h_* = k$  en una vecindad de  $p$  entonces existen cartas

Vamos a probar que cualquier variedad diferenciable compacta puede encajarse en algún espacio euclidiano.

**PROPOSICIÓN 1.5.** Sean  $M$  variedad diferenciable y  $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$  una cubierta localmente finita.

- (1) Si  $K \subset M$  es compacto entonces  $\{\alpha \in A : V_\alpha \cap K \neq \emptyset\}$  es finito.
- (2) Si  $V_\alpha \neq \emptyset \forall \alpha \in A$ , entonces  $A$  es a lo más numerable.

**Demostración.**

- (1) Para cada  $p \in M$  sea  $W_p$  vecindad talque  $A_p = \{\alpha \in A : V_\alpha \cap W_p \neq \emptyset\}$  es finito. Escojamos una subcubierta finita  $\{W_{p_1}, \dots, W_{p_r}\}$  de  $K$ . Si  $V_\alpha \cap K \neq \emptyset$ , entonces  $V_\alpha \cap W_{p_i}$  para algún  $i = 1, \dots, r$  y así  $\alpha \in A_{p_i}$ . Luego

$$\{\alpha \in A : V_\alpha \cap K \neq \emptyset\} \subset \bigcup_{i=1}^r A_{p_i}$$

- (2) Hay una sucesión creciente de compactos  $K_i$  tales que  $M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$ . Por el inciso anterior,  $B_i = \{\alpha \in A : V_\alpha \cap K_i \neq \emptyset\}$  es finito. Como todo  $V_\alpha$  debe intersectar algún  $K_i$ ,  $A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ .  $\square$

**PROPOSICIÓN 1.6.** Sea  $M$  variedad diferenciable.

- (1) Si  $V \subset M$  es abierto y  $A \subset V$  es cerrado. Entonces existe  $U$  abierto tal que  $A \subset U \subset \bar{U} \subset V$ .
- (2) Si  $\{V_i\}$  es una cubierta abierta localmente finita, existe una cubierta abierta  $\{U_i\}$  tal que  $\bar{U}_i \subset V_i \forall i$ .

**Demostración.**

- (1) Sea  $\varphi : M \rightarrow [0, 1]$  diferenciable tal que  $\varphi = 1$  en  $A$  y  $\varphi = 0$  en  $M \setminus V$ . Sea  $U = \varphi^{-1}[0, 1/2)$ .
- (2) Por la Proposición 1.5, la cubierta  $\{V_i\}$  es a lo más numerable. El conjunto  $A_1 = M \setminus \bigcup_{i>1} V_i$  es cerrado y  $A_1 \subset V_1$ . Por (1)

existe  $U_1$  abierto tal que

$$A_1 \subset U_1 \subset \overline{U_1} \subset V_1, \text{ y así } M = U_1 \cup \bigcup_{i>1} V_i.$$

$A_2 = M \setminus (U_1 \cup \bigcup_{i>2} V_i)$  es cerrado y  $A_2 \subset V_2$ . Por (1) existe  $U_2$  abierto tal que

$$A_2 \subset U_2 \subset \overline{U_2} \subset V_2, \text{ y así } M = U_1 \cup U_2 \cup \bigcup_{i>2} V_i.$$

Continuamos el proceso inductivamente. Sea  $p \in M$ . Como  $\{V_i\}$  es localmente finita  $\exists N$  tal que  $p \notin V_i$  si  $i > N$ . Como  $M = \bigcup_{i \leq N} U_i \cup \bigcup_{i > N} V_i$ , tenemos que  $p \in \bigcup_{i \leq N} U_i$ .  $\square$

**TEOREMA 1.6.** *Si  $M$  es una variedad diferenciable compacta, entonces hay un encaje  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  para algún  $n$ .*

**Demostración.** Como  $M$  es compacta, hay una colección finita  $\{(V_1, \psi_1), \dots, (V_k, \psi_k)\}$  de cartas coordenadas tal que  $M = \bigcup_{i=1}^k V_i$ . Por la Proposición 1.6, existe una cubierta  $\{U_1, \dots, U_k\}$  tal que  $\overline{U_i} \subset V_i$ . Por el Corolario 1.2 existe  $\varphi_i : M \rightarrow [0, 1]$  diferenciable tal que  $\varphi_i(U_i) = 1$  y soporte  $\varphi_1 \subset V_i$ . Sea  $m = \dim M$  y definamos

$$f = (\varphi_1 \psi_1, \dots, \varphi_k \psi_k, \varphi_1, \dots, \varphi_k) : M \rightarrow \mathbb{R}^{k(m+1)}.$$

$f$  es inyectiva. Supongamos que  $f(p) = f(q)$ ,  $p, q \in M$ . Si  $p \in U_i$ ,  $\varphi_i(p) = 1$ , entonces  $\varphi_i(q) = 1$  y así  $q \in V_i$ . Luego  $\psi_i(p) = \varphi_i(p)\psi_i(p) = \varphi_i(q)\psi_i(q) = \psi_i(q)$  y entonces  $p = q$ .

$f$  es una inmersión.

$$f_* = [(\varphi_1 \psi_1)_*, \dots, (\varphi_k \psi_k)_*, \varphi_{1*}, \dots, \varphi_{k*}]$$

Sea  $p \in U_i$ . Como  $\varphi_i \psi_i = \psi_i$  en  $U_i$ ,  $(\varphi_i \psi_i)_{*p} = \psi_{i* p}$  es un isomorfismo.  $\square$

#### 4. Variedades con frontera

**DEFINICIÓN 1.10.** Sean  $X \subset \mathbb{R}^m$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Decimos que  $f$  es de clase  $C^k$  si  $\forall x \in X$ ,  $\exists F \in C^k(V, \mathbb{R}^n)$  tal que  $V$  es una vecindad de  $x$  y  $f|X \cap V = F|X \cap V$ .

**DEFINICIÓN 1.11.** Sea  $M$  un espacio de Hausdorff.

- La pareja  $(U, \varphi)$  es una carta de  $m$ -variedad con frontera en  $M$  si  $\varphi$  es un homeomorfismo del abierto  $U \subset M$  en un abierto del semiespacio  $\mathbb{H}^m = \{(x_1, \dots, x_m) : x_m \geq 0\}$
- Dos cartas  $(U, \varphi)$ ,  $(V, \psi)$  se llaman  $C^k$  compatibles si  $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \mathbb{H}^m$ ,  $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \mathbb{H}^m$  son de clase  $C^k$ .

- Un *atlas*  $\mathcal{A}$  de variedad con frontera, de clase  $C^k$  en  $M$  es una colección de cartas cuyos dominios cubren  $M$  y cualesquiera dos de ellas son  $C^k$  compatibles.
- Una *variedad con frontera* de dimensión  $m$  y clase  $C^k$  es un espacio de Hausdorff  $M$  con base numerable junto con un atlas maximal  $\mathcal{A}$  de variedad con frontera de clase  $C^k$ .
- Sean  $(M, \mathcal{A})$  una variedad  $C^k$  con frontera y  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ . Si  $\varphi(x) \in \partial\mathbb{H}^m = \{(x_1, \dots, x_m) : x_m = 0\}$  decimos que  $x$  es un *punto fronterizo* para la carta  $(U, \varphi)$ .

OBSERVACIÓN 1.4. La condición de ser un punto fronterizo no depende de la carta.

En efecto, sean  $(U, \varphi), (V, \psi)$  cartas tales que  $y = \varphi(x) \in \partial\mathbb{H}^m$  y supongamos que  $z = \psi(x) \notin \partial\mathbb{H}^m$ . Entonces  $\exists r > 0$  tal que  $B_r(z) \subset \psi(U \cap V) \setminus \partial\mathbb{H}^m$ . Sea  $F : W \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $W$  es vecindad de  $y$  y  $F|_W \cap \mathbb{H}^m = \psi \circ \varphi^{-1}|_W \cap \mathbb{H}^m$ . Así  $F \circ \varphi \circ \psi^{-1}$  es la identidad, entonces  $D(\varphi \circ \psi^{-1})(z)$  es invertible y por el teorema de la función inversa  $\exists 0 < \varepsilon < r$  tal que  $\varphi \circ \psi^{-1}(B_\varepsilon(z)) \subset \varphi(U \cap V) \subset \mathbb{H}^m$  es un abierto de  $\mathbb{R}^m$ . Esto contradice el hecho de que  $y \in \partial\mathbb{H}^m$ .

DEFINICIÓN 1.12. Sea  $M$  variedad  $C^k$  con frontera. La frontera de  $M$  es el conjunto  $\partial M$  de puntos fronterizos para alguna carta. El interior de  $M$  es el conjunto  $M \setminus \partial M$ . Por la Observación 1.4, el interior de  $M$  es el conjunto de puntos para los cuales existe una carta  $(U, \varphi)$  con  $\varphi(U)$  abierto de  $\mathbb{R}^m$ . Por lo tanto el interior de  $M$  es una variedad  $C^k$  (sin frontera).

PROPOSICIÓN 1.7. *Sea  $M$  una variedad diferenciable con frontera de dimensión  $m$ . Entonces  $\partial M$  es una variedad diferenciable de dimensión  $m - 1$  (sin frontera).*

**Demostración.** Sea  $\mathcal{B}$  el conjunto de cartas  $(U, \varphi)$  de  $M$  tales que  $U \cap \partial M \neq \emptyset$ . Sea  $\Pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$  la proyección sobre las primeras  $m - 1$  coordenadas. Entonces  $\{(U \cap \partial M, \Pi \circ \varphi|_{U \cap \partial M}) : (U, \varphi) \in \mathcal{B}\}$  es un atlas para  $\partial M$ .  $\square$

PROPOSICIÓN 1.8. *Sea  $M$  una variedad diferenciable (sin frontera) de dimensión  $m$ . Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable y supongamos que  $0$  es un valor regular. Entonces  $f^{-1}([0, \infty))$  es una variedad con frontera  $f^{-1}(0)$ .*

**Demostración.** El conjunto  $f^{-1}((0, \infty))$  es abierto. Si  $p \in f^{-1}(0)$ , por (1) del Teorema 1.4, existe  $(U, \varphi)$  carta tal que  $\varphi(p) = 0$  y

$$f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = x_m.$$

Así  $f^{-1}([0, \infty)) \cap U = \varphi^{-1}(\mathbb{H}^m)$ , y entonces  $(\varphi^{-1}(\mathbb{H}^m), \varphi|_{\varphi^{-1}(\mathbb{H}^m)})$  es una carta de variedad con frontera.  $\square$



## CAPÍTULO 2

### Haces vectoriales

#### 1. Haces vectoriales y sus transformaciones

DEFINICIÓN 2.1. Sean  $E, B$  espacios topológicos,  $p : E \rightarrow B$  continua y suprayectiva.

- Una *carta local de haz vectorial* de rango  $n$  para  $p : E \rightarrow B$  es una pareja  $(U, \varphi)$  donde  $U \subset B$  es abierto y  $\varphi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$  es un homeomorfismo tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times \mathbb{R}^n \\ p \searrow & & \swarrow \pi_1 \\ & U & \end{array}$$

conmuta. Así,  $\forall b \in U \varphi(p^{-1}(b)) \subset \{b\} \times \mathbb{R}^n$  y tenemos un homeomorfismo  $\varphi_b = \pi_2 \circ \varphi|_{p^{-1}(b)}$ .

- Un *atlas de haz vectorial* para  $p : E \rightarrow B$  es una colección  $\Phi$  de cartas locales de haz vectorial cuyos dominios cubren  $B$  y tal que  $\varphi_b \circ \psi_b^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un isomorfismo lineal para todo  $(U, \varphi), (V, \psi) \in \Phi, b \in U \cap V$ .
- Una *estructura de haz vectorial* para  $p : E \rightarrow B$  es un atlas de haz vectorial maximal.
- Si  $E, B$  son variedades diferenciables y las cartas locales son difeomorfismos, entonces  $p : E \rightarrow B$  es diferenciable y decimos que el haz vectorial es diferenciable.

OBSERVACIÓN 2.1. Si  $\Phi$  es un atlas de haz vectorial para  $p : E \rightarrow B$ , podemos definir una estructura de espacio vectorial en cada fibra  $E_b = p^{-1}(b)$  declarando que  $\varphi_b$  es un isomorfismo para alguna y así para cualquier  $(U, \varphi) \in \Phi$  con  $b \in U$ .

El ejemplo más simple de haz vectorial es  $\pi_1 : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow B$ , conocido como *haz trivial*. Por tal razón una carta local de haz vectorial se llama también *trivialización local*.

DEFINICIÓN 2.2. Sea  $\{U_\alpha\}$  una cubierta abierta de  $B$ . Una colección de transformaciones continuas  $\{g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow Gl(n)\}$  se llama *cociclo* para la cubierta  $\{U_\alpha\}$  si

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \quad g_{\alpha\alpha}(b) = I, \quad g_{\alpha\beta}(b)g_{\beta\gamma}(b) = g_{\alpha\gamma}(b).$$

Como  $g_{\alpha\beta}(b)g_{\beta\alpha}(b) = g_{\alpha\alpha}(b) = I$ , tenemos que  $g_{\alpha\beta}(b) = g_{\beta\alpha}(b)^{-1}$ .

**PROPOSICIÓN 2.1.** *Sea  $B$  un espacio topológico.*

- (1) *Si  $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$  es un atlas de haz vectorial entonces  $g_{\alpha\beta}(b) = (\psi_\alpha)_b \circ (\psi_\beta)_b^{-1}$  define un cociclo.*
- (2) *Todo cociclo  $\{g_{\alpha\beta}\}$  para una cubierta  $\{U_\alpha\}$  de  $B$  define un atlas de haz vectorial  $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ .*

**Demostración.** (1) es claro. Para (2) definimos la relación de equivalencia  $\sim$  en  $X = \bigcup_\alpha \{\alpha\} \times U_\alpha \times \mathbb{R}^n$  mediante

$$(\alpha, b, v) \sim (\beta, y, w) \iff b = y \in U_\alpha \cap U_\beta, v = g_{\alpha\beta}(b)w.$$

La reflexividad se sigue de  $g_{\alpha\alpha}(b) = I$ , la transitividad de  $g_{\alpha\beta}(b)g_{\beta\gamma}(b) = g_{\alpha\gamma}(b)$  y la simetría de  $g_{\alpha\beta}(b) = g_{\beta\alpha}(b)^{-1}$ .

Sean  $E = X / \sim$  y  $p : E \rightarrow B$  dada por  $p([\alpha, b, v]) = b$ .

$$p^{-1}(U_\alpha) = \{[\alpha, b, v] : b \in U_\alpha, v \in \mathbb{R}^n\} \stackrel{\psi_\alpha}{\cong} U_\alpha \times \mathbb{R}^n.$$

**OBSERVACIÓN 2.2.** Si el haz vectorial  $p : E \rightarrow M$  es diferenciable, el cociclo definido en (1) de la Proposición 2.1 consiste de transformaciones diferenciables.

Si  $(M, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\})$  es una variedad diferenciable de dimensión  $m$  y  $\{g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow Gl(n)\}$  es un cociclo de transformaciones diferenciables, entonces el haz definido en (2) de la Proposición 2.1 tiene el atlas  $\{(p^{-1}(U_\alpha), (\varphi_\alpha \times id) \circ \psi_\alpha)\}$  de variedad diferenciable de dimensión  $n + m$ .

**EJEMPLO 2.1.** El Haz Tangente.

Sea  $(M, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\})$  variedad diferenciable de dimensión  $m$ . El *haz tangente a  $M$*  es  $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$  con la proyección  $\pi : TM \rightarrow M$  con fibra  $T_p M$ . Si  $p \in U_\alpha$ ,  $(\varphi_\alpha)_{*p} : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m$  es un isomorfismo dado por  $(\varphi_\alpha)_{*p}(V) = (V([x_1]), \dots, V([x_m]))$ .

Nos faltaría definir una topología en  $TM$ . En lugar de eso podemos utilizar (2) de la Proposición 2.1. Para  $p \in U_\alpha \cap U_\beta$  sea

$$g_{\alpha\beta}(p) = (\varphi_\alpha)_{*p} \circ (\varphi_\beta)_{*p}^{-1} = D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(\varphi_\beta(p)),$$

entonces  $\{g_{\alpha\beta}\}$  es un cociclo para la cubierta  $\{U_\alpha\}$ . Sea  $\Pi : \overline{TM} \rightarrow M$  el haz definido por la Proposición 2.1.

Sea  $F : \overline{TM} \rightarrow TM$  dada por  $F([\alpha, p, v]) = (\varphi_\alpha)_{*p}^{-1}(v)$ . Observemos que si  $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ ,  $v = g_{\alpha\beta}(p)w \iff (\varphi_\alpha)_{*p}^{-1}(v) = (\varphi_\beta)_{*p}^{-1}(w)$ . Por lo tanto  $F$  esta bien definida y  $F : \Pi^{-1}(p) \rightarrow T_p M$  es un isomorfismo para todo  $p \in M$ . Por lo tanto identificaremos  $\overline{TM}$  y  $TM$ .

De acuerdo con la Observación 2.2,  $TM$  es un variedad diferenciable con cartas  $T\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n$  dadas por

$$\begin{aligned} T\varphi_\alpha(V) &= (\varphi_\alpha \times id) \circ \psi_\alpha \circ F^{-1}(V) = (\varphi_\alpha \times id)(p, (\varphi_\alpha)_*p(V)) \\ &= (\varphi_\alpha(p), V([x_1]), \dots, V([x_m])) \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.2. El dual de un haz vectorial.

Sea  $p : E \rightarrow B$  un haz vectorial de rango  $n$  y para cada  $b \in B$  sea  $E_b = p^{-1}(b)$ . El *haz dual de  $E$*  es  $E^* = \bigcup_{b \in B} E_b^*$  con la proyección  $p^* : E^* \rightarrow B$  con fibra  $E_b^*$ . Sea  $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$  un atlas de haz vectorial para  $p : E \rightarrow B$ . Si  $b \in U_\alpha$ ,  $(\psi_\alpha)_b : E_b \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un isomorfismo con transpuesta  $(\psi_\alpha)_b^t : \mathbb{R}^{n*} \cong \mathbb{R}^n \rightarrow E_b^*$ . Definimos  $(\psi_\alpha)_b^* = [(\psi_\alpha)_b^t]^{-1}$  y

$$g_{\alpha\beta}^* = (\psi_\alpha)_b^* [(\psi_\beta)_b^*]^{-1} = (g_{\beta\alpha}^t).$$

Entonces  $\{g_{\alpha\beta}^*\}$  es un cociclo y como hicimos con el haz tangente, podemos identificar el haz vectorial definido por la Proposición 2.1 con  $E^*$ .

Si  $E = TM$ , el haz  $T^*M = E^*$  se llama *haz cotangente de  $M$* . Si  $[f]$  es un germen en  $p$  definimos  $df \in T_p^*M$  mediante  $df_p(v) = v([f])$ . En particular si  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$  es una carta con  $p \in U$ ,

$$dx_{ip} \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p \right) = D_j(x_i \circ \varphi^{-1}) = \delta_{ij}$$

y así  $dx_{1p}, \dots, dx_{mp}$  es la base de  $T_p^*M$  dual a  $\left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x_m} \right)_p$ .

DEFINICIÓN 2.3. Sean  $p : E \rightarrow B, p' : E' \rightarrow B'$  haces vectoriales.

- Una transformación  $F : E \rightarrow E'$  se llama *fibrada* si existe  $f : B \rightarrow B'$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & E' \\ \downarrow p & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

conmuta, o sea que  $\forall b \in B, F(E_b) \subset E'_{f(b)}$ . En tal caso  $(F, f)$  se llama *par fibrado*.

- El par fibrado  $(F, f)$  de transformaciones continuas se llama *homomorfismo* de haces si  $\forall b \in B, F : E_b \rightarrow E'_{f(b)}$  es lineal.
- El par fibrado  $(F, f)$  se llama *equivalencia* de haces si  $f$  es un homeomorfismo y  $\forall b \in B, F : E_b \rightarrow E'_{f(b)}$  es isomorfismo.
- Si  $B = B'$ , una equivalencia  $(F, id)$  se llama *isomorfismo*.
- El haz  $p : E \rightarrow B$  se llama *trivial* si es isomorfo al haz trivial  $\pi_1 : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

- Una variedad diferenciable  $M$  se llama *paralelizable* si  $TM$  es trivial.

EJEMPLO 2.3. Sean  $M, N$  variedades,  $f : M \rightarrow N$  diferenciable y definamos  $f_* : TM \rightarrow TN$  por  $f_*|_{T_p M} = f_{*p}$ . Entonces  $f_*$  es diferenciable y  $(f_*, f)$  es un homomorfismo de haces. Si  $f$  es un difeomorfismo, entonces  $(f_*, f)$  es una equivalencia de haces.

- DEFINICIÓN 2.4.
- Una *sección* del haz vectorial  $p : E \rightarrow B$  es una transformación continua  $s : B \rightarrow E$  tal que  $p \circ s = id$ .
  - Si el haz  $p : E \rightarrow M$  es diferenciable,  $\Gamma(E)$  denotará al conjunto de secciones diferenciables del haz.
  - Un *campo vectorial* en  $M$  es un elemento de  $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$  y una *1-forma* en  $M$  es un elemento de  $\Omega^1(M) = \Gamma(T^*M)$ .

PROPOSICIÓN 2.2. *El haz vectorial  $p : E \rightarrow B$  de rango  $n$  es trivial si y solo si existen secciones  $s_1, \dots, s_n$  tales que  $(s_1(b), \dots, s_n(b))$  es una base de  $E_b$  para todo  $b \in B$ .*

**Demostración.**

$\Rightarrow$ ) Si  $F : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow E$  define un isomorfismo de haces, definamos secciones  $s_i, i = 1, \dots, n$  por  $s_i(b) = F(b, e_i)$  donde  $(e_1, \dots, e_n)$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ .

$\Leftarrow$ ) Si  $s_1, \dots, s_n$  son secciones tales que  $\forall b \in B (s_1(b), \dots, s_n(b))$  es una base de  $E_b$ , definamos  $F : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow E$  por  $F(b, t_1, \dots, t_n) = t_1 s_1(b) + \dots + t_n s_n(b)$ .  $\square$

EJEMPLO 2.4. Consideremos la inmersión  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$

$$f(x_1, \dots, x_n) = (\exp(ix_1), \dots, \exp(ix_n)).$$

El  $n$ -toro  $\mathbb{T}^n = f(\mathbb{R}^n) = S^1 \times \dots \times S^1$  es paralelizable.

En efecto,  $f(x+m) = f(x)$  si y solo si  $m \in (2\pi\mathbb{Z})^n$ . Sea  $t_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la traslación  $x \mapsto x+m$ . Para  $m \in (2\pi\mathbb{Z})^n$ ,  $f = f \circ t_m$  y así  $f_* = (f \circ t_m)_* = f_* \circ (t_m)_*$ . Si  $(x, v) \in T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ,  $(t_m)_*(x, v) = (x+m, v)$  y luego  $f_*(x, v) = f_*(x+m, v)$ . Podemos por lo tanto, definir sin ambigüedad campos vectoriales  $s_i$  en  $\mathbb{T}^n$  mediante  $s_i(f(x)) = f_*(x, e_i)$ .

## 2. Orientabilidad

Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  de dimensión  $n$ . Definimos la relación  $\sim$  en el conjunto de bases ordenadas de  $V$  mediante  $(v_1, \dots, v_n) \sim (w_1, \dots, w_n)$  si y solo si la matriz de cambio de base  $[A_{ij}]$  dada por  $w_j = \sum_i A_{ij} v_i$ , tiene determinante positivo. Hay dos clases de equivalencia y a cualquiera de ellas se le llama orientación de  $V$ . Si  $f : V \rightarrow V'$  es un isomorfismo de haces vectoriales tenemos definida una función  $\bar{f}([v_1, \dots, v_n]) = [f(v_1), \dots, f(v_n)]$ .

La orientación natural  $\omega$  de  $\mathbb{R}^n$  es la clase de equivalencia de la base canónica.

DEFINICIÓN 2.5. Sea  $p : E \rightarrow B$  haz vectorial.

- Decimos que la elección de una orientación  $\mathcal{O}_b$  de la fibra  $E_b$  para cada  $b \in B$  es continua, si para cada trivialización local  $(U, \psi)$  con  $U$  conexa, los isomorfismos  $\psi_b : E_b \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisfacen que  $\forall b \in U, \overline{\psi}_b(\mathcal{O}_b) = \omega$  o que  $\forall b \in U, \overline{\psi}_b(\mathcal{O}_b) \neq \omega$ .
- Decimos que el haz es *orientable* si existe una elección continua de una orientación para cada fibra.
- Decimos que una variedad diferenciable  $M$  es orientable si  $TM$  es orientable.

OBSERVACIÓN 2.3. Si el haz vectorial  $p : E \rightarrow B$  es orientable y  $(U, \varphi), (V, \psi)$  son trivializaciones locales con  $U, V$  conexos, entonces  $\det(\varphi_b \circ \psi_b^{-1})$  tiene el mismo signo para todo  $b \in U \cap V$ .

EJEMPLO 2.5. Si el haz vectorial  $p : E \rightarrow B$  es trivial, sean  $s_1, \dots, s_n$  secciones tales que  $\forall b \in B, (s_1(b), \dots, s_n(b))$  es base de  $E_b$  entonces la elección  $b \mapsto [s_1(b), \dots, s_n(b)]$  es continua y por lo tanto el haz es orientable.

PROPOSICIÓN 2.3. Si existe un atlas  $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$  del haz vectorial  $p : E \rightarrow B$  tal que para el cociclo correspondiente  $\det g_{\alpha\beta} > 0 \forall \alpha, \beta$ , entonces el haz es orientable.

**Demostración.** Para cada  $b \in U_\alpha$  escogemos  $\mathcal{O}_b = \overline{(\psi_\alpha)_b}^{-1}(\omega)$ . La elección no depende de  $\alpha$  ya que  $\det g_{\alpha\beta} > 0$  implica que  $\overline{g_{\alpha\beta}(b)}(\omega) = \omega$ . Sea  $(V, \varphi)$  una trivialización local con  $V$  conexo, entonces  $\{b \in V : \overline{\varphi}_b(\mathcal{O}_b) = \omega\}$  y  $\{b \in V : \overline{\varphi}_b(\mathcal{O}_b) \neq \omega\}$  son ambos abiertos ya que si  $b \in V \cap U_\alpha$  entonces hay una vecindad  $W$  de  $b$  donde  $\det((\psi_\alpha)_p \circ \varphi_p^{-1})$  no cambia de signo.  $\square$

Dado un atlas  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  de la variedad diferenciable  $M$ , el cociclo correspondiente de  $TM$  es

$$g_{\alpha\beta} = D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) \circ \varphi_\beta.$$

COROLARIO 2.1. La variedad diferenciable  $M$  es orientable si y solo existe un atlas  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  tal que  $\det D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) > 0$ .

EJEMPLO 2.6. Consideremos la circunferencia  $S^1 = \{e^{ix} : x \in \mathbb{R}\}$  con la cubierta  $U_0 = \{e^{ix} : |x| < \pi\}$ ,  $U_1 = \{e^{ix} : x \in (0, 2\pi)\}$ .

Para  $A \in Gl(n)$  consideremos el haz  $p_A : E_A \rightarrow S^1$  definido por el cociclo  $g : U_0 \cap U_1 \rightarrow Gl(n)$  dado por

$$g(e^{ix}) = \begin{cases} I & x \in (0, \pi) \\ A & x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}.$$

El haz es orientable si y solo si  $\det A > 0$ . Cuando  $n = 1$  y  $A = -1$ ,  $E_A$  es la banda de Möbius.

### 3. Algebra multilineal, operaciones con haces

DEFINICIÓN 2.6. Sean  $V_1, \dots, V_k$  espacios vectoriales sobre  $\mathbb{R}$ .

- $f : V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow \mathbb{R}$  se llama multilineal si  $\forall i = 1, \dots, k$   
 $v_i, w_i \in V_i, \lambda \in \mathbb{R}$

$$f(v_1, \dots, \lambda v_i + w_i, \dots, v_k) = \lambda f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + f(v_1, \dots, w_i, \dots, v_k)$$

- El producto tensorial  $V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^*$  es el conjunto de funciones multilineales  $f : V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow \mathbb{R}$
- Si  $f \in V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^*, g \in V_{k+1}^* \otimes \dots \otimes V_m^*$  definimos

$$f \otimes g(v_1, \dots, v_m) = f(v_1, \dots, v_k)g(v_{k+1}, \dots, v_m).$$

de tal suerte que  $f \otimes g \in V_1^* \otimes \dots \otimes V_m^*$ .

- Sean  $A_i : V_i \rightarrow W_i, i = 1 \dots k$  lineales, definimos

$$A_1^* \otimes \dots \otimes A_k^* : W_1^* \otimes \dots \otimes W_k^* \rightarrow V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^*,$$

$$A_1^* \otimes \dots \otimes A_k^*(f)(v_1, \dots, v_k) = f(A_1(v_1), \dots, A_k(v_k)).$$

En el caso en que  $V_i = V, W_i = W, A_i = A \forall i$ , denotaremos simplemente por  $A^*$  a la transformación  $A^* \otimes \dots \otimes A^*$ .

OBSERVACIONES 2.4. Sean  $V, W$  espacios vectoriales.

- Sean  $\{v_1, \dots, v_m\}, \{w_1, \dots, w_n\}$  bases de  $V, W$  y  $\{v_1^*, \dots, v_m^*\}, \{w_1^*, \dots, w_n^*\}$  las bases duales de  $V^*, W^*$ . Entonces  $\{v_i^* \otimes w_j^* : i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$  es una base de  $V^* \otimes W^*$  y para cualquier  $f \in V^* \otimes W^*$  tenemos

$$f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(v_i, w_j) v_i^* \otimes w_j^*.$$

Similarmente para  $V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^*$ .

- Hay un isomorfismo canónico  $i_V : V \rightarrow (V^*)^*$  dado para  $v \in V, \alpha \in V^*$  por  $i_V(v)(\alpha) = \alpha(v)$ . Por lo tanto,  $V_1 \otimes \dots \otimes V_k$  puede definirse como el conjunto de funciones multilineales  $f : V_1^* \times \dots \times V_k^* \rightarrow \mathbb{R}$ .
- $V^* \otimes W \cong \text{hom}(V, W) = \{g : V \rightarrow W : g \text{ es lineal}\}$ . En efecto sea  $h : \text{hom}(V, W) \rightarrow V^* \otimes W$  dada por  $h(g)(v, w^*) = w^*(g(v))$ , cuya inversa esta dada por  $h^{-1}(f)(v) = i_W^{-1}(f(v, \cdot))$ .

DEFINICIÓN 2.7. Si  $p_1 : E_1 \rightarrow B, \dots, p_k : E_k \rightarrow B$  son haces vectoriales de rangos  $n_1, \dots, n_k$ , entonces el producto tensorial

$$E_1 \otimes \dots \otimes E_k = \bigcup_b (E_1)_b \otimes \dots \otimes (E_k)_b$$

con la proyección  $p$  con fibra  $(E_1)_b \otimes \cdots \otimes (E_k)_b$  es un haz vectorial de rango  $n_1 \cdots n_k$ . Si  $\{U_\alpha\}$  es una cubierta de  $B$  y  $(g_i)_{\alpha\beta}$  es el cociclo correspondiente para el haz  $E_i$ , entonces  $(g_1)_{\alpha\beta} \otimes \cdots \otimes (g_k)_{\alpha\beta}$  es el cociclo correspondiente para el haz  $E_1 \otimes \cdots \otimes E_k$ .

**EJEMPLO 2.7.** Una métrica en el haz diferenciable  $p : E \rightarrow M$  es una sección  $G \in \Gamma(E^* \otimes E^*)$  tal que  $\forall p \in M, G(p)$  es positivo definido y simétrico. Una métrica riemanniana en  $M$  es una métrica en  $TM$ . Siempre existe una métrica para  $p : E \rightarrow M$ . En efecto, sea  $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$  un atlas de haz vectorial y para  $p \in U_\alpha$  definamos

$$G_\alpha(p) = \sum_{i,j=1}^m \delta_{ij} (\psi_\alpha)_b^* (e_i^* \otimes e_j^*)$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker. Sea  $\{h_\alpha\}$  una partición de la unidad subordinada a  $\{U_\alpha\}$ . Definimos  $G = \sum_\alpha h_\alpha G_\alpha$ .

**DEFINICIÓN 2.8.** Sea  $M$  una variedad diferenciable. Denotaremos por  $T_s^r(M)$  al haz  $T^*M^{\otimes r} \otimes TM^{\otimes s}$ . Un elemento de  $\Gamma(T_s^r(M))$  se llama *tensor  $r$ -covariante,  $s$ -contravariante*.

**OBSERVACIÓN 2.5.** Para  $R \in \Gamma(T_s^r(M))$ , definamos  $\bar{R} : \mathfrak{X}(M)^r \times \Omega^1(M)^s \rightarrow C^\infty(M)$  mediante

$$\bar{R}(X_1, \dots, X_r, \omega_1, \dots, \omega_s)(p) = R_p(X_1(p), \dots, X_r(p), \omega_1(p), \dots, \omega_s(p)).$$

$$\text{Si } f \in C^\infty(M), \bar{R}(X_1, \dots, fX_i, \dots, X_r, \omega_1, \dots, \omega_s) =$$

$$\bar{R}(X_1, \dots, X_r, \omega_1, \dots, f\omega_j, \dots, \omega_s) = f\bar{R}(X_1, \dots, X_i, \dots, X_r, \omega_1, \dots, \omega_s).$$

Decimos que  $\bar{R}$  es  $C^\infty(M)$  - multilineal.

En una carta local  $U, \varphi = (x^1, \dots, x^m)$  tenemos

$$R|_U = \sum_{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s=1}^m T_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_r} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}}$$

$$\text{donde } T_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} = \overline{R|_U} \left( \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}, dx^{i_1}, \dots, dx^{i_s} \right).$$

**EJEMPLO 2.8.**

$$T_1^1(M) = \bigcup_p T_p^*M \otimes T_pM = \bigcup_p \text{hom}(T_pM, T_pM) = \text{hom}(TM, TM).$$

El tensor de Kronecker  $\delta \in \Gamma(T_1^1(M))$  se define por  $\delta(p) = id : T_pM \leftarrow$ . Definimos la contracción  $c : \Gamma(T_1^1(M)) \rightarrow C^\infty(M)$  por  $c(A)(p) = \text{Tr } A(p)$ . En una carta local  $U, \varphi = (x_1, \dots, x_m)$ ,

$$\delta|_U = \sum_{i,j=1}^m \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes dx_j, \quad A|_U = \sum_{i,j=1}^m A_j^i \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes dx_j, \quad c(A)|_U = \sum_{i=1}^m A_i^i.$$

PROPOSICIÓN 2.4. Si  $S : \mathfrak{X}(M)^r \rightarrow C^\infty(M)$  es  $C^\infty(M)$ -multilineal, entonces  $\exists R \in \Gamma(T^r(M))$  tal que  $S = \overline{R}$ .

**Demostración.** Sea  $z \in T_p M$  y sea  $U, \varphi = (x_1, \dots, x_m)$  carta tal que  $p \in U$ , entonces  $z = \sum_i a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ . Sea  $h \in C^\infty(M)$  tal que  $h(p) = 1$  y soporte  $h \subset U$ . Definiendo  $Z = \sum_i a_i h \frac{\partial}{\partial x_i}$ , tenemos que  $Z(p) = z$ . Por lo tanto, dados  $z_1, \dots, z_r \in T_p M$  existen  $Z_1, \dots, Z_r \in \mathfrak{X}$  tales que  $Z_i(p) = z_i$  y definimos  $R_p : T_p M^r \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$R_p(z_1, \dots, z_r) = S(Z_1, \dots, Z_r)(p).$$

Tenemos que demostrar que la definición no depende de la elección de los  $Z_i \in \mathfrak{X}(M)$ . Por comodidad lo haremos para  $r = 1$ .

LEMITA 1. Si  $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  coinciden en una vecindad  $V$  de  $p$ , entonces  $S(Y)(p) = S(Z)(p)$ .

**Demostración.** Sea  $h \in C^\infty(M)$  con  $h(p) = 1$  y soporte  $h \subset V$ , entonces  $hS(Y) = S(hY) = S(hZ) = hS(Z)$ . Evaluando en  $p$  obtenemos el Lemita 1.

LEMITA 2. Sean  $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  tales que  $Y(p) = Z(p)$ , entonces  $S(Y)(p) = S(Z)(p)$ .

**Demostración.** Sea  $X = Z - Y$  entonces  $X(p) = 0$  y queremos demostrar que  $S(X)(p) = 0$ . Sea  $U, \varphi = (x_1, \dots, x_m)$  carta tal que  $p \in U$ . Sea  $h \in C^\infty(M)$  con  $h = 1$  en una vecindad  $V$  de  $p$  y soporte  $h \subset U$ , entonces  $X$  y  $h^2 X$  coinciden en  $V$ . Pero

$$h^2 X = \sum_{i=1}^m h^2 X(x^i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right), \quad S(h^2 X) = \sum_{i=1}^m h X(x^i) S\left(h \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

Como  $X(p) = 0$ ,  $X(x^i)(p) = 0$  y así, por el Lemita 1

$$S(X)(p) = S(h^2 X)(p) = 0.$$

□

OBSERVACIÓN 2.6. Sea  $p : E \rightarrow M$  un haz vectorial diferenciable. El procedimiento usado en la demostración de la Proposición 2.4, permite construir en una vecindad  $U$  de cualquier punto  $q \in M$ , una base local  $\{s_1, \dots, s_n\} \subset \Gamma(E)$ . Es decir que  $\{s_1(x), \dots, s_n(x)\}$  es una base de  $E_x \forall x \in U$ . En efecto sea  $V, \psi$  una carta de  $p : E \rightarrow M$  con  $q \in V$ . Sea  $U$  vecindad de  $q$  tal que  $\overline{U} \subset V$  y sea  $h \in C^\infty(M, [0, 1])$  con  $h = 1$  en  $U$  y soporte  $h \subset V$ . Para  $i = 1, \dots, n$  sea  $s_i(x) = h(x)\psi^{-1}(x, e_i)$ .

#### 4. Campos vectoriales y flujos

TEOREMA 2.2. Existencia y unicidad.

Sean  $U \subset \mathbb{R}^m$  abierto,  $X \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ .

- Dados  $x_0 \in U$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ , existen  $\varepsilon > 0$  y una única solución  $\alpha : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow U$  a la ecuación diferencial

$$(2.1) \quad x' = X(x)$$

que satisface  $\alpha(t_0) = x_0$ .

- Para cada  $x \in U$  sea  $J(x)$  el intervalo maximal donde esta definida una solución  $J(x) \rightarrow U$  a (2.1) que satisface  $0 \mapsto x$ . Escribiendo  $t \mapsto \varphi_t(x) = \varphi(t, x)$  tal solución, se tiene que el conjunto  $\Omega = \{(t, x) : x \in U, t \in J(x)\}$  es abierto y la función  $\varphi : \Omega \rightarrow U$  es de clase  $C^1$ .
- Si se satisfacen dos de las condiciones  $t \in J(x)$ ,  $t + s \in J(x)$ ,  $s \in J(\varphi_t(x))$ , entonces se satisface la tercera y en tal caso

$$\varphi_{t+s}(x) = \varphi_s(\varphi_t(x)).$$

La función  $\varphi : \Omega \rightarrow U$  dada por el Teorema 2.2 se llama el flujo local definido por el campo vectorial  $X \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ . Para cada  $x \in U$ , la derivada  $A(t) = D\varphi_t(x)$  satisface la ecuación diferencial

$$(2.2) \quad A'(t) = DX(\varphi_t(x))A(t)$$

conocida como la primera variación de 2.1.

PROPOSICIÓN 2.5. Si  $X \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$ , entonces  $\varphi \in C^k(\Omega, U)$

**Demostración. Por inducción.**

Supongamos que el resultado es valido para cualquier campo vectorial de clase  $C^k$  y que  $X \in C^{k+1}(U, \mathbb{R}^m)$ . Consideremos el campo vectorial  $Y(x, u) = (X(x), DX(x)u)$  cuyo flujo local esta dado por

$$\Phi_t(x, u) = (\varphi_t(x), D\varphi_t(x)u).$$

Como  $Y \in C^k(U \times \mathbb{R}^m)$ ,  $\Phi \in C^k(\Omega \times \mathbb{R}^m, U \times \mathbb{R}^m)$ . □

DEFINICIÓN 2.9. Sean  $M$  una variedad diferenciable y  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  una curva diferenciable. Definimos el vector tangente a la curva en  $\alpha(t)$  por  $\alpha'(t) = \alpha_*(d/dt)_t$ .

OBSERVACIÓN 2.7. Sea  $h : M \rightarrow N$  un difeomorfismo y sea  $X \in \mathfrak{X}(M)$  consideremos el campo vectorial  $h_*X \in \mathfrak{X}(N)$  definido por  $h_*X(y) = h_*(X(h^{-1}(y)))$ . Sean  $\alpha : I \rightarrow M$  una curva diferenciable y  $\beta = h \circ \alpha$ . Entonces  $\beta'(t) = h_* \circ \alpha_*(d/dt)_t = h_*(\alpha'(t))$ . Así

$$\alpha'(t) = X(\alpha(t)) \iff \beta'(t) = h_*(X(\alpha(t))) = h_*X(\beta(t)),$$

o sea que  $\alpha$  es una solución de la ecuación diferencial  $x' = X(x)$  si y solo si  $\beta = h \circ \alpha$  es una solución de la ecuación diferencial  $y' = h_*(X)(y)$ . Si  $F : N \rightarrow L$  es otro difeomorfismo  $(F \circ h)_*X = F_*(h_*X)$ . En efecto

$$\begin{aligned} (F \circ h)_*X(F(h(x))) &= (F \circ h)_{*x}(X(x)) = F_{*h(x)}(h_{*x}(X(x))) \\ &= F_{*h(x)}(h_*X(h(x))) = F_*(h_*X)(F(h(x))). \end{aligned}$$

Tenemos ahora la versión para variedades del Teorema 2.2

**TEOREMA 2.3.** *Sea  $M$  una variedad diferenciable y sea  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .*

- *Dados  $p \in M$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ , existen  $\varepsilon > 0$  y una única solución  $\alpha : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow M$  a la ecuación diferencial*

$$(2.3) \quad x' = X(x)$$

*que satisface  $\alpha(t_0) = p$ .*

- *Para cada  $x \in M$  sea  $J(x)$  el intervalo maximal donde esta definida una solución  $J(x) \rightarrow U$  a (2.3) que satisface  $0 \mapsto x$ . Escribiendo  $t \mapsto \varphi_t(x) = \varphi(t, x)$  tal solución, se tiene que el conjunto  $\Omega = \{(t, x) : x \in M, t \in J(x)\}$  es abierto y la función  $\varphi : \Omega \rightarrow M$  es diferenciable.*
- *Si se satisfacen dos de las condiciones  $t \in J(x)$ ,  $t + s \in J(x)$ ,  $s \in J(\varphi_t(x))$ , entonces se satisface la tercera y en tal caso*

$$\varphi_{t+s}(x) = \varphi_s(\varphi_t(x)).$$

**Demostración.** Sea  $(U, \psi)$  carta con  $p \in U$ . Consideremos el campo vectorial diferenciable  $Y = \psi_*X : \psi(U) \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Por el Teorema 2.2 existen  $\varepsilon > 0$  y una única solución  $\beta : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow M$  a la ecuación diferencial  $y' = Y(y)$  que satisface  $\beta(t_0) = \psi(p)$ . Por la Observación 2.7  $\alpha = \psi^{-1} \circ \beta$  es la única solución a (2.3) definida en  $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$  que satisface  $\alpha(t_0) = p$ . Las demás afirmaciones se sigue también del Teorem 2.2.  $\square$

**OBSERVACIÓN 2.8.** La función  $\varphi : \Omega \rightarrow M$  es el flujo local definido por  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Se sigue de la Observación 2.7 y del Teorema 2.3 que si  $h : M \rightarrow N$  es un difeomorfismo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  entonces el flujo local de  $h_*X$  es  $(t, y) \mapsto h \circ \varphi_t \circ h^{-1}$ .

**TEOREMA 2.4.** *Sean  $M$  variedad compacta y  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , entonces  $\Omega = \mathbb{R} \times M$ .*

**Demostración.** Para cada  $x \in M$  sean  $\varepsilon(x) > 0$  y  $U_x$  vecindad de  $x$  tales que  $(-\varepsilon(x), \varepsilon(x)) \times U_x \subset \Omega$ . Sea  $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_k}\}$  cubierta de  $M$  y pongamos  $\varepsilon = \min\{\varepsilon(x_1), \dots, \varepsilon(x_k)\}$ . Para  $t \in \mathbb{R}$ , sean  $k(t) = [2t/\varepsilon]$

y  $s(t) = t - k(t)\varepsilon/2$ . Definamos

$$\varphi_t = \begin{cases} \varphi_{s(t)} \circ \varphi_{\varepsilon/2}^{\circ k(t)} & t \geq 0 \\ \varphi_{s(t)} \circ \varphi_{-\varepsilon/2}^{\circ -k(t)} & t < 0. \end{cases}$$

□

**TEOREMA 2.5.** Caja de flujo

Sean  $M$  una variedad diferenciable y  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Si  $X(p) \neq 0$ , existe una carta  $U, \psi = (x_1, \dots, x_m)$  con  $p \in U$  tal que  $X|_U = \partial/\partial x_1$ .

**Demostración.** Sea  $(V, \phi)$  carta con  $p \in V$ ,  $\phi(p) = 0$  y  $\phi_*(X(p)) = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ . Sea  $\varphi_t$  el flujo local de  $\phi_*X$ .

Definimos  $h : (-\varepsilon, \varepsilon)^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  por  $h(y_1, \dots, y_m) = \varphi_{y_1}(0, y_2, \dots, y_m)$  y observamos que

$$h(y_1 + t, \dots, y_m) = \varphi_{y_1+t}(0, y_2, \dots, y_m) = \varphi_t(h(y_1, \dots, y_m)),$$

Así  $D_1h(y) = \phi_*X(h(y))$  y  $D_ih(0) = e_i$  para  $i > 1$ . Entonces  $Dh(0) = I$  y por el teorema de la función inversa,  $h$  es un difeomorfismo de una vecindad del origen en otra. Sea  $\psi = h^{-1} \circ \phi$ , entonces

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{\psi^{-1}(y)} = \psi_{*y}^{-1}(e_1) = \phi_{*h(y)}^{-1}(D_1h(y)) = X(\psi^{-1}(y)).$$

□

## 5. La derivada de Lie

**DEFINICIÓN 2.10.** Sea  $F : M \rightarrow N$  diferenciable. Definimos

- $F^* : C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(M)$  por  $F^*g = g \circ F$ .
- $F^* : \Gamma(T^r(N)) \rightarrow \Gamma(T^r(M))$  por  $(F^*T)(x) = (F_{*x})^*(T(F(x)))$ .

**PROPOSICIÓN 2.6.** Si  $F : M \rightarrow N$  y  $G : N \rightarrow L$  son diferenciables.

- $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$
- Si  $g \in C^\infty(N)$ ,  $dF^*g = F^*dg$ .

**Demostración.**

$$d(F^*g)_x = dg_{F(x)} \circ F_{*x} = (F_{*x})^*(dg_{F(x)}) = (F^*dg)(x).$$

**DEFINICIÓN 2.11.** Sean  $M$  variedad diferenciable,  $X \in \mathfrak{X}(M)$  y  $\varphi_t$  el flujo local de  $X$ . Para  $f \in C^\infty(M)$ ,  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $R \in \Gamma(T^r(M))$  definimos la derivada de Lie  $L_X$  por

$$L_X f(x) = X(x)(f) = df_x(X(x)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_t^* f(x),$$

$$L_X Y(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\varphi_{-t*} Y)(x),$$

$$L_X R(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_t^* R(x).$$

PROPOSICIÓN 2.7. Con la notación de la Definición 2.11 y  $F : M \rightarrow N$  difeomorfismo.

- (1)  $L_X \circ F^* = F^* \circ L_{F_*X}$ ,  $F_*(L_X Y) = L_{F_*X} F_* Y$ .
- (2)  $L_X(fY) = fL_X(Y) + L_X(f)Y$ ,  $L_X(fR) = fL_X(Y) + L_X(f)R$
- (3)  $d(L_X f) = L_X(df)$
- (4) Si  $Y_1, \dots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$ , entonces

$$L_X(R(Y_1, \dots, Y_r)) = L_X(R)(Y_1, \dots, Y_r) + \sum_{i=1}^r R(Y_1, \dots, L_X(Y_i), \dots, Y_r).$$

**Demostración.** (1) El flujo local de  $F_*X$  es  $F \circ \varphi_t \circ F^{-1}$ . Así

$$\begin{aligned} L_X(F^*T)(x) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* F^* T(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (F^*(F^{-1})^* \varphi_t^* F^* T)(x) \\ &= (F_{*x})^* \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (F \circ \varphi_t \circ F^{-1})^* T(F(x)) \\ &= (F_{*x})^* L_{F_*X} T(F(x)) = (F^* \circ L_{F_*X})(x). \\ L_{F_*X} F_* Y(F(x)) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((F \circ \varphi_{-t} \circ F^{-1})_* F_* Y) F(x) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (F_*(\varphi_{-t})_* Y) F(x) = F_{*x} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_{-t})_* Y(x) \\ &= F_{*x}(L_X Y(x)) = F_*(L_X Y)(F(x)). \end{aligned}$$

Para demostrar (3) primero supongamos que  $M$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} (L_X df)(x) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_t^* df)(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (d\varphi_t^* f)(x) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} (f \circ \varphi)(0, x) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} (f \circ \varphi)(0, x) = d(L_X f)(x). \end{aligned}$$

En el caso general sea  $x \in M$  y sea  $(U, \psi)$  una carta alrededor de  $x$ . Por el inciso (1), en la vecindad  $U$  tenemos

$$\begin{aligned} L_X(df) &= \psi^*(L_{\psi_*X}(\psi^{-1*}df)) = \psi^*(L_{\psi_*X}d(\psi^{-1*}f)) \\ &= \psi^*d(L_{\psi_*X}(\psi^{-1*}f)) = d\psi^*(L_{\psi_*X}(\psi^{-1*}f)) = d(L_X f) \end{aligned}$$

(4) Observemos que

$$\begin{aligned} \varphi_t^*(R(Y_1, \dots, Y_r))(x) &= R(Y_1, \dots, Y_r)(\varphi_t(x)) \\ &= R(\varphi_t(x))(Y_1(\varphi_t(x)), \dots, Y_r(\varphi_t(x))) \\ &= R(\varphi_t(x))(\varphi_{t*x}((\varphi_{-t*}Y_1)(x)), \dots, \varphi_{t*x}((\varphi_{-t*}Y_r)(x))) \\ &= (\varphi_t^*R)(x)((\varphi_{-t*}Y_1)(x), \dots, (\varphi_{-t*}Y_r)(x)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_X(R(Y_1, \dots, Y_r))(x) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi_t^* R)(x) ((\varphi_{-t*} Y_1)(x), \dots, (\varphi_{-t*} Y_r)(x)) \\ &= L_X R(x)(Y_1(x), \dots, Y_r(x)) + \sum_{i=1}^r R(x)(Y_1(x), \dots, L_X Y_i(x), \dots, Y_r(x)). \end{aligned}$$

La demostración de (2) es similar y más sencilla.  $\square$

PROPOSICIÓN 2.8. Sean  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $f \in C^\infty(M)$ . Entonces

$$(L_X Y)(f) = [X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

**Demostración.**  $f \circ \varphi(t, x) = f(x) + tg(t, x)$ , donde

$$g(t, x) = \int_0^1 D_1(f \circ \varphi)(ts, x), \quad g(0, x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f \circ \varphi(t, x) = X(f)(x).$$

$$(L_X Y)(f)(x) = (L_X Y)(x)(f) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi_{-t*} Y(x)(f), \text{ pero}$$

$$\begin{aligned} (\varphi_{-t*} Y)(x)(f) &= [\varphi_{-t*}(Y(\varphi_t(x)))](f) = Y(\varphi_t(x))(f \circ \varphi_{-t}) \\ &= Y(\varphi_t(x))(f - tg(-t, \cdot)) = (Y(f))(\varphi_t(x)) - tY(g(-t, \cdot))(\varphi_t(x)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi_{-t*} Y)(x)(f) &= X(Y(f))(x) - Y(g(0, \cdot))(x) \\ &= (X(Y(f)) - Y(X(f)))(x). \end{aligned}$$

$\square$

COROLARIO 2.6. Identidad de Jacobi

Si  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ .

Esta igualdad se puede escribir  $L_{[X, Y]} = L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X$ .

PROPOSICIÓN 2.9. Sean  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  con flujos locales  $\varphi_t, \psi_t$ . Entonces

$$[X, Y] = 0 \iff \varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$$

**Demostración.** El flujo local de  $(\psi_{-s})_* X$  es  $\psi_{-s} \circ \varphi_t \circ \psi_s$  y

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Big|_{s=t} (\psi_{-s})_* X &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\psi_{-(t+s)})_* X = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\psi_{-t})_* ((\psi_{-s})_* X) \\ &= (\psi_{-t})_* (L_Y X). \end{aligned}$$

Si  $L_Y X = 0$  entonces  $(\psi_{-s})_* X = \psi_{0*} X = X$  y así  $\psi_{-s} \circ \varphi_t \circ \psi_s = \varphi_t$ .

Recíprocamente si  $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$ , el flujo local de  $(\psi_{-s})_* X$  es  $\varphi_t$ , o sea  $(\psi_{-s})_* X = X$  y entonces  $L_Y X = (d(\psi_{-s})_* X/ds)_{s=0} = 0$ .  $\square$

PROPOSICIÓN 2.10. Sean  $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$  linealmente independientes en  $p \in M$  y tales que  $\forall_{i,j=1,\dots,k} [X_i, X_j] = 0$ . Entonces hay una carta  $U, \psi = (x_1, \dots, x_m)$  con  $p \in U$  tal que

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, X_k = \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

**Demostración.** Sea  $V, \phi$  carta con  $\phi(p) = 0$  y sean  $Y_i = \phi_* X_i$ , entonces  $Y_1(0), \dots, Y_k(0)$  son linealmente independientes y completamos a una base de  $\mathbb{R}^m$  con  $Y_{k+1}, \dots, Y_m$ . Sea  $A \in Gl(n)$  tal que  $AY_i(0) = e_i, i = 1, \dots, k, AY_{k+j} = e_{k+j}$ . Sea  $\varphi_t^i$  el flujo local de  $Z_i = AY_i, i = 1, \dots, k$  y definamos

$$h(x_1, \dots, x_m) = \varphi_{x_1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{x_k}^k(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_m).$$

Como  $[Z_i, Z_j] = A\phi_*[X_i, X_j] = 0$ , para  $i = 1, \dots, k$  tenemos

$$h(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_m) = \varphi_t^i \circ h(x_1, \dots, x_m),$$

$$Dh(x)e_i = D_i h(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^i \circ h(x) = Z_i(h(x))$$

Así  $D_i h(0) = Z_i(0) = e_i, i = 1, \dots, k, D_{k+j} h(0) = e_{k+j}$  y entonces  $h$  es un difeomorfismo de una vecindad del origen en otra.

Sea  $\psi = h^{-1} \circ A \circ \phi$ , entonces

$$\psi_* X_i = h_*^{-1} A \phi_* X_i = h_*^{-1} Z_i = e_i.$$

DEFINICIÓN 2.12. Un grupo  $(G, \cdot)$  es un grupo de Lie si es una variedad diferenciable y la transformación  $\mu : G \times G \rightarrow G$  dada por  $\mu(g, h) = g \cdot h^{-1}$  es diferenciable.

Sea  $G$  un grupo de Lie. Denotaremos por  $e$  la identidad de  $G$ . Para cada  $a \in G$  definimos las traslaciones izquierda y derecha  $L_a, R_a : G \rightarrow G$  mediante  $L_a(g) = a \cdot g, R_a(g) = g \cdot a$ . Tenemos también los automorfismos interiores  $I_g = L_a \circ R_{a^{-1}}$ .

Un campo  $X \in \mathfrak{X}(G)$  se llama invariante por la izquierda si  $L_{a*} X = X$  para todo  $a \in G$ . Denotaremos por  $\mathfrak{g}$  el conjunto de campos invariantes por la izquierda.

OBSERVACIONES 2.9. Si  $X, Y \in \mathfrak{g}$  entonces  $[X, Y] \in \mathfrak{g}$  ya que

$$L_{a*}[X, Y] = [L_{a*}X, L_{a*}Y] = [X, Y] \forall a \in G.$$

Si  $X \in \mathfrak{g}$ , entonces  $X(g) = (L_{g*}X)(g) = L_{g*e}(X(g^{-1}g)) = L_{g*e}(X(e))$ . Así hay un isomorfismo  $T_e G \cong \mathfrak{g}, x \mapsto X$  donde  $X(g) = L_{g*e}(x)$ . Si  $X \in \mathfrak{g}$  con  $X(e) = x$ , denotaremos por  $t \mapsto e^{tx} = \exp(tx)$  a la solución de  $g' = X(g)$  con  $0 \mapsto e$ . Entonces el flujo de  $X$  esta dado por  $\varphi_t(g) = g \cdot e^{tx} = R_{\exp(tx)}(g)$  ya que

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g \cdot e^{tx} = L_{g*e}(x) = X(g).$$

Si  $X, Y \in \mathfrak{g}$  con  $X(e) = x, Y(e) = y$  definiremos  $[x, y] = [X, Y](e)$ . Así

$$\begin{aligned} [x, y] &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (R_{\exp(-tx)*} Y)(e) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} R_{\exp(-tx)*} (Y(e^{tx})) \\ (2.4) \quad &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} R_{\exp(-tx)*} L_{\exp(tx)*} (y) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (R_{\exp(-tx)} L_{\exp(tx)})_* (y). \end{aligned}$$

Como  $h_{*e}(y) = d/ds|_{s=0} h(e^{sy})$  para  $h \in C^\infty(G, G)$ , tenemos

$$[x, y] = \left. \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \right|_{(0,0)} e^{tx} e^{sy} e^{-tx} = -[y, x] = \left. \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \right|_{(0,0)} e^{-sy} e^{tx} e^{sy}.$$

La aparente diferencia entre las dos derivadas se explica con

$$[x, y] = \left. \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \right|_{(0,0)} e^{-sy} e^{tx} e^{sy} e^{-tx}$$

**DEFINICIÓN 2.13.** Sea  $G$  un grupo de Lie. Cualquiera de  $\mathfrak{g}$  ó  $T_e G$  con la correspondiente operación  $[\cdot, \cdot]$  se llama el *álgebra de Lie* de  $G$  y la transformación  $T_e G \rightarrow G, x \mapsto e^x$  se conoce como la *transformación exponencial*.

**OBSERVACIONES 2.10.** Si  $x_1, \dots, x_k$  es una base de  $T_e G$ , entonces los campos  $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{g}$  con  $X_i(e) = x_i$ , forman una base de  $T_g G$  en cada punto  $g \in G$ . Por lo tanto  $G$  es paralelizable mediante el difeomorfismo  $G \times \mathfrak{g} \cong TG, (g, X) \rightarrow X(g)$ .

Definimos  $Ad(g) : (I_g)_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  y  $ad_x = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Ad_{\exp(tx)}$ .

Puesto que  $Ad(gh) = Ad(g) \circ Ad(h)$  y  $Ad(g)$  es un isomorfismo del algebra de Lie,  $Ad$  define una acción del grupo en su álgebra. Por (2.4) y la identidad de Jacobi

$$\begin{aligned} ad_x y &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((I_{\exp(tx)})_* (y) = [x, y] \\ ad[x, z] &= ad_x \circ ad_z - ad_z \circ ad_x \end{aligned}$$

y entonces  $ad$  define un homomorfismo entre el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  y el álgebra de Lie  $\text{Hom}(\mathfrak{g})$  con la operación natural.

## 6. Conexiones. Transporte paralelo. Geodésicas

En esta sección  $\pi : E \rightarrow M$  denotara un haz vectorial diferenciable

**DEFINICIÓN 2.14.** Una conexión en el haz  $\pi : E \rightarrow M$ , es una función  $\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$  tal que para  $f \in C^\infty(M), s \in \Gamma(E)$

$$\nabla(fs) = f\nabla s + df \otimes s.$$

OBSERVACIÓN 2.11. Sea  $\{s_1, \dots, s_n\} \subset \Gamma(E)$  una base local en  $U$ . Definimos la matriz  $\omega$  de la conexión para esa base local por

$$\nabla s_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \otimes s_j, \quad \omega_{ij} \in \Gamma(T^*M).$$

Si  $\{s'_1, \dots, s'_n\} \subset \Gamma(E)$  es otra base local en  $U$ ,

$$s'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} s_j, \quad s_k = \sum_{l=1}^n a_{kl}^{-1} s'_l$$

$$\begin{aligned} \nabla s'_i &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \nabla s_j + da_{ij} \otimes s_j = \sum_{j=1}^n a_{ij} \sum_{k=1}^n \omega_{jk} \otimes s_k + \sum_{k=1}^n da_{ik} \otimes s_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_{jk} + da_{ik} \right) \otimes s_k = \sum_{k,l=1}^n (da_{ik} a_{kl}^{-1} + \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_{jk} a_{kl}^{-1}) \otimes s'_l \end{aligned}$$

O sea que la matriz de la conexión para la nueva base local es

$$\omega' = da \cdot a^{-1} + a \cdot \omega \cdot a^{-1}.$$

DEFINICIÓN 2.15. Sea  $\nabla$  una conexión en  $\pi : E \rightarrow M$

- Para  $X \in \mathfrak{X}(M)$  definimos la derivada covariante de la sección  $s$  en la dirección de  $X$  como  $\nabla_X s = \nabla s(X)$ . Si  $\omega$  es la matriz de la conexión en una base, es costumbre escribir

$$\Gamma_{ij}^k = \omega_{jk} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

- Si  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es una métrica en  $E$ , la conexión  $\nabla$  se llama compatible con  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  si para todo  $s, r \in \Gamma(E)$

$$d\langle s, r \rangle = \langle s, \nabla r \rangle + \langle \nabla s, r \rangle.$$

- Si  $E = TM$  definimos la torsión de la conexión como

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

y la conexión se llama simétrica si  $T = 0$ .

OBSERVACIÓN 2.12. Si  $X \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\{s_1, \dots, s_n\} \subset \Gamma(E)$  es una base local, para cualquier  $s \in \Gamma(E)$  tenemos  $s = \sum_i f_i s_i$  y así

$$\nabla s(X) = \sum_{i=1}^n \left( X(f_i) s_i + f_i \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(X) s_j \right) = \sum_{j=1}^n \left( X(f_j) + \sum_{i=1}^n f_i \omega_{ij}(X) \right) s_j.$$

Por lo tanto para calcular  $\nabla s(X)$  en  $q$  solo hay que conocer  $X(q)$ , las componentes de  $s$  en  $q$  y sus derivadas en la dirección de  $X(q)$ . Sea  $\gamma : I \rightarrow M$  una curva diferenciable y sea  $s : I \rightarrow E$  una función

diferenciable tal que  $s(t) \in \pi^{-1}(\gamma(t)), \forall t \in I$ . Decimos que  $s$  es una sección a lo largo de  $\gamma$ . Escribiendo  $s(t) = \sum_i f_i(t)s_i(\gamma(t))$  definimos la derivada covariante de  $s$  a lo largo de la curva mediante

$$(2.5) \quad \frac{Ds}{dt}(t) = \sum_{j=1}^n \left( f'_j(t) + \sum_{i=1}^n f_i(t)\omega_{ij}(\gamma'(t)) \right) s_j(\gamma(t)).$$

Decimos que la sección  $s$  es paralela a lo largo de  $\gamma$  si  $Ds/dt \equiv 0$

**TEOREMA 2.7.** Sean  $\nabla$  una conexión en el haz  $\pi : E \rightarrow M$  y  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  una curva diferenciable. Para todo  $v \in \pi^{-1}(\gamma(a))$  hay una única sección  $s$  paralela a lo largo de  $\gamma$  tal que  $s(a) = v$ . Escribiendo  $s(b) = T_\gamma(v)$ , la transformación  $T_\gamma : \pi^{-1}(\gamma(a)) \rightarrow \pi^{-1}(\gamma(b))$  es lineal.

**Demostración.** Dividamos el intervalo  $[a, b]$  en subintervalos  $[t_k, t_{k+1}]$ ,  $k = 0, \dots, l-1$  tales que  $\gamma([t_k, t_{k+1}]) \subset U_k$  y hay una base local  $\{s_i^k\}$  en  $U_k$ . Sea  $\omega^k$  la matriz de la conexión para esa base local. Para todo  $w \in \mathbb{R}^n$ , el sistema lineal en  $[t_k, t_{k+1}] \times \mathbb{R}^n$

$$(2.6) \quad f' = -f \omega_{\gamma(t)}^k(\gamma'(t))$$

tiene una única solución en  $f : [t_k, t_{k+1}] \rightarrow \mathbb{R}^n$  que satisface  $f(t_k) = w$ . Sea  $f^0 : [a, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  la solución del sistema (2.6)  $k = 0$ , que satisface  $(\gamma(a), f^0(a)) = \psi_0(v)$ . Definimos

$$s(t) = \sum_i f_i^0(t)s_i^0(\gamma(t)), t \in [a, t_1].$$

Inductivamente, sea  $f^k : [t_k, t_{k+1}] \rightarrow \mathbb{R}^n$  la solución del sistema (2.6) que satisface  $(\gamma(t_k), f^k(t_k)) = \psi_k(s(t_k))$  y definamos

$$s(t) = \sum_i f_i^k(t)s_i^k(\gamma(t)), t \in [t_k, t_{k+1}].$$

Que la transformación  $T_\gamma$  es lineal se sigue del hecho de que el conjunto de soluciones de un sistema lineal es un espacio vectorial.  $\square$

**OBSERVACIÓN 2.13.** Supongamos que la conexión  $\nabla$  es compatible con una métrica  $\langle, \rangle$ . Si  $s, r$  son secciones paralelas a lo largo de  $\gamma$

$$\frac{d}{dt} \langle s(t), r(t) \rangle = \left\langle \frac{Ds}{dt}(t), r(t) \right\rangle + \left\langle s(t), \frac{Dr}{dt}(t) \right\rangle = 0.$$

Así  $\langle s(t), r(t) \rangle$  es constante y la transformación  $T_\gamma$  preserva la métrica.

Si  $\{s_1, \dots, s_n\} \subset \Gamma(E)$  es una base local ortonormal, entonces

$$0 = \langle s_i, \nabla s_j \rangle + \langle \nabla s_i, s_j \rangle = \omega_{ji} + \omega_{ij}$$

o sea que  $\omega$  es antisimétrica.

TEOREMA 2.8. Levi Civita.

Sea  $\langle, \rangle$  una métrica riemanniana en la variedad diferenciable  $M$ . Existe una única conexión en  $TM$  compatible con la métrica y simétrica.

**Demostración.** Supongasé que  $\nabla$  es compatible con la métrica y simétrica. Para  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \\ Y\langle Z, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle \\ Z\langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle = \\ \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2\langle \nabla_Y X, Z \rangle \end{aligned}$$

$$(2.7) \quad 2\langle \nabla_Y X, Z \rangle =$$

$$X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle.$$

Lo que demuestra la unicidad. Por otra parte la ecuación (2.7) define una conexión y se comprueba fácilmente que es simétrica y compatible con la métrica.  $\square$

DEFINICIÓN 2.16. Sea  $\langle, \rangle$  una métrica riemanniana en la variedad  $M$  y sea  $\nabla$  la conexión de Levi-Civita. Una curva  $\gamma : I \rightarrow M$  se llama geodésica si  $D\gamma'/dt = 0$ .

Si en coordenadas locales  $\varphi(\gamma(t)) = (a_1(t), \dots, a_n(t))$ , entonces

$$\gamma'(t) = \sum_{i=1}^n a'_i(t) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\gamma(t)}$$

y se sigue de la ecuación (2.5) que  $\gamma$  es una geodésica si y sólo si

$$(2.8) \quad a''_k(t) + \sum_{i=1}^n \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) a'_i(t) a'_j(t) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

EJEMPLO 2.9. En un grupo de Lie  $G$  siempre podemos definir una métrica riemanniana invariante por la izquierda. De hecho sea  $\langle, \rangle_e$  cualquier métrica en  $T_e G$  y definamos  $\forall g \in G$

$$\langle, \rangle_g = (L_{g^{-1}}^*)_g(\langle, \rangle_e).$$

Para  $\langle, \rangle$  invariante por la izquierda y  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , tenemos que  $\langle X, Y \rangle$  es constante. Si  $\langle, \rangle = 0$  es también invariante por la derecha,  $L_X \langle, \rangle = 0$

y así, por (4) de la Proposición 2.7

$$(2.9) \quad \begin{aligned} Z\langle X, Y \rangle &= L_Z\langle \cdot, \cdot \rangle(X, Y) + \langle [Z, X], Y \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle \\ &\langle [Z, X], Y \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle = 0. \end{aligned}$$

La conexión dada por  $\nabla_X Y = [X, Y]/2$  para  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , es la conexión de Levi-Civita ya que es compatible con la métrica por (2.9) y

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = \frac{1}{2}[X, Y] - \frac{1}{2}[Y, X] = [X, Y].$$

Como  $\nabla_X X = 0$  para  $X \in \mathfrak{g}$ , tenemos que las curvas  $t \mapsto e^{tx}$  son geodésicas.

En un grupo compacto siempre existen métricas bi-invariantes.



## CAPÍTULO 3

### Formas diferenciales

#### 1. El algebra exterior

Para  $V$  espacio vectorial de dimensión finita, sea

$$\wedge^k V^* = \{\omega \in V^{*\otimes k} : \omega(v_1, \dots, v_k) = 0, \text{ si } \exists i < j \text{ tal que } v_i = v_j\}.$$

$$\begin{aligned} \text{Si } \omega \in \wedge^k V^*, \omega(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_k) &= 0, \\ \Rightarrow \omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_k) + \omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) \\ + \omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) + \omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_j, \dots, v_k) &= 0, \end{aligned}$$

y así  $\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$

DEFINICIÓN 3.1. Sea  $S_k$  el grupo de permutaciones de un conjunto de  $k$  elementos y sea  $A_k$  el subgrupo de permutaciones pares. Para  $\sigma \in S_K$  sea  $\hat{\sigma}(v_1, \dots, v_k) = (v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$ . Para  $T \in V^{*\otimes k}$  definimos

$$\text{Alt}(T) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_K} (\text{sgn } \sigma) T \circ \hat{\sigma}$$

Nótese que  $\hat{\tau}\hat{\sigma}(v_1, \dots, v_k) = \hat{\tau}(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = (v_{\sigma\tau(1)}, \dots, v_{\sigma\tau(k)}) = (\sigma\tau)\hat{\sigma}(v_1, \dots, v_k)$  y así  $\hat{\tau}\hat{\sigma} = (\sigma\tau)\hat{\sigma}$ .

PROPOSICIÓN 3.1. *Alt es una proyección de  $V^{*\otimes k}$  sobre  $\wedge^k V^*$ :*

- (1)  $\text{Alt}(V^{*\otimes k}) \subset \wedge^k V^*$ .
- (2)  $\text{Alt}|_{\wedge^k V^*} = \text{id}|_{\wedge^k V^*}$ .

**Demostración.**

(1) Si  $v_i = v_j$  para algun par  $i < j$ , sea  $\tau = (ij)$ . Entonces  $(\tau\sigma)\hat{\sigma}(v_1, \dots, v_k) = \hat{\sigma}\hat{\tau}(v_1, \dots, v_k) = \hat{\sigma}(v_1, \dots, v_k)$  para todo  $\sigma \in S_K$ .

$$\begin{aligned} k! \text{Alt}(T)(v_1, \dots, v_k) &= \sum_{\sigma \in S_K} (\text{sgn } \sigma) T \circ \hat{\sigma}(v_1, \dots, v_k) \\ &= \sum_{\sigma \in A_k} T \circ \hat{\sigma}(v_1, \dots, v_k) - \sum_{\sigma \in A_k} T \circ (\tau\sigma)\hat{\sigma}(v_1, \dots, v_k) = 0 \end{aligned}$$

(2) Sean  $\omega \in \wedge^k V^*$ ,  $\tau = (12)$ , entonces  $\omega \circ \hat{\tau} = -\omega$  y  $\omega \circ \hat{\sigma} = \omega \forall \sigma \in A_k$ .  
Entonces

$$\text{Alt}(\omega) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in A_K} \omega \circ \hat{\sigma} - \omega \circ (\sigma\tau) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in A_K} \omega - \omega \circ \hat{\tau} \circ \hat{\sigma} = \frac{2}{k!} \sum_{\sigma \in A_K} \omega = \omega.$$

**DEFINICIÓN 3.2.** Para  $\omega \in \wedge^k V^*$ ,  $\eta \in \wedge^l V^*$  definimos

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta) \in \wedge^{k+l} V.$$

**PROPOSICIÓN 3.2.** *El producto exterior  $\wedge$  satisface*

- (1) *Es bilineal*
- (2) *Si  $f : W \rightarrow V$  es lineal, entonces  $f^*(\wedge^k V^*) \subset \wedge^k W^*$  y*

$$f^*(\omega \wedge \eta) = (f^*\omega) \wedge (f^*\eta).$$

- (3) *Si  $\omega \in \wedge^l V^*$ ,  $\eta \in \wedge^k V^*$ ,  $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$ .*

**Demostración.** (3)

$$\begin{aligned} k!l! \omega \wedge \eta &= (-1)^l \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\text{sgn } \sigma) (\omega \otimes \eta) \circ ((1 \cdots l+1)\sigma) \\ &= (-1)^{2l} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\text{sgn } \sigma) (\omega \otimes \eta) \circ ((2 \cdots l+2)(1 \cdots l+1)\sigma) \\ \dots &= (-1)^{kl} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\text{sgn } \sigma) (\omega \otimes \eta) \circ ((k \cdots l+k) \cdots (1 \cdots l)\sigma) \\ &= (-1)^{kl} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\text{sgn } \sigma) (\eta \otimes \omega) \circ \hat{\sigma} = (-1)^{kl} k!l! \eta \wedge \omega \end{aligned}$$

**PROPOSICIÓN 3.3.** *Sean  $S \in V^{*\otimes k}$ ,  $T \in V^{*\otimes l}$ ,  $\omega \in \wedge^k V^*$ ,  $\eta \in \wedge^l V^*$ ,  $\theta \in \wedge^r V^*$ .*

- (1) *Si  $\text{Alt}(S) = 0$ ,  $\text{Alt}(S \otimes T) = \text{Alt}(T \otimes S) = 0$ .*
- (2)  *$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$*

**Demostración.** (1) Consideremos el subgrupo

$$\hat{S}_k = \{\sigma \in S_{k+l} : \sigma|_{\{k+1, \dots, k+l\}} = \text{id}|_{\{k+1, \dots, k+l\}}\}$$

y las clases laterales

$$\{\sigma \circ \hat{S}_k : \sigma \in S_{k+l}\} = \{\sigma_1 \circ \hat{S}_k, \dots, \sigma_m \circ \hat{S}_k\}, m = (k+l)!/k!$$

$$\begin{aligned}
(k+l)! \text{Alt}(S \otimes T) &= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\text{sgn } \sigma) S \otimes T \circ \hat{\sigma} \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{\sigma \in \hat{S}_k} \text{sgn}(\sigma_i \sigma) (S \otimes T) \circ (\sigma_i \sigma) \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{\sigma \in \hat{S}_k} (\text{sgn } \sigma) S \circ \hat{\sigma} \circ (\sigma_i|_{\{1, \dots, k\}}) \otimes \text{sgn}(\sigma_i) T \circ (\sigma_i|_{\{k+1, \dots, k+l\}}) \\
&= \sum_{i=1}^m k! \text{Alt}(S) \circ (\sigma_i|_{\{1, \dots, k\}}) \otimes \text{sgn}(\sigma_i) T \circ (\sigma_i|_{\{k+1, \dots, k+l\}}) = 0
\end{aligned}$$

- (2) Por (2) de la Proposición 3.1  $\text{Alt}(\text{Alt}(\omega \otimes \eta) - \omega \otimes \eta) = 0$ .  
Por (1) de esta Proposición  $\text{Alt}(\text{Alt}(\omega \otimes \eta) \otimes \theta) = \text{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta)$   
Similarmente  $\text{Alt}(\omega \otimes \text{Alt}(\eta \otimes \theta)) = \text{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta)$ . Así,

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \frac{(k+l+r)!}{k!l!r!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta) = \omega \wedge (\eta \wedge \theta).$$

□

**COROLARIO 3.1.** Sean  $\phi_1, \dots, \phi_k \in V^*$ ,  $v_1, \dots, v_k \in V$ , entonces

$$\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k = k! \text{Alt}(\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_k) = \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn } \sigma (\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_k) \circ \sigma,$$

$$\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k(v_1, \dots, v_k) = \det(\phi_i(v_j)).$$

**PROPOSICIÓN 3.4.** Sea  $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$  una base de  $V^*$ , entonces

$\{\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge \phi_{i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$  es una base de  $\wedge^k V^*$ .

Así  $\dim \wedge^k V^* = \binom{n}{k}$

**Demostración.** Sabemos que  $\{\phi_{i_1} \otimes \dots \otimes \phi_{i_k} : 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\}$  es una base de  $V^{*\otimes k}$  y si  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es la base de  $V$  dual a  $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ , entonces para cualquier  $\omega \in V^{*\otimes k}$

$$\omega = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \omega(v_1, \dots, v_k) \phi_{i_1} \otimes \dots \otimes \phi_{i_k}$$

Si  $\omega \in \wedge^k V^*$  entonces

$$\begin{aligned} \omega = \text{Alt } \omega &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \omega(v_1, \dots, v_k) \text{Alt}(\phi_{i_1} \otimes \dots \otimes \phi_{i_k}) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \omega(v_1, \dots, v_k) \phi_{i_1} \wedge \dots \wedge \phi_{i_k} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \omega(v_1, \dots, v_k) \phi_{i_1} \wedge \dots \wedge \phi_{i_k}. \end{aligned}$$

Supongamos que

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_k} \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k = 0,$$

evaluando en  $(v_{j_1}, \dots, v_{j_k})$

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_k} \det(\phi_{i_r}(v_{j_s})) &= 0 \\ \alpha_{j_1 \dots j_k} &= 0. \end{aligned}$$

**OBSERVACIONES 3.1.** Si  $\dim V = n$ , cualquier  $\omega \in \wedge^n V^* \setminus \{0\}$  define una orientación  $\mathcal{O}$  en  $V$  así:  $(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{O} \iff \omega(v_1, \dots, v_n) > 0$ .

Si  $\dim V = \dim W = n$ ,  $f^* : \wedge^n W^* \rightarrow \wedge^n V^*$  es la versión libre de bases del determinante.

**PROPOSICIÓN 3.5.**  $\phi_1, \dots, \phi_k \in V^*$  son linealmente independientes si y sólo si  $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k \neq 0$ .

**Demostración.** Si  $\phi_1, \dots, \phi_k \in V^*$  son linealmente independientes completamos a una base  $\phi_1, \dots, \phi_n$  de  $V^*$ , entonces  $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k$  forma parte de una base de  $\wedge^k V^*$  y así, no es cero.

Recíprocamente supongamos que  $\phi_1, \dots, \phi_k \in V^*$  son linealmente dependientes, digamos  $\phi_k = \sum_{i < k} a_i \phi_i$ . Entonces  $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k = \sum_{i < k} a_i \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_{k-1} \wedge \phi_i = 0$ .  $\square$

## 2. Formas diferenciales

**DEFINICIÓN 3.3.** Para  $\pi : E \rightarrow M$  un haz vectorial diferenciable definimos

$$\wedge^k E = \bigcup_{p \in M} \wedge^k E_p, \quad \Omega^k(E) = \Gamma(\wedge^k E).$$

Un elemento de  $\Omega^k(M) = \Omega^k(T^*M)$  se llama  $k$ -forma diferencial en  $M$ . Si  $\omega \in \Omega^k(M)$ ,  $\eta \in \Omega^l(M)$  definimos  $(\omega \wedge \eta)(p) = \omega(p) \wedge \eta(p)$

OBSERVACIONES 3.2. Si  $F : N \rightarrow M$  es diferenciable y  $\omega \in \Omega^k(M), \eta \in \Omega^l(M)$  entonces  $F^*(\omega \wedge \eta) = F^*(\omega) \wedge F^*(\eta)$ .

En cada punto  $p \in \mathbb{R}^n$ ,  $\{dx_p^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_p^{i_k} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$  es base de  $\wedge^k T_p^* \mathbb{R}^n$ . Así, cualquier  $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$  se escribe

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \quad \alpha_{i_1 \dots i_n} \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Por brevedad, para  $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$  utilizaremos la notación  $I = (i_1, \dots, i_n)$  y escribiremos  $\omega = \sum_I \alpha_I dx^I$ .

Si  $U \subset \mathbb{R}^n$  es abierto  $F = (F^1, \dots, F^m), F^i \in C^\infty(U), g \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ , tenemos

$$\begin{aligned} F^*(g dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_k}) &= F^*g F^* dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge F^* dy^{j_k} \\ &= g \circ F dF^* y^{j_1} \wedge \cdots \wedge dF^* y^{j_k} = g \circ F dF^{j_1} \wedge \cdots \wedge dF^{j_k} \\ &= g \circ F \sum_I \det \left( \frac{\partial F^{j_r}}{\partial x^{i_s}} \right) dx^I. \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 3.6. Una variedad de dimensión  $n$  es orientable si y sólo si posee una  $n$ -forma que nunca se anula.

**Demostración.** Si  $M$  es orientable hay un atlas  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  tal que  $\det D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) > 0$ . Escribiendo  $\varphi_\alpha = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ , definimos

$$\omega_\alpha = dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n,$$

Sean  $\{h_\alpha\}$  una partición de la unidad subordinada a  $\{U_\alpha\}$ , entonces  $\omega = \sum_\alpha h_\alpha \omega_\alpha$  nunca se anula. En efecto, sea  $p \in M$  y sea  $\beta$  tal que  $h_\beta(p) > 0$ . Para cualquier  $\alpha$ ,  $\omega_\alpha = \det D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) \circ \varphi_\beta \omega_\beta$ . Así

$$\omega(p) = \left( \sum_\alpha h_\alpha(p) \det D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(\varphi_\beta(p)) \right) \omega_\beta(p).$$

Recíprocamente, sea  $\omega$  una  $n$ -forma en  $M$  que nunca se anula. Sea  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  un atlas con  $U_\alpha$  conexo  $\forall \alpha$ , entonces

$$\omega|_{U_\alpha} = f_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n \quad f_\alpha \in C^\infty(U_\alpha).$$

Como  $f_\alpha$  no se anula y  $U_\alpha$  es conexo,  $\text{sgn } f_\alpha$  es constante y podemos entonces suponer que  $f_\alpha > 0$ . En  $U_\alpha \cap U_\beta$  tenemos

$$f_\alpha \det D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) \circ \varphi_\beta dx_\beta^1 \wedge \cdots \wedge dx_\beta^n = f_\beta dx_\beta^1 \wedge \cdots \wedge dx_\beta^n,$$

y así  $\det D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) > 0$ .  $\square$

DEFINICIÓN 3.4. Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto. Definimos la derivada exterior  $d : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$  para todo  $k \geq 0$  por

$$d\left(\sum_I f_I dx^I\right) = \sum_I df_I \wedge dx^I.$$

PROPOSICIÓN 3.7. *La derivada exterior tiene las siguientes propiedades*

- (1) *d es lineal*
- (2) *Si  $\omega \in \Omega^k(U), \eta \in \Omega^l(U)$ ,  $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$ .*
- (3) *Si  $f \in C^\infty(U)$ ,  $d(df) = 0$ .*

**Demostración.** (1) es obvia.

(2) Si  $\omega = f dx^I, \eta = g dx^J$ ,  $\omega \wedge \eta = f g dx^I \wedge dx^J$

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= (g df + f dg) \wedge dx^I \wedge dx^J = df \wedge dx^I \wedge (g dx^J) + f dg \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i\right) = \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \wedge dx^i = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i \\ &= \sum_{j < i} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i - \sum_{j < i} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i = 0 \end{aligned}$$

□

COROLARIO 3.2. *Si  $\omega \in \Omega^k(U)$ , entonces  $d(d\omega) = 0$*

**Demostración.** **Por inducción.** El caso  $k = 0$  es (3) de la Proposición 3.7. Suponiendo que el resultado vale para  $k - 1$ ,

$$\begin{aligned} d(d(f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k})) &= d(df \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = \\ d(df) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} &- df \wedge d(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \\ &= -df \wedge d(dx^{i_1} dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = 0. \end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 3.8. *Sea  $d' : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$  un operador lineal para todo  $k \geq 0$ . Si  $d'$  satisface las propiedades de la Proposición 3.7 y  $d'f = df$  para  $f \in C^\infty(U)$ , entonces  $d = d'$ .*

**Demostración.**

$$d'(f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = d'f \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} + f \wedge d'(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}).$$

Demostremos que  $d'(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = 0$  por inducción sobre  $k$ . Para  $k = 1$ ,  $d' dx^i = d' dx^i = 0$ .

$$\begin{aligned} d'(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) &= d' dx^{i_1} \wedge (dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \\ &- dx^{i_1} \wedge d'(dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = 0. \end{aligned}$$

□

DEFINICIÓN 3.5. Para  $M$  variedad diferenciable y todo  $k \geq 0$ , definimos  $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$  tal que en cada carta  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$

$$\omega|_{U_\alpha} = \sum_I f_{\alpha,I} dx_\alpha^I \Rightarrow d\omega|_{U_\alpha} = \sum_I df_{\alpha,I} \wedge dx_\alpha^I.$$

Por la Proposición 3.8, la definición no depende de la carta.

TEOREMA 3.3. Sean  $\omega \in \Omega^r(M)$ ,  $X_1, \dots, X_{r+1} \in \mathfrak{X}(M)$ , entonces

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{r+1}) &= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} X_i(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{r+1})) \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{r+1}) \end{aligned}$$

**Demostración.** Sean  $\Sigma_1, \Sigma_2 : \mathfrak{X}(M)^{r+1} \rightarrow C^\infty(M)$  las sumas en el miembro derecho y sea  $d'\omega = \Sigma_1 + \Sigma_2$ . Probaremos que  $d'\omega$  es  $C^\infty(M)$  multilineal.

$$\begin{aligned} \Sigma_1(X_1, \dots, fX_l, \dots, X_{r+1}) &= (-1)^{l+1} fX_l(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_l, \dots, X_{r+1})) \\ &+ \sum_{l < i} (-1)^{i+1} X_i(f\omega(X_1, \dots, X_l, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{r+1})) \\ &+ \sum_{i < l} (-1)^{i+1} X_i(f\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_l, \dots, X_{r+1})) \\ &= f\Sigma_1(X_1, \dots, X_{r+1}) + \sum_{i \neq l} (-1)^{i+1} (X_i f)(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{r+1})) \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} [X_i, fX_l] &= f[X_i, X_l] + (X_i f)X_l \\ [fX_l, X_j] &= f[X_l, X_j] - (X_j f)X_l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_2(X_1, \dots, fX_l, \dots, X_{r+1}) &= f\Sigma_2(X_1, \dots, \dots, X_{r+1}) \\ &- \sum_{l < j} (-1)^{l+j} (X_j f)\omega(X_l, \dots, \hat{X}_l, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{r+1}) \\ &+ \sum_{i < l} (-1)^{i+l} (X_i f)\omega(X_l, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_l, \dots, X_{r+1}) \\ &= f\Sigma_2(X_1, \dots, \dots, X_{r+1}) + \sum_{l < j} (-1)^j (X_j f)\omega(X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{r+1}) \\ &+ \sum_{i < l} (-1)^i (X_i f)\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{r+1}) \end{aligned}$$

Así  $d'\omega(X_1, \dots, fX_l, \dots, X_{r+1}) = fd'\omega(X_1, \dots, X_{r+1})$ .

$$d'\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_{r+1}} d'\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_{r+1}}}\right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{r+1}},$$

$$d'\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_{r+1}}}\right) = \sum_{s=1}^{r+1} (-1)^{s+1} \frac{\partial}{\partial x^{i_s}} \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\hat{\partial}}{\partial x^{i_s}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_{r+1}}}\right)$$

Para  $\omega = gdx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_r}$ ,  $j_1 < \dots < j_r$ , tenemos que

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\hat{\partial}}{\partial x^{i_s}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_{r+1}}}\right) = \begin{cases} g & (i_1, \dots, i_{r+1}) = (j_1, \dots, i_s, \dots, j_r) \\ 0 & \{j_1, \dots, j_r\} \not\subset \{i_1, \dots, i_{r+1}\} \end{cases}$$

Así

$$d'\omega = \sum_{s \notin \{j_1, \dots, j_r\}} (-1)^{s+1} \frac{\partial g}{\partial x^s} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^s \wedge \dots \wedge dx^{j_r} = d\omega.$$

□

### 3. Cohomología de de Rham

DEFINICIÓN 3.6. Para  $M$  una variedad diferenciable consideremos la sucesión

$$0 \rightarrow C^\infty(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \rightarrow 0$$

Ya que  $d \circ d = 0$ ,  $B^k(M) := d(\Omega^{k-1}(M)) \subset Z^k(M) := \ker d$ . Sean

$$\begin{aligned} \Omega_c^k(M) &= \{\omega \in \Omega^k(M) : \text{soporte } \omega \text{ es compacto}\}, \\ B_c^k(M) &= d(\Omega_c^{k-1}(M)), Z_c^k(M) = Z^k(M) \cap \Omega_c^k(M). \end{aligned}$$

- El  $k$ -ésimo grupo de cohomología de de Rham es

$$H^k(M) = Z^k(M)/B^k(M).$$

- El  $k$ -ésimo grupo de cohomología con soporte compacto es

$$H_c^k(M) = Z_c^k(M)/B_c^k(M).$$

EJEMPLO 3.1. Sean  $A$  y  $B$  el conjunto de componentes conexas y el conjunto de componentes conexas compactas de  $M$  respectivamente.

$$H^0(M) = Z^0(M) = \{g \in C^\infty(M) : dg = 0\} = \bigoplus_{a \in A} \mathbb{R}$$

$$H_c^0(M) = Z_c^0(M) = \{g \in C_c^\infty(M) : dg = 0\} = \bigoplus_{a \in B} \mathbb{R}$$

OBSERVACIONES 3.3. Sea  $F \in C^\infty(M, N)$

- Como  $F^*d = dF^*$ ,  $F^*(Z^k(N)) \subset Z^k(M)$ ,  $F^*(B^k(N)) \subset B^k(M)$  y se define un homomorfismo  $F^* : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$ .

- Si  $F$  es *propia*, o sea que para todo  $K \subset N$  compacto,  $F^{-1}(K)$  es compacto, entonces  $F^*(\Omega_c^k(N)) \subset \Omega_c^k(M)$  y se define un homomorfismo  $F^* : H_c^k(N) \rightarrow H_c^k(M)$ .

DEFINICIÓN 3.7. Dos transformaciones diferenciables  $f, g : M \rightarrow N$  se llaman *homotópicas* si existe  $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$  diferenciable tal que  $\forall x \in M$   $F(x, 0) = f(x)$ ,  $F(x, 1) = g(x)$ .

Sean  $\pi_M : M \times [0, 1] \rightarrow M$ ,  $t : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  las proyecciones naturales. Cualquier  $\omega \in \Omega^k(M \times [0, 1])$  puede escribirse en la forma

$$\omega = \pi_M^* \omega_t + dt \wedge \pi_M^* \eta_t, \quad \omega_t \in \Omega^k(M), \eta_t \in \Omega^{k-1}(M), t \in [0, 1].$$

LEMA 3.1. *Considere las inclusiones  $i_t : M \rightarrow M \times [0, 1]$ ,  $x \mapsto (x, t)$ . Defina el operador  $I : \Omega^k(M \times [0, 1]) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$  mediante*

$$I(\pi_M^* \omega_t + dt \wedge \pi_M^* \eta_t) = \int_0^1 \eta_t dt.$$

Entonces  $i_1^* \omega - i_0^* \omega = I(d\omega) + dI(\omega)$ .

**Demostración.** Caso 1. Si  $\omega = g dx^I$ , entonces  $I(\omega) = 0$ ,

$$d\omega = dg \wedge dx^I = \sum_i \frac{\partial g}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I + \frac{\partial g}{\partial t} dt \wedge dx^I,$$

$$I(d\omega) = \left( \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial t} dt \right) dx^I = (g(x, 1) - g(x, 0)) dx^I,$$

$$i_1^* \omega = g(x, 1) dx^I, \quad i_0^* \omega = g(x, 0) dx^I.$$

Caso 2. Si  $\omega = g dt \wedge dx^I$

$$I(\omega) = \left( \int_0^1 g(x, t) dt \right) dx^I,$$

$$dI(\omega) = \sum_i \left( \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x^i} dt \right) dx^i \wedge dx^I$$

$$d\omega = \sum_i \frac{\partial g}{\partial x^i} dx^i \wedge dt \wedge dx^I,$$

$$I(d\omega) = - \sum_i \left( \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x^i} dt \right) dx^i \wedge dx^I.$$

Como  $\forall x \in M$   $t \circ i_s(x) = s$ ,  $i_s^* dt = di_s^* t = d(t \circ i_s) = 0$ . Entonces

$$i_s^* \omega = i_s^*(dt) \wedge i_s^*(g dx^I) = 0.$$

□

PROPOSICIÓN 3.9. *Sean  $f, g : M \rightarrow N$  homotópicas, entonces  $f^* = g^* : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$  para todo  $k$ .*

**Demostración.**  $F \circ i_0 = f$ ,  $F \circ i_1 = g$ . Entonces  $i_0^* \circ F^* = f^*$ ,  $i_1^* \circ F^* = g^*$ . Por el lema 3.1

$$g^*(\omega) - f^*(\omega) = I(d(F^*\omega)) + dI(F^*\omega) = I(F^*d\omega) + dI(F^*\omega).$$

Si  $d\omega = 0$ ,  $g^*(\omega) - f^*(\omega) = dI(F^*\omega)$  y así  $[g^*(\omega)] = [f^*(\omega)] \in H^k(M)$ .

**LEMA 3.2.** Poincaré. *Supongamos que  $M$  es contraíble, es decir, la transformación identidad es homotópica a una transformación constante. Entonces  $H^k(M) = 0$  para  $k > 0$ .*

**Demostración.** Si  $g$  es una transformación constante y  $k > 0$ ,  $g^*|H^k(M) = 0$ .  $\square$

#### 4. Integración en cadenas

**DEFINICIÓN 3.8.** Un  $k$ -cubo singular en  $M$  es una función diferenciable  $c : [0, 1]^k \rightarrow M$ . Si  $\omega$  es una  $k$ -forma en  $M$ ,  $c^*\omega = gdx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$  y definimos

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^k} c^*\omega = \int_{[0,1]^k} g.$$

**PROPOSICIÓN 3.10.** Sean  $\omega$  una  $k$ -forma en  $\mathbb{R}^k$  y  $c$  un  $k$ -cubo singular con  $\det c \geq 0$ . Entonces

$$\int_{[0,1]^k} c^*\omega = \int_{c([0,1]^k)} \omega.$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned} \omega &= f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k \\ c^*\omega &= c \circ f \det Dc dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k \\ \int_{[0,1]^k} c^*\omega &= \int_{[0,1]^k} c \circ f \det Dc = \int_{c([0,1]^k)} f = \int_{c([0,1]^k)} \omega. \end{aligned}$$

**PROPOSICIÓN 3.11.** Sean  $c$  un  $k$ -cubo singular en  $M$  y  $p : [0, 1]^k \rightarrow [0, 1]^k$  suprayectiva con  $\det Dp \geq 0$ . Entonces

$$\int_{c \circ p} \omega = \int_c \omega.$$

**Demostración.**

$$\int_{c \circ p} \omega = \int_{[0,1]^k} (c \circ p)^*\omega = \int_{[0,1]^k} p^*(c^*\omega) = \int_{p([0,1]^k)} c^*\omega = \int_c \omega.$$

**DEFINICIÓN 3.9.** Una  $k$ -cadena en  $M$  es una combinación formal entera de  $k$ -cubos singulares  $c = \sum_{i=1}^r a_i c_i$ ,  $a_i \in \mathbb{Z}$ .

Sea  $I^n : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la inclusión. Para  $\alpha = 0, 1$  definimos  $I_{i,\alpha}^n : [0, 1]^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  por  $I_{i,\alpha}^n(x^1, \dots, x^{n-1}) = (x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \dots, x^{n-1})$ .

$$\partial I^n = \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha=0,1}}^n (-1)^{i+\alpha} I_{i,\alpha}^n$$

Para  $c$  un  $n$ -cubo singular en  $M$ , definimos  $c_{i,\alpha} = c \circ I_{i,\alpha}^n$  y

$$\partial c = \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha=0,1}}^n (-1)^{i+\alpha} c_{i,\alpha}$$

PROPOSICIÓN 3.12. Si  $c$  es un cubo singular en  $M$ ,  $\partial(\partial c) = 0$ .

**Demostración.**

$$\partial(\partial c) = \sum_{i,\alpha} (-1)^{i+\alpha} \partial c_{i,\alpha},$$

$$\partial c_{i,\alpha} = \sum_{\substack{j=1 \\ \beta=0,1}}^{n-1} (-1)^{j+\beta} c_{i,\alpha} \circ I_{j,\beta}^{n-1} = \sum_{\substack{j=1 \\ \beta=0,1}}^{n-1} (-1)^{j+\beta} c \circ I_{i,\alpha}^n \circ I_{j,\beta}^{n-1}$$

Si  $i \leq j \leq n-1$

$$\begin{aligned} I_{i,\alpha}^n \circ I_{j,\beta}^{n-1}(x^1, \dots, x^{n-2}) &= I_{i,\alpha}^n(x^1, \dots, x^{j-1}, \beta, x^j, \dots, x^{n-2}) \\ &= (x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \dots, x^{j-1}, \beta, x^j, \dots, x^{n-2}) \\ I_{j+1,\beta}^n \circ I_{i,\alpha}^{n-1}(x^1, \dots, x^{n-2}) &= I_{j+1,\beta}^n(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \dots, x^{n-2}) \\ &= (x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \dots, x^{j-1}, \beta, x^j, \dots, x^{n-2}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial(\partial c) &= \sum_{\substack{i \leq j \leq n-1 \\ \alpha, \beta=0,1}} (-1)^{i+j+\alpha+\beta} c \circ I_{i,\alpha}^n \circ I_{j,\beta}^{n-1} \\ &\quad + \sum_{\substack{i \leq j \leq n-1 \\ \alpha, \beta=0,1}} (-1)^{i+j+1+\alpha+\beta} c \circ I_{j+1,\beta}^n \circ I_{i,\alpha}^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

TEOREMA 3.4. Stokes Sean  $M$  una variedad diferenciable,  $c$  una  $k$ -cadena en  $M$  y  $\omega$  una  $k-1$  forma en  $M$ . Entonces

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

**Demostración.** (1). Sea  $\omega$  una  $k - 1$  forma en  $\mathbb{R}^k$  y  $c = I^k$ .

$$\begin{aligned}\omega &= f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \cdots \wedge dx^k \\ \partial I^k &= \sum_{\substack{j=1 \\ \alpha=0,1}}^k (-1)^{j+\alpha} I_{j,\alpha}^k \\ \int_{\partial I^k} \omega &= \sum_{\substack{j=1 \\ \alpha=0,1}}^k (-1)^{j+\alpha} \int_{[0,1]^{k-1}} I_{j,\alpha}^{k*} \omega\end{aligned}$$

$$I_{j,\alpha}^{k*} \omega = f \circ I_{j,\alpha}^k d(x^1 \circ I_{j,\alpha}^k) \wedge \cdots \wedge d(x^{i-1} \circ I_{j,\alpha}^k) \wedge d(x^{i+1} \circ I_{j,\alpha}^k) \wedge \cdots \wedge d(x^k \circ I_{j,\alpha}^k)$$

$$x^l \circ I_{j,\alpha}^k(t^1, \dots, t^{k-1}) = x^l(t^1, \dots, \alpha, t^j, \dots, t^{k-1}) = \begin{cases} t^l & l < j \\ \alpha & l = j \\ t^{l-1} & l > j \end{cases}$$

$$d(x^l \circ I_{j,\alpha}^k) = \begin{cases} dt^l & l < j \\ 0 & l = j \\ dt^{l-1} & l > j \end{cases}$$

$$I_{j,\alpha}^{k*} \omega = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ f \circ I_{j,\alpha}^k dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^{k-1} & j = i \end{cases}$$

$$\int_{\partial I^k} \omega = \int_{[0,1]^{k-1}} (-1)^i [f(t^1, \dots, 0, t^j, \dots, t^{k-1}) - f(t^1, \dots, 1, t^j, \dots, t^{k-1})] dt^1 \cdots dt^{k-1}$$

$$d\omega = (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$$

$$\begin{aligned}\int_{I^k} d\omega &= \int_{[0,1]^k} (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \cdots dx^k \\ &= \int_{[0,1]^{k-1}} (-1)^i [f(x^1, \dots, 0, x^j, \dots, x^{k-1}) - f(x^1, \dots, 1, x^j, \dots, x^{k-1})] dx^1 \cdots dx^{k-1}.\end{aligned}$$

(2) Sea  $\omega$  una  $k - 1$  forma en  $M$  y  $c$  un  $k$ -cubo singular.

$$\begin{aligned}\int_c d\omega &= \int_{[0,1]^k} c^*(d\omega) = \int_{[0,1]^k} d(c^*\omega) = \int_{\partial[0,1]^k} c^*\omega = \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha=0,1}}^n (-1)^{i+\alpha} \int_{[0,1]^{k-1}} I_{j,\alpha}^{k*} c^*\omega \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha=0,1}}^n (-1)^{i+\alpha} \int_{[0,1]^{k-1}} c_{j,\alpha}^* \omega = \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha=0,1}}^n (-1)^{i+\alpha} \int_{c_{j,\alpha}} \omega = \int_{\partial c} \omega.\end{aligned}$$

□

### 5. Integración en variedades

PROPOSICIÓN 3.13. Sean  $c_1, c_2 : [0, 1]^n \rightarrow M$ ,  $\omega \in \Omega_c^n(M)$  con soporte  $\omega \subset c_1([0, 1]^n) \cap c_2([0, 1]^n)$  y  $\det D(c_1^{-1} \circ c_2) \geq 0$ . Entonces

$$\int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega.$$

Definimos  $\int_M \omega = \int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega$ .

**Demostración.**

$$\int_{c_2} \omega = \int_{[0,1]^n} c_2^* \omega = \int_{c_2^{-1}(\text{soporte } \omega)} c_2^* \omega = \int_{c_2^{-1}(\text{soporte } \omega)} (c_1^{-1} \circ c_2)^* c_1^* \omega = \int_{c_1^{-1}(\text{soporte } \omega)} c_1^* \omega = \int_{c_1} \omega$$

□

DEFINICIÓN 3.10. Sea  $(M, \mu)$  una  $n$ -variedad orientada. Sea  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  atlas tal que  $[0, 1]^n \subset \varphi_\alpha(U_\alpha)$  y  $\varphi_\alpha$  preserva la orientación. Sea  $\Phi$  una partición de la unidad subordinada a  $\{U_\alpha\}$ . Sea  $\omega \in \Omega_c^n(M)$ , entonces  $\{\varphi \in \Phi : \text{soporte } \varphi \cap \text{soporte } \omega \neq \emptyset\}$  es finito. Definimos

$$\int_M \omega = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M \varphi \omega.$$

Sea  $\Psi$  otra partición de la unidad subordinada a una cubierta como antes, entonces

$$\sum_{\psi \in \Psi} \int_M \psi \omega = \sum_{\psi \in \Psi} \int_M \sum_{\varphi \in \Phi} \varphi \psi \omega = \sum_{\psi \in \Psi} \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M \varphi \psi \omega = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M \varphi \omega.$$

DEFINICIÓN 3.11. Sean  $M$  una  $n$ -variedad con frontera,  $p \in \partial M$  y  $(U, \phi)$  una carta con  $\phi(p) = 0$ . Decimos que un vector  $v \in T_p M$  apunta hacia afuera si  $\phi_{*p}(v) = (w_1, \dots, w_n)$  con  $w_n < 0$ .

El concepto no depende de la carta ya que si  $(V, \psi)$  es otra carta con  $\psi(p) = 0$ ,  $\alpha(t) = t(w_1, \dots, w_n)$  y  $\beta(t) = \psi \circ \phi^{-1} \circ \alpha(t)$  entonces

$$\psi_{*p}(v) = (\psi \circ \phi^{-1})_{*p}(\phi_{*p}(v)) = \beta'(0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\beta(t)}{t}.$$

Como  $\beta(t) \in \mathbb{H}^n$ ,  $\beta'_n(0) \leq 0$ , y ya que  $\phi_{*p}(v) \notin \mathbb{R}^{n-1}$  y  $(\psi \circ \phi^{-1})_{*p}$  es un isomorfismo,  $\psi_{*p}(v) \notin \mathbb{R}^{n-1}$ . Así  $\beta'_n(0) < 0$ . □

Si  $M$  tiene una orientación  $\mu$ , definimos la orientación  $\partial\mu$  en  $\partial M$ :

$$(v_2, \dots, v_n) \in \partial\mu_p \iff (v, v_2, \dots, v_n) \in \mu_p$$

para  $v \in T_p M$  apuntando hacia afuera.

Supongamos que el cubo  $c : [0, 1]^n \rightarrow M$  preserva la orientación y  $c_{n,0}([0, 1]^{n-1}) \subset \partial M$ . Sea  $\omega$  una  $n-1$ -forma en  $M$  con soporte  $\omega \subset c([0, 1]^n)$ , entonces  $\omega = 0$  en  $c_{k,\alpha}([0, 1]^{n-1})$  para  $(k, \alpha) \neq (n, 0)$ . Así

$$\int_{\partial M} \omega = (-1)^n \int_{[0,1]^{n-1}} c_{n,0}^* \omega = (-1)^n \int_{c_{n,0}} \omega = \int_{\partial c} \omega.$$

**TEOREMA 3.5.** Stokes Sean  $M$   $n$ -variedad con frontera y  $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$ . Entonces

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

**Demostración.** Sea  $\Phi$  una partición de la unidad tal que  $\forall \varphi \in \Phi$  hay una carta  $(U, \psi)$  que preserva orientación con  $[0, 1]^n \subset \psi(U)$ , soporte  $\varphi \subset \psi^{-1}([0, 1]^n)$ . Denotaremos  $c_\psi = \psi^{-1}|_{[0,1]^n}$ .

- Si  $\psi^{-1}([0, 1]^n) \subset \text{int}(M) \neq \emptyset$ ,

$$\int_M d(\varphi\omega) = \int_{c_\psi} d(\varphi\omega) = \int_{\partial c_\psi} \varphi\omega = 0 = \int_{\partial M} \varphi\omega.$$

- Si  $\psi^{-1}([0, 1]^n) \cap \partial M$ ,

$$\int_M d(\varphi\omega) = \int_{c_\psi} d(\varphi\omega) = \int_{\partial c_\psi} \varphi\omega = \int_{\partial M} \varphi\omega.$$

Como  $\Phi$  es una partición de la unidad,

$$\begin{aligned} \sum_{\varphi \in \Phi} d\varphi &= 0, \quad \sum_{\varphi \in \Phi} d(\varphi\omega) = \sum_{\varphi \in \Phi} \varphi d\omega, \\ \int_M d\omega &= \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M \varphi d\omega = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M d(\varphi\omega) = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_{\partial M} (\varphi\omega) \int_{\partial M} \omega. \end{aligned}$$

□

Sea  $M$  una  $n$ -variedad orientable conexa y sin frontera. Sabemos que

$$(3.1) \quad H^k(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ 0 & k > 0, M \text{ contraíble} \end{cases}$$

$$(3.2) \quad H_c^0(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & M \text{ compacta} \\ 0 & M \text{ no compacta} \end{cases}$$

Queremos calcular  $H^n(M)$  y  $H_c^n(M)$ .

**OBSERVACIONES 3.4.**

$$\eta \in \Omega_c^{n-1}(M) \Rightarrow \int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta = 0.$$

Así, si  $\omega \in \Omega_c^n(M)$  y  $\int_M \omega \neq 0$ , se tiene  $\omega \neq d\eta$  y entonces  $H_c^n(M) \neq 0$ .

Consideremos la esfera  $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ . Definamos  $\sigma' \in \Omega^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$  por

$$\sigma'_p(v_1, \dots, v_{n-1}) = \det(p, v_1, \dots, v_{n-1}).$$

Es claro que si definimos

$$\sigma = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} z_i dz^1 \wedge \dots \wedge \hat{dz}_i \wedge \dots \wedge dz_n$$

e  $i : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es la inclusión, entonces  $\sigma' = i^*(\sigma)$ . Sea  $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $r(z) = z/|z|$ , entonces  $(r^*\sigma')_z = \sigma_z |z|^{-n}$ . Consideremos el cambio de variable  $\phi : B - \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \times (0, 1]$ ,  $\phi(z) = (r(z), |z|)$ . Sean  $\pi, t$  las proyecciones de  $\mathbb{S}^{n-1} \times (0, 1]$  sobre sus factores. Cualquier  $\omega \in \Omega^n(\mathbb{S}^{n-1} \times (0, 1])$  se escribe  $\omega = h\pi^*\sigma' \wedge dt$  con  $h \in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times (0, 1])$ . Entonces

$$\begin{aligned} \phi^*\omega &= (h \circ \phi)\phi^*\pi^*(\sigma') \wedge d(t \circ \phi) = (h \circ \phi)r^*(\sigma') \wedge d|z| \\ &= (h \circ \phi) \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{z_i}{|z|^n} dz_1 \wedge \dots \wedge \hat{dz}_i \wedge \dots \wedge dz_n \sum_{i=1}^n z_i dz_i \\ &= (h \circ \phi) \sum_{i=1}^n (-1)^{n-1} \frac{(z_i)^2}{|z|^n} dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \\ &= (h \circ \phi) \left( \frac{-1}{|z|} \right)^{n-1} dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \end{aligned}$$

Dada  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  queremos  $h$  tal que  $h(\phi(z)) = (-|z|)^{n-1}f(z)$ . Sea  $h(p, t) = (-t)^{n-1}f(tp)$ , entonces

$$(3.3) \quad \int_B f = \int_B \phi^*(h\pi^*\sigma' \wedge dt) = \int_{\mathbb{S}^{n-1} \times (0, 1]} h \pi^*\sigma' \wedge dt = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left( \int_0^1 t^{n-1} f(tp) dt \right) \sigma'.$$

**TEOREMA 3.6.** *Sea  $M$  una  $n$ -variedad orientable conexa y sin frontera. Entonces la funcional lineal  $\int : H_c^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $[\omega] \mapsto \int_M \omega$  es un isomorfismo.*

Sólo hace falta ver que  $\int : H_c^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$  es inyectiva, es decir

$$\int_M \omega = 0 \Rightarrow \exists \eta \in \Omega_c^{n-1}(M) \text{ t.q. } \omega = d\eta.$$

**Demostración. Por inducción.** Seguiremos los siguientes pasos

- (1) La Proposición es cierta para  $M = \mathbb{R}$
- (2) Si la Proposición es cierta para toda  $n - 1$  variedad, entonces es cierta para  $\mathbb{R}^n$
- (3) Si la Proposición es cierta para  $\mathbb{R}^n$ , entonces es cierta para para toda  $n$  variedad.

(1). Si  $\omega \in \Omega_c^1(\mathbb{R})$ , entonces  $\omega = df$  con

$$f(x) = \begin{cases} c_- & x \leq -N \\ c_+ & x \geq N \end{cases}.$$

$$\int_{\mathbb{R}} \omega = 0 \Rightarrow 0 = \int_{-N}^N df = c_+ - c_- \Rightarrow f - c_+ \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \omega = d(f - c_+).$$

(2). Sea  $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$  con soporte en la bola unitaria  $B$  y  $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$ . Sea  $F : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $F(z, t) = tz$ . En el lema de Poincaré definimos  $I : \Omega^n(\mathbb{R}^n \times [0, 1]) \rightarrow \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\omega = -d(I(F^*\omega))$ . Escribiendo

$$\begin{aligned} \omega &= f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, \\ F^*\omega &= (f \circ F)d(tz_1) \wedge \cdots \wedge d(tz_n) \\ &= (f \circ F)(z_1 dt + t dz_1) \wedge \cdots \wedge (z_n dt + t dz_n) \\ &= (f \circ F)(t^n dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n + t^{n-1} dt \wedge \sigma), \\ I(F^*\omega) &= \int_0^1 t^{n-1} f(tz) dt \sigma \end{aligned}$$

Para  $z \neq 0$  fija hagamos el cambio de variable  $u = |z|dt$ , entonces

$$\eta := I(F^*\omega) = \int_0^{|z|} \frac{u^{n-1}}{|z|^n} f(ur(z)) du \sigma = \int_0^1 u^{n-1} f(ur(z)) du \frac{\sigma}{|z|^n}$$

ya que  $f(z) = 0$  si  $|z| > 1$ .

Sea  $g : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(p) = \int_0^1 t^{n-1} f(tp) dt$ , entonces  $\eta = (g \circ r)r^*\sigma' = r^*(g\sigma')$ . Por (3.3)

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} g\sigma' = \int_B f = \int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0.$$

Por hipótesis de inducción,  $\int : H_c^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow \mathbb{R}$  es un inyectiva y así  $g\sigma' = d\lambda$ . Luego  $\eta = r^*(g\sigma') = d(r^*\lambda)$ . Sea  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  suave con  $h = 0$  en una vecindad del origen  $h = 1$  fuera de  $B$ . Entonces  $\xi = \eta - d(hr^*\lambda)$  tiene soporte en  $B$  y  $d\xi = d\eta = \omega$ .

(3). Sea  $M$  una  $n$ -variedad orientable conexa y sin frontera. Sea  $U$  vecindad difeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $\eta \in \Omega_c^n(M)$  con soporte en  $U$  tal que  $\int_M \eta > 0$ . Por demostrar que  $\forall \omega \in \Omega_c^n(M)$  existen  $c \in \mathbb{R}, \beta \in \Omega_c^{n-1}(M)$  tal que  $\omega = c\eta + d\beta$ . Sea  $\Phi$  una partición de la unidad subordinada a un atlas. Como  $\{\phi \in \Phi : \text{soporte } \phi \cap \text{soporte } \omega \neq \emptyset\}$  es finito,

$$\omega = \phi_1\omega + \cdots + \phi_k\omega, \phi_i \in \Phi.$$

Demostrando que  $\phi_i\omega = c_i\eta + d\beta_i$ , habremos concluido la demostración. Así, hemos reducido (3) a demostrar que si  $\omega$  tiene soporte en una vecindad  $V$  difeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\omega = c\eta + d\alpha$ ,  $\alpha \in \Omega_c^{n-1}(M)$ .

Sean  $U_1 = U, U_2, \dots, U_l = V$  vecindades difeomorfas a  $\mathbb{R}^n$  con  $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ . Escojamos  $\omega_i \in \Omega_c(M)$  con soporte en  $U_i \cap U_{i+1}$  e  $\int_M \omega_i \neq 0$ . Entonces

$$\begin{aligned}\omega_1 &= c_1 \eta + d\alpha_1, \text{ soporte } \alpha_1 \subset U, \\ \omega_i &= c_i \omega_{i-1} + d\alpha_i, \text{ soporte } \alpha_i \subset U_i, \\ \omega &= c_l \omega_{l-1} + d\alpha_l = \dots = c_l \dots c_1 \eta + d\alpha_l + \dots + c_l \dots c_{l-2} d\alpha_1.\end{aligned}$$

□

**TEOREMA 3.7.** *Sea  $M$  una  $n$ -variedad conexa, no orientable y sin frontera. Entonces  $H_c^n(M) = 0$ .*

**Demostración.**

**TEOREMA 3.8.** *Sea  $M$  una  $n$ -variedad conexa y no compacta. Entonces  $H^n(M) = 0$ .*

**Demostración.** Sea  $\omega \in \Omega_c^n(M)$  con soporte en una vecindad coordenada  $U$  con cerradura compacta. Hay una sucesión  $\{U_i\}$  de vecindades coordenadas con cerradura compacta tales que  $U_1 = U, U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$  y para cualquier compacto  $K$  existe  $n(K)$  tal que  $U_i \cap K = \emptyset$  si  $i > n(K)$ .

Escojamos  $\omega_i \in \Omega_c(M)$  con soporte en  $U_i \cap U_{i+1}$  e  $\int_M \omega_i \neq 0$ . Entonces existen  $c_i \in \mathbb{R}$   $\eta_i$  con soporte  $\eta_i \subset U_i$  tales que

$$\begin{aligned}\omega &= d\eta_1 + c_1 \omega_1 \\ \omega_i &= d\eta_{i+1} + c_{i+1} \omega_{i+1} \\ \omega &= d\eta_1 + c_1 d\eta_2 + c_1 c_2 \omega_2 \\ &\dots \\ \omega &= d\eta_1 + \dots + c_1 \dots c_{l-1} d\eta_l + c_1 \dots c_l \omega_l\end{aligned}$$



## CAPÍTULO 4

### Curvatura

#### 1. Curvatura

DEFINICIÓN 4.1. Sea  $\nabla$  una conexión del haz vectorial  $\pi : E \rightarrow M$ . Extendemos la definición a  $\nabla^r : \Omega^r(M) \otimes \Gamma(E) \rightarrow \Omega^{r+1}(M) \otimes \Gamma(E)$  mediante  $\nabla^r(\omega \otimes s) = d\omega \otimes s + (-1)^r \omega \wedge \nabla s$

Definimos la *curvatura* de la conexión como  $\Omega = \nabla^1 \circ \nabla$ .

OBSERVACIONES 4.1. Sean  $\omega \in \Omega^1(M)$ ,  $s \in \Gamma(E)$ , entonces

$$\begin{aligned} \nabla^1(\omega \otimes s)(X, Y) &= d\omega(X, Y)s - \omega \wedge \nabla s(X, Y) \\ &= (X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]))s - \omega(X)\nabla_Y s + \omega(Y)\nabla_X s \\ &= \nabla_X(\omega(Y)s) - \nabla_Y(\omega(X)s) - \omega([X, Y])s \end{aligned}$$

Así

$$(4.1) \quad (\Omega s)(X, Y) = \nabla^1(\nabla s)(X, Y) = \nabla_X(\nabla_Y s) - \nabla_Y(\nabla_X s) - \nabla_{[X, Y]}s.$$

Si  $f \in C^\infty(M)$ , entonces

$$\Omega(fs) = \nabla^1(f\nabla s + df \otimes s) = df \wedge \nabla s + f\Omega s + ddf \otimes s - df \wedge \nabla s = f\Omega s.$$

Sea  $\omega$  la matriz de la conexión en la base local  $\{s_1, \dots, s_n\} \subset \Gamma(E)$ .

$$\begin{aligned} \Omega s_i &= \sum_{j=1}^n \nabla^1(\omega_{ij} \otimes s_j) = \sum_{j=1}^n d\omega_{ij} \otimes s_j - \omega_{ij} \wedge \nabla s_j \\ &= \sum_{k=1}^n (d\omega_{ik} - \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \wedge \omega_{jk}) \otimes s_k. \end{aligned}$$

Así, la matriz de  $\Omega$  en la base local es  $\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$ .

Si la conexión es compatible con una métrica  $\langle, \rangle$  en  $E$  y  $\{s_1, \dots, s_n\}$  es una base local ortonormal,  $\omega$  es antisimétrica y por consiguiente  $\Omega$  también. Luego

$$\langle (\Omega s_i)(X, Y), s_k \rangle = \Omega_{ik}(X, Y) = -\langle s_i, (\Omega s_k)(X, Y) \rangle.$$

Como  $\Omega$  es  $C^\infty(M)$  lineal, para todo  $r, s \in \Gamma(E)$ ,  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$(4.2) \quad \langle (\Omega r)(X, Y), s \rangle + \langle r, (\Omega s)(X, Y) \rangle = 0.$$

TEOREMA 4.1. . Sea  $\nabla$  la conexión de Levi-Civita de una métrica riemanniana en  $M$ . Sean  $\{X_1, \dots, X_n\}$  base ortonormal local de  $TM$  y  $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  la base local dual. Entonces

- Ecuaciones de estructura.  $d\theta = \omega \wedge \theta$ ,  $d\omega = \Omega + \omega \wedge \omega$ .
- Primera identidad de Bianchi.  $\Omega \wedge \theta = 0$
- Segunda identidad de Bianchi.  $d\Omega + \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega = 0$

**Demostración.**

$$\begin{aligned}
 d\theta_i(X, Y) &= X(\theta_i(Y)) - Y(\theta_i(X)) - \theta_i([X, Y]) \\
 &= X\langle X_i, Y \rangle - Y\langle X_i, X \rangle - \langle X_i, [X, Y] \rangle \\
 &= \langle \nabla_X X_i, Y \rangle - \langle \nabla_Y X_i, X \rangle + \langle X_i, \nabla_X Y - \nabla_Y X \rangle - \langle X_i, [X, Y] \rangle \\
 &= \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(X)\langle X_j, Y \rangle - \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(Y)\langle X_j, X \rangle = \sum_{j=1}^n (\omega_{ij} \wedge \theta_j)(X, Y), \\
 d\theta_i &= \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \wedge \theta_j.
 \end{aligned}$$

Entonces

$$0 = d(d\theta) = (d\omega) \wedge \theta - \omega \wedge d\theta = (d\omega - \omega \wedge \omega) \wedge \theta = \Omega \wedge \theta.$$

Similarmente

$$\begin{aligned}
 0 = d(d\omega) &= d(\Omega + \omega \wedge \omega) = d\Omega + (d\omega) \wedge \omega - \omega \wedge d\omega \\
 &= d\Omega + (\Omega + \omega \wedge \omega) \wedge \omega - \omega \wedge (\Omega + \omega \wedge \omega) \\
 &= d\Omega + \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega
 \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 4.2. Si  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es una métrica riemanniana en  $M$  y  $\nabla$  es la conexión de Levi-Civita, se acostumbra denotar  $(\Omega Z)(X, Y) = R_{XY}Z$  y se define el tensor de Riemann  $R \in \Gamma(T^4(M))$  por

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R_{XY}Z, W \rangle.$$

La conexión de Levi-Civita se extiende a  $\nabla : \Gamma(T^r(M)) \rightarrow \Gamma(T^{r+1}(M))$ ,

$$\nabla S(Z, X_1, \dots, X_r) = Z(S(X_1, \dots, X_r)) - \sum_{i=1}^r S(X_1, \dots, \nabla_Z X_i, \dots, X_r)$$

PROPOSICIÓN 4.1. El tensor de Riemann tiene las propiedades

- (1)  $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W)$
- (2)  $R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$
- (3)  $R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y = 0$
- (4)  $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$
- (5)  $\nabla R(X, Y, Z, \cdot, \cdot) + \nabla R(Y, Z, X, \cdot, \cdot) + \nabla R(Z, X, Y, \cdot, \cdot) = 0$

**Demostración.** (1) se sigue de la definición. (2) se sigue de (4.2). (3). Sean  $\{X_1, \dots, X_n\}$  base local ortonormal de  $TM$  y  $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  la base local dual de  $T^*M$ . Por la primera identidad de Bianchi, para  $k = 1, \dots, n$  se tiene

$$\begin{aligned} & \langle (\Omega Z)(X, Y) + (\Omega X)(Y, Z) + (\Omega Y)(Z, X), X_k \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \Omega_{ik}(X, Y)\theta_i(Z) + \sum_{i=1}^n \Omega_{ik}(Y, Z)\theta_i(X) + \sum_{i=1}^n \Omega_{ik}(Z, X)\theta_i(X) \\ &= \sum_{i=1}^n (\Omega_{ik} \wedge \theta_i)(X, Y, Z) = 0 \end{aligned}$$

(4). Se sigue de (1), (2) y (3) que

$$(4.3) \quad R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0$$

$$(4.4) \quad R(X, Y, Z, W) + R(Y, W, Z, X) + R(X, W, Y, Z) = 0$$

$$(4.5) \quad R(Y, Z, X, W) + R(Y, W, Z, X) + R(Z, W, X, Y) = 0$$

$$(4.6) \quad R(Z, W, X, Y) + R(Z, X, Y, W) + R(X, W, Y, Z) = 0$$

Sumando (4.3),(4.4) y restando (4.5) y (4.6) obtenemos (4).

(5). De la segunda identidad de Bianchi

$$(4.7) \quad d\Omega_{ij}(X, Y, Z) + \sum_k (\Omega_{ik} \wedge \omega_{kj} - \omega_{ik} \wedge \Omega_{kj})(X, Y, Z) = 0$$

Por el Teorema 3.3

$$\begin{aligned} d\Omega_{ij}(X, Y, Z) &= X(\Omega_{ij}(Y, Z)) + Y(\Omega_{ij}(Z, X)) + Z(\Omega_{ij}(X, Y)) \\ &\quad - \Omega_{ij}([X, Y], Z) - \Omega_{ij}([Y, Z], X) - \Omega_{ij}([Z, X], Y) \end{aligned}$$

Como  $\Omega_{ij}(\cdot, \cdot) = R(\cdot, \cdot, X_i, X_j)$ ,

$$\begin{aligned} X(\Omega_{ij}(Y, Z)) &= \nabla_X R(X, Y, Z, X_i, X_j) + \Omega_{ij}(\nabla_X Y, Z) + \Omega_{ij}(Y, \nabla_X Z) \\ &\quad + \sum_k \omega_{ik}(X)\Omega_{kj}(Y, Z) + \sum_k \omega_{jk}(X)\Omega_{ik}(Y, Z) \end{aligned}$$

Puesto que  $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ , tenemos

$$\begin{aligned} d\Omega_{ij}(X, Y, Z) &= \sum_k (\omega_{ik} \wedge \Omega_{kj} + \omega_{jk} \wedge \Omega_{ik})(X, Y, Z) \\ &\quad + \nabla R(X, Y, Z, X_i, X_j) + \nabla R(Y, Z, X, X_i, X_j) + \nabla R(Z, X, Y, X_i, X_j). \end{aligned}$$

Comparando con (4.7) obtenemos (5).

EJEMPLO 4.1. Sean  $G$  un grupo de Lie y  $\langle, \rangle$  una métrica riemanniana invariante por la izquierda. Sea  $\nabla$  la conexión del Ejemplo 2.9. Por la identidad de Jacobi

$$R_{XY}Z = \frac{1}{4}[X, [Y, Z]] - \frac{1}{4}[Y, [X, Z]] - \frac{1}{2}[[X, Y], Z] = -\frac{1}{4}[[X, Y], Z]$$

DEFINICIÓN 4.3. Sea  $\langle, \rangle$  una métrica riemanniana en  $M$  y sea  $\nabla$  la conexión de Levi-Civita.

- Para  $f \in C^\infty(M)$  definimos el campo *gradiente* de  $f$  por

$$\langle \text{grad } f, X \rangle = df(X) = X(f).$$

- Sea  $X \in \mathfrak{X}(M)$  entonces  $\nabla X \in \Gamma(T_1^1(M)) = \Gamma(\text{hom}(TM, TM))$ . Definimos la *divergencia* de  $X$  por

$$\text{div } X = c(\nabla X) = \text{Tr } \nabla X.$$

- Definimos el *hessiano* de  $f$  por

$$H^f = \nabla(df)$$

- Definimos el *laplaciano* de  $f$  como

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad } f) = \text{Tr } \nabla(\text{grad } f)$$

OBSERVACIONES 4.2. Sea  $X_1, \dots, X_n$  una base local ortonormal de  $TM$ , entonces

$$\text{div } X = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{X_i} X, X_i \rangle.$$

$$\begin{aligned} H^f(X, Y) &= X(df(Y)) - df(\nabla_X Y) = X(Y(f)) - \nabla_X Y(f) \\ &= Y(X(f)) - \nabla_Y X(f) = H^f(Y, X) \end{aligned}$$

$$H^f(X, Y) = X\langle \text{grad } f, Y \rangle - \langle \text{grad } f, \nabla_X Y \rangle = \langle \nabla_X(\text{grad } f), Y \rangle.$$

Por lo tanto  $H^f$  es simétrico y

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{X_i} \text{grad } f, X_i \rangle = \sum_{i=1}^n H(X_i, X_i).$$

DEFINICIÓN 4.4. Para  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  consideremos  $Q(X, Y) \in \Gamma(\text{hom}(TM, TM))$  dado por  $Q(X, Y)(Z) = R_{XZ}Y$ . Definimos la curvatura de Ricci  $Ric \in \Gamma(T^2(M))$  como  $Ric(X, Y) = \text{Tr } Q(X, Y)$ .

$$Ric(X, Y) = \sum_{j=1}^n \langle R_{XX_j}Y, X_j \rangle = \sum_{j=1}^n R(X, X_j, Y, X_j).$$

Hay un isomorfismo entre  $\Gamma(T^2(M))$  y  $\Gamma(\text{hom}(TM, TM))$  dado por

$$T(X, Y) = \langle \mathbf{T}(X), Y \rangle.$$

A la métrica  $\langle, \rangle$  le corresponde la identidad  $I$ . A  $Ric$  le corresponde un **Ric** simétrico.

Definimos la *curvatura escalar*  $S$  y el *tensor de Einstein*  $G$  por

$$S = \text{Tr Ric}, \quad G = Ric - \frac{1}{2}S\langle, \rangle$$

$$S = \sum_{i=1}^n Ric(X_i, X_i) = \sum_{i,j=1}^n R(X_i, X_j, X_i, X_j).$$

Si  $\mathbf{T} \in \Gamma(\text{hom}(TM, TM))$ ,  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $(\nabla \mathbf{T})(Y) \in \Gamma(\text{hom}(TM, TM))$  esta dado por

$$(\nabla \mathbf{T})(Y)(X) = (\nabla_X \mathbf{T})(Y) := \nabla_X(\mathbf{T}(Y)) - \mathbf{T}(\nabla_X Y)$$

y  $\text{div } T \in \Omega^1(M)$  por  $(\text{div } T)(Y) = \text{Tr}((\nabla \mathbf{T})(Y))$ . Así

$$\begin{aligned} (\text{div } T)(Y) &= \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{X_i} \mathbf{T})(Y), X_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{X_i}(\mathbf{T}(Y)) - \mathbf{T}(\nabla_{X_i} Y), X_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n X_i(T(Y, X_i)) - T(Y, \nabla_{X_i} X_i) - T(\nabla_{X_i} Y, X_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \nabla T(X_i, Y, X_i) \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 4.2.  $dS = 2 \text{div } Ric$  y si  $\dim M = 4$ ,  $\text{div } G = 0$ .

**Demostración.** Sea  $p \in M$  y sea  $X_1, \dots, X_n$  marco geodésico en  $p$  (ejercicio 20)

$$\begin{aligned}
Ric(X, Y) &= \sum_{i=1}^n R(X, X_i, Y, X_i) \\
\nabla Ric(Z, X, Y) &= Z(Ric(X, Y)) - Ric(\nabla_Z X, Y) - Ric(X, \nabla_Z Y) \\
&= \sum_{i=1}^n \nabla R(Z, X, X_i, Y, X_i) + R(X, \nabla_Z X_i, Y, X_i) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n R(X, X_i, Y, \nabla_Z X_i) \\
\nabla Ric(Z, X, Y)(p) &= \sum_{i=1}^n \nabla R(Z, X, X_i, Y, X_i)(p) \\
\operatorname{div} Ric(X)(p) &= \sum_{i,j=1}^n \nabla R(X_j, X, X_i, X_j, X_i)(p) \\
dS(X) &= \sum_{i,j=1}^n \nabla R(X, X_i, X_j, X_i, X_j) \\
&\quad + 2 \sum_{i,j=1}^n R(\nabla_X X_i, X_j, X_i, X_j) + R(X_i, \nabla_X X_j, X_i, X_j)
\end{aligned}$$

Por (5) de la Proposición 4.1

$$\begin{aligned}
-\nabla R(X, X_i, X_j, X_j, X_i) &= \nabla R(X_i, X_j, X, X_j, X_i) + \nabla R(X_j, X, X_i, X_j, X_i) \\
\nabla R(X, X_i, X_j, X_i, X_j) &= 2 \sum_{i,j=1}^n \nabla R(X_j, X, X_i, X_j, X_i) \\
dS(X)(p) &= 2 \sum_{i,j=1}^n \nabla R(X_j, X, X_i, X_j, X_i)(p) \\
&= \operatorname{div} Ric(X)(p)
\end{aligned}$$

□

## 2. Campos de Jacobi. Puntos conjugados

**PROPOSICIÓN 4.3.** Sea  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  diferenciable. Sea  $V$  un campo vectorial a lo largo de  $f$ . Entonces

$$\frac{D}{\partial s} \frac{DV}{\partial t} - \frac{D}{\partial t} \frac{DV}{\partial s} = R_{\frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}} V$$

**Demostración.** En una carta coordenada  $(U, \varphi)$

$$\phi \circ f = (f_1, \dots, f_n), \quad V = \sum_j V_j \partial_j$$

$$\begin{aligned} \frac{DV}{\partial t} &= \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial V_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^n V_i \omega_{ij} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right) \partial_j \\ \frac{D}{\partial s} \frac{DV}{\partial t} &= \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial^2 V_k}{\partial s \partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i}{\partial s} \omega_{ik} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) + V_i \frac{\partial}{\partial s} \left( \omega_{ik} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial V_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^n V_i \omega_{ij} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right) \omega_{jk} \left( \frac{\partial f}{\partial s} \right) \right] \partial_k. \\ \frac{D}{\partial t} \frac{DV}{\partial s} &= \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial^2 V_k}{\partial t \partial s} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i}{\partial t} \omega_{ik} \left( \frac{\partial f}{\partial s} \right) + V_i \frac{\partial}{\partial t} \left( \omega_{ik} \left( \frac{\partial f}{\partial s} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial V_j}{\partial s} + \sum_{i=1}^n V_i \omega_{ij} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right) \omega_{jk} \left( \frac{\partial f}{\partial s} \right) \right] \partial_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V - \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V &= \sum_{i,k=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial s} \left( \omega_{ik} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \omega_{ik} \left( \frac{\partial f}{\partial s} \right) \right) \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \left( \omega_{ij} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) \omega_{jk} \left( \frac{\partial f}{\partial s} \right) - \omega_{ij} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) \omega_{jk} \left( \frac{\partial f}{\partial s} \right) \right) V_i \partial_k \end{aligned}$$

Para  $\omega = \sum_i a_i dx^i$  tenemos  $\omega \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) = \sum_i a_i \frac{\partial f_i}{\partial t}$

$$\frac{\partial}{\partial s} \omega \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x^j} \frac{\partial f_j}{\partial s} \frac{\partial f_i}{\partial t} + a_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial s \partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \omega \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \omega \left( \frac{\partial f}{\partial s} \right) = \sum_i \left( \frac{\partial a_i}{\partial x^j} - \frac{\partial a_j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial f_j}{\partial s} \frac{\partial f_i}{\partial t} = d\omega \left( \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial s} \frac{DV}{\partial t} - \frac{D}{\partial t} \frac{DV}{\partial s} &= \sum_{i,k=1}^n \left( d\omega_{ik} - \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \wedge \omega_{jk} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) V_i \partial_k \\ &= \sum_{i,k=1}^n \Omega_{ik} \left( \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) V_i \partial_k \\ &= R_{\frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}} V \end{aligned}$$

□

COROLARIO 4.2. Sean  $p \in M$ ,  $f(t, s) = \exp_p(tu(s))$ . El campo vectorial  $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$  definido a lo largo de  $\gamma(t) = f(t, 0)$  satisface la ecuación diferencial de Jacobi

$$(4.8) \quad \frac{D^2 J}{dt^2}(t) + R_{J(t)\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$$

**Demostración.** Para  $s$  fija la curva  $t \mapsto f(t, s)$  es una geodésica, por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} + R_{\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}} \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} + R_{\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}} \frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned}$$

Evaluando en  $s = 0$  obtenemos (4.8).  $\square$

DEFINICIÓN 4.5. Un campo vectorial  $J$  a lo largo de la geodésica  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  se llama campo de Jacobi si satisface (4.8).

PROPOSICIÓN 4.4. Sea  $J$  un campo de Jacobi a lo largo de la geodésica  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  con  $J(0) = 0$ . Entonces hay una curva  $u(\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow T_p M$ ,  $p = \gamma(0)$  tal que si definimos  $f(t, s) = \exp_p(tu(s))$ , entonces

$$J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$$

**Demostración.** Sea  $v = \gamma'(0)$  y sea  $u(\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow T_p M$  tal que  $u(0) = v$  y  $u'(0) = \frac{DJ}{dt}(0)$ . Si  $f(t, s) = \exp_p(tu(s))$  entonces

$$Y(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) = (\exp_p)_* t v (tu'(0))$$

es un campo de Jacobi con  $Y(0) = 0$ . Como

$$\begin{aligned} \frac{DY}{dt} &= \frac{D}{dt} * t (\exp_p)_* v (tu'(0)) \\ &= t \frac{D}{dt} (\exp_p)_* t v (tu'(0)) + (\exp_p)_* t v (tu'(0)) \\ \frac{DY}{dt}(0) &= (\exp_p)_* 0 (tu'(0)) = u'(0) = \frac{DJ}{dt}(0) \end{aligned}$$

Por el teorema de existencia y unicidad 2.2  $J(t) = Y(t)$ .

DEFINICIÓN 4.6. Sea  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  una geodésica. El punto  $\gamma(T)$  ( $0 < T \leq a$ ) es conjugado a  $\gamma(0)$  a lo largo de  $\gamma$ , si existe un campo de Jacobi  $J$  no nulo a lo largo de  $\gamma$  tal que  $J(0) = 0 = J(T)$ . El número máximo de tales campos linealmente independientes es la **multiplicidad** del punto conjugado  $\gamma(T)$ .

□

**COROLARIO 4.3.** *Sea  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  una geodésica. El punto  $\gamma(T)$  es conjugado a  $\gamma(0)$  a lo largo de  $\gamma$  si y sólo si  $Tv = T\gamma'(0)$ , es un punto crítico de  $\exp_p$ . Más aún, la multiplicidad del punto conjugado  $\gamma(T)$  es igual a  $\dim \ker(\exp_p)_{*Tv}$ .*

**Demostración.** Por la Proposición 4.4, cualquier campo de Jacobi  $J$  a lo largo de  $\gamma$  con  $J(0) = 0$  se escribe  $J(t) = (\exp_p)_{*tv}(tw)$ ,  $w = \frac{DJ}{dt}(0)$ . Por el Teorema de existencia y unicidad 2.2,  $J$  no es nulo si y sólo si  $w \neq 0$ . Por lo tanto  $\gamma(T)$  es conjugado a  $\gamma(0)$  si y sólo si  $\exists w \in T_p M \setminus 0$  tal que

$$(\exp_p)_{*Tv}(Tw) = 0.$$

Otra vez por el Teorema 2.2 los campos de Jacobi  $J_1, \dots, J_k$  con  $J_i(0) = 0$  son linealmente independientes si y sólo si

$$\frac{DJ_1}{dt}(0), \dots, \frac{DJ_k}{dt}(0)$$

son linealmente independientes. □

### 3. La primera y segunda variaciones de la acción

**DEFINICIÓN 4.7.** Una trayectoria diferenciable por tramos que une a los puntos  $p$  y  $q$ , es una función continua  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  tal que  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma(T) = q$  y existe una partición de  $[0, T]$  de la forma

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = T$$

de tal manera que  $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$  es diferenciable de clase  $C^\infty$ .

El conjunto formado por estas trayectorias (que unen a  $p$  y  $q$  en  $M$ ) se denotará por  $\Omega(M; p, q)$ .

El espacio tangente a  $\Omega(M; p, q)$  en la trayectoria  $\gamma$ , es el espacio vectorial que esta formado por todos los campos vectoriales  $W$  a lo largo de  $\gamma$ , diferenciables por tramos, para los cuales  $W(0) = 0$  y  $W(T) = 0$ .

**DEFINICIÓN 4.8.** Considere una trayectoria  $\gamma \in \Omega(M; p, q)$ . Una variación de  $\gamma$  es una función continua

$$F : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega(M; p, q)$$

para alguna  $\varepsilon > 0$ , que satisface lo siguiente:

- (1)  $F(0) = \gamma$ .
- (2) Existe una partición de  $[0, T]$ , con  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = T$ , de tal manera que la función

$$f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, T] \rightarrow M$$

definida por  $f(u, t) = F(u) \cdot t$  es  $C^\infty$  al restringirla a cada  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_{i-1}, t_i]$ , con  $i = 1, \dots, k$ .

Dado que cada  $F(u)$  pertenece a  $\Omega(M; p, q)$ , se tiene que  $f(u, 0) = p$  y  $f(u, T) = q$  para todo  $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

OBSERVACIONES 4.3.

- (1) Para referirnos a la variación usaremos  $f$  ó  $F$  indistintamente. Algunas veces en vez de tomar  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  se toma una vecindad  $U$  de  $\mathbb{R}^s$  con centro en 0 y en tal caso  $f$  sera llamada variación a  $s$  parámetros de  $\gamma$ .
- (2) Si  $f$  es diferenciable entonces diremos que la variación es diferenciable.

Para  $t$  fija, consideremos la curva diferenciable  $f_t : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  dada por  $f_t(u) = f(u, t)$ . El vector velocidad de esta curva transversal en  $u = 0$  es

$$W(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(0, t).$$

El campo vectorial  $W \in T_\gamma\Omega$  es el campo tangente a la variación  $f$ .

OBSERVACIÓN 4.4. Dado cualquier campo  $W$  diferenciable por tramos, a lo largo de  $\gamma$  la función  $f(u, t) = \exp_{\gamma(t)}(uW(t))$  define una variación de  $\gamma$  cuyo campo tangente es  $W(t)$ .

Consideremos el funcional de Acción

$$E : \Omega(M; p, q) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(4.9) \quad E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^T \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle dt.$$

LEMA 4.1. Sean  $p, q \in M$  y sea  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  una geodésica minimizante que une  $p$  con  $q$ . Para toda curva  $c : [0, T] \rightarrow M$  que une  $p$  con  $q$  se tiene que

$$E(\gamma) \leq E(c)$$

y la igualdad vale si y sólo si  $c$  es una geodésica minimizante.

**Demostración.** Por la desigualdad de Schwarz

$$l(c)^2 = \left( \int_0^T |c'| dt \right)^2 \leq T \int_0^T |c'|^2 dt = TE(c)$$

y la igualdad ocurre si y sólo  $|c'|$  es constante. Así

$$TE(\gamma) = l(\gamma)^2 \leq l(c)^2 \leq TE(c)$$

y  $E(\gamma) = E(c)$  implica que  $|c'|$  es constante y  $l(\gamma) = l(c)$ , lo que implica que  $c$  es una geodésica minimizante.  $\square$

**TEOREMA 4.4.** Fórmula de la primera variación. Sean  $F$  una variación de la curva  $\gamma \in \Omega(M; p, q)$  y  $W(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(0, t)$  su campo vectorial tangente, entonces

$$(4.10) \quad (E \circ F)'(0) = - \int_0^T \left\langle \frac{D\gamma'}{dt}, W(t) \right\rangle dt - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \gamma'(t_i^+) - \gamma'(t_i^-), W(t_i) \rangle$$

donde

$$\gamma'(t_i^-) = \lim_{t \rightarrow t_i^-} \gamma'(t); \quad \gamma'(t_i^+) = \lim_{t \rightarrow t_i^+} \gamma'(t)$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned} E \circ F &= \frac{1}{2} \int_0^T \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt \\ \frac{d(A_L \circ F)}{du} &= \int_0^T \left\langle \frac{D}{du} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt = \int_0^T \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt \\ &= \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt - \int_0^T \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt \\ &= \sum_{i=1}^k \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} - \int_0^T \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt \end{aligned}$$

Evaluando en  $u = 0$  obtenemos la fórmula (4.10) □

**DEFINICIÓN 4.9.** Una trayectoria  $\gamma \in \Omega(M; p, q)$  se llama crítica si y sólo si  $(E \circ F)'(0) = 0$  para toda variación  $F$  de  $\gamma$ .

**COROLARIO 4.5.** La trayectoria  $\gamma \in \Omega(M; p, q)$  es crítica si y solo si es una geodésica

**Demostración.** Supongase que  $\gamma$  es una trayectoria crítica, entonces de la ecuación (4.10) tenemos que

$$(4.11) \quad - \int_0^T \left\langle \frac{D\gamma'}{dt}, W(t) \right\rangle dt + \sum_{i=1}^k \left\langle \gamma', W \right\rangle \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} = 0$$

para toda variación. Sea  $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable por tramos con  $g(t) > 0$  si  $t \neq t_i$ , y  $g(t_i) = 0$  con  $i = 0, 1, \dots, k - 1$ . Sea  $W(t) = g(t) \frac{D\gamma'}{dt}$ , entonces

$$\sum_{i=1}^k \left\langle \gamma', W \right\rangle \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} = 0.$$

Así, por (4.11)

$$\int_0^T g(t) \left| \frac{D\gamma'}{dt} \right|^2 dt = 0.$$

de donde  $\frac{D\gamma'}{dt} = 0, \forall t \leq t_i$  y así cada  $\gamma|(t_i, t_{i+1})$  es una geodésica. Ahora nos falta ver lo que ocurre en los puntos  $t_i$ . Tomemos otro campo variacional  $W^*(t)$  con  $W^*(0) = 0 = W^*(1)$  y si  $t_i \neq 0, 1$  definimos  $W^*(t_i) = \gamma'(t_i^-) - \gamma'(t_i^+)$  y usemos el hecho que  $\gamma|(t_i, t_{i+1})$  es una geodésica. Así

$$0 = \sum_{i=1}^k |\gamma'(t_i^-) - \gamma'(t_i^+)|^2$$

de donde  $\gamma \in C^1$  en cada  $t_i$ , por lo tanto  $\gamma$  es una geodésica. Ahora suponga que  $\gamma \in \Omega(M; p, q)$ , es una geodésica, entonces

$$\int_0^T \left\langle \frac{D\gamma'}{dt}, W(t) \right\rangle dt = 0.$$

para todo  $W \in T_\gamma\Omega$ . Como  $\gamma$  es diferenciable,

$$\sum_{i=1}^k \left\langle \gamma', W \right\rangle \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} = 0.$$

Sumando las dos ecuaciones obtenemos  $(E \circ F)'(0) = 0$ .  $\square$

**TEOREMA 4.6.** Fórmula de la segunda variación. *Sea  $F$  una variación de la geodésica  $\gamma$  con campos tangente  $W$ . Entonces*

$$(4.12) \quad (E \circ F)''(0) = - \int_0^T \left\langle W(t), \frac{D^2W}{dt} + R_{W\gamma'(t)}\gamma'(t) \right\rangle dt \\ - \sum_{i=1}^{k-1} \left\langle W(t_i), \frac{DW}{dt}(t_i^+) - \frac{DW}{dt}(t_i^-) \right\rangle.$$

**Demostración.**

$$(E \circ F)'' = \sum_{i=1}^k \left\langle \frac{D}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} + \sum_{i=1}^k \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{D}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} \\ - \int_0^T \left\langle \frac{D}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt - \int_0^T \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt$$

Evaluando en  $u = 0$  el primer término se anula, y ya que  $\gamma$  es una geodésica, también lo hace el tercero. Como en el Corolario 4.2

$$\frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t}(0, t) = \frac{D^2W}{dt^2} + R_{W\gamma'(t)}\gamma'(t).$$

Evaluando el segundo término en  $u = 0$

$$\sum_{i=1}^k \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{D}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} = - \sum_{i=1}^{k-1} \left\langle W(t_i), \frac{DW}{dt}(t_i^+) - \frac{DW}{dt}(t_i^-) \right\rangle.$$

Juntando estos hechos obtenemos (4.12) □

**TEOREMA 4.7. Bonnet-Myers**

Sea  $M$  una variedad riemanniana completa de dimensión  $n$  tal que para todo  $p \in M$ ,  $v \in T_p M$ ,  $|v| = 1$  se tiene que

$$\text{Ric}(v, v) \geq \frac{(n-1)}{r^2} > 0.$$

Entonces  $M$  es compacta y  $\text{diam } M \leq \pi r$ .

**Demostración.** Sean  $p, q \in M$ . Sea  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  geodésica minimizante uniendo  $p$  con  $q$ . Basta demostrar que  $l(\gamma) \leq \pi r$ .

Supongamos por el contrario que  $l(\gamma) > \pi r$ . Sean

$$e_1(t), \dots, e_{n-1}(t), e_n(t) = \frac{\gamma'(t)}{l(\gamma)}$$

campos paralelos ortonormales a lo largo de  $\gamma$ . Definamos

$$W_j(t) = \sin(\pi t) e_j(t), \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Sea  $F_j$  una variación con campo tangente  $W_j$  y sea  $E_j = E \circ F_j$ . Usando que  $e_j$  es paralelo en (4.12) tenemos

$$\begin{aligned} E_j''(0) &= - \int_0^1 \left\langle W_j, \frac{D^2 W_j}{dt} + R_{W_j \gamma'(t)} \gamma'(t) \right\rangle dt \\ &= \int_0^1 \sin^2(\pi t) (\pi^2 - l^2 K(e_n(t), e_j(t))) dt \end{aligned}$$

donde  $K(e_n(t), e_j(t))$  es la curvatura seccional del plano generado por  $e_n(t), e_j(t)$ . Sumando

$$\sum_{i=1}^{n-1} E_j''(0) = \int_0^1 \sin^2(\pi t) ((n-1)\pi^2 - l^2 \text{Ric}(e_n(t), e_n(t))) dt.$$

Como  $\text{Ric}(e_n(t), e_n(t)) \geq \frac{(n-1)}{r^2}$  y  $l > \pi r$ ,

$$\sum_{i=1}^{n-1} E_j''(0) < 0$$

y por lo tanto existe un  $j$  tal que  $E_j''(0) < 0$ , lo que contradice el hecho de que  $\gamma$  es minimizante. □

**COROLARIO 4.8.** *Sea  $M, \langle, \rangle$  una variedad riemanniana completa tal que  $Ric(v, v) \geq \delta > 0$  para todo  $p \in M, v \in T_p M$ . Entonces el cubriente universal de  $M$  es compacto. En particular  $\pi_1(M)$  es finito.*

**Demostración.** Si  $P : \tilde{M} \rightarrow M$  es el recubrimiento universal,  $\tilde{M}$  con la métrica  $P^*\langle, \rangle$  es completa y  $\tilde{R}ic \geq \delta > 0$ . Por el teorema 4.7,  $\tilde{M}$  es compacta. Así, las fibras de  $P$  son finitas. Pero la cardinalidad de  $\pi_1(M)$  coincide con la de las fibras.  $\square$

## Problemas

EJERCICIO 1. Sean  $(M, \mathcal{A}), (N, \mathcal{B})$  variedades diferenciables de dimensiones  $m, n$ .

a) La colección de cartas coordenadas  $(U \times V, \varphi \times \psi)$  con  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}, (V, \psi) \in \mathcal{B}$  determina una estructura diferenciable de dimensión  $m + n$  en  $M \times N$ .

b) Las proyecciones  $\pi_1 : M \times N \rightarrow M, \pi_2 : M \times N \rightarrow N$  son diferenciables.

c)  $F : P \rightarrow M \times N$  es diferenciable si y sólo si  $\pi_1 \circ F, \pi_2 \circ F$  son diferenciables.

d) Si  $f : P \rightarrow M, g : Q \rightarrow N$  son diferenciables, entonces  $f \times g$  lo es. Determine rango  $f \times g$  en términos de rango  $f$ , rango  $g$ .

EJERCICIO 2. Sean  $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$  y  $\pi_{\pm} : \mathbb{S}^n \setminus \{p_{\pm}\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  las proyecciones estereográficas desde los polos  $p_{\pm} = (0, \dots, 0, \pm 1)$ . Demuestre que  $\{(\mathbb{S}^n \setminus \{p_+\}, \pi_+), (\mathbb{S}^n \setminus \{p_-\}, \pi_-)\}$  determina una estructura diferenciable.

EJERCICIO 3. Sean  $\mathbb{P}^n$  el espacio proyectivo y  $g : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  la proyección canónica. Muestre que  $f : \mathbb{P}^n \rightarrow M$  es diferenciable si y sólo si  $f \circ g : \mathbb{S}^n \rightarrow M$  lo es y rango  $f = \text{rango } f \circ g$

EJERCICIO 4. Sean  $C_0, C_1$  cerrados disjuntos en la variedad  $C^\infty M$ . Demuestre que hay una  $f : M \rightarrow [0, 1] C^\infty$  tal que  $C_i = f^{-1}(i), i = 0, 1$ .

EJERCICIO 5. Sea  $M$  una variedad diferenciable.

a) El conjunto  $N \subset M$  tiene una estructura de subvariedad diferenciable de dimensión  $k$  de  $M$  si y sólo si para todo punto de  $p \in N$  hay una carta  $(U, \varphi)$  alrededor de  $p$  tal que  $N \cap U = U \cap \varphi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\})$ .

b) El conjunto  $N \subset M$  resulta una subvariedad cerrada de  $M$  si y sólo si una carta como en a) existe para todo punto de  $M$ .

EJERCICIO 6. El conjunto  $\{(x, |x|) : x \in \mathbb{R}\}$  no es la imagen de una inmersión  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

EJERCICIO 7. a) Sean  $U \subset \mathbb{R}^k$  abierto y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  diferenciable, entonces  $\text{graf } f = \{(p, f(p)) : p \in U\}$  es subvariedad de  $\mathbb{R}^n$ .

b) Toda subvariedad de  $\mathbb{R}^n$  es localmente la gráfica de una función diferenciable.

EJERCICIO 8. Sean  $M, N$  variedades de dimensión  $n$  y  $f : M \rightarrow N$  una inmersión. Demuestre que

a)  $f$  es una transformación abierta, o sea que manda abiertos en abiertos.

b) Si  $M$  es compacta y  $N$  es conexa entonces  $f$  es sobre.

EJERCICIO 9. Sea  $\mathbb{S}^1$  el conjunto de complejos unitarios. Defina  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  por  $f(t) = (\exp(it), \exp(i\alpha t))$  donde  $\alpha$  es un número irracional. Pruebe que  $f$  es una inmersión inyectiva y que  $f(\mathbb{R})$  es densa en  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ .

EJERCICIO 10. a) Sean  $q$  un valor regular de  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $M = g^{-1}(q)$ . Sea  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  diferenciable. Demuestre que para todo  $p \in M$ ,  $\ker D(f|_M)_p = \ker D(f, g)_p$ .

b) Defina  $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  por  $f([x, y, z]) = (yz, xz, xy)$ . Muestre que  $f$  no es una inmersión en precisamente 6 puntos.

c) Defina  $F : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  por  $F([x, y, z]) = (x^2 - y^2, yz, xz, xy)$ . Muestre que  $F$  es un encaje.

EJERCICIO 11. Una función continua  $f : X \rightarrow Y$  se llama propia si para cualquier compacto  $C \subset Y$  se tiene que  $f^{-1}(C)$  es compacto. El conjunto límite  $L(f)$  de  $f$  es el conjunto de los  $y \in Y$  para los cuales existe una sucesión  $(x_n)$  en  $X$  sin subsucesiones convergentes tal que  $y = \lim f(x_n)$ .

a)  $f$  es propia si y sólo si  $L(f) = \emptyset$ .

b)  $f(X)$  es cerrado en  $Y$  si y sólo si  $L(f) \subset f(X)$

c) Encuentre  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $f(\mathbb{R})$  cerrada pero  $L(f) \neq \emptyset$ .

d)  $f : X \rightarrow Y$  continua e inyectiva es un homeomorfismo sobre su imagen si y sólo si  $L(f) \cap f(X) = \emptyset$ .

c) Una subvariedad  $N \subset M$  es cerrada si y sólo si la inclusión  $i : N \rightarrow M$  es propia.

e) Si  $M$  es una variedad  $C^\infty$  hay una  $f \in C^\infty(M)$  propia.

EJERCICIO 12. Sea  $M(m, n)$  el conjunto de matrices reales  $m \times n$  y sea  $M(m, n : k)$  el conjunto de matrices en  $M(m, n)$  con rango  $k$ . Demuestre que  $M(m, n : k)$  es una subvariedad de  $M(m, n)$  de dimensión  $k(n + m - k)$ .

**Sugerencia:** Para  $X_0 \in M(m, n : k)$  hay matrices de permutación  $P \in M(m, m), Q \in M(n, n)$  tales que  $PX_0Q = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}$  con  $A_0 \in M(k, k)$  nonsingular. Si  $X$  es cercana a  $X_0$  entonces  $PXQ = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  con  $A \in M(k, k)$  nonsingular y  $X \in M(m, n : k)$  si y sólo si  $D = CA^{-1}B$ .

EJERCICIO 13. Suponga que la operación  $\odot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisface

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2) \odot b &= a_1 \odot b + a_2 \odot b \\ a \odot (b_1 + b_2) &= a \odot b_1 + a \odot b_2 \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda(a \odot b) &= (\lambda a) \odot b = a \odot (\lambda b) \\ a \odot (1, 0, \dots, 0) &= a \\ \forall a \neq 0, \exists b \ni a \odot b &= b \odot a = (1, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Sea  $e_1, \dots, e_n$  la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ . Demuestre que

- Todo punto de  $\mathbb{S}^{n-1}$  se representa de manera única en la forma  $a \odot e_1$ .
- Si  $a \neq 0$ , entonces  $a \odot e_1, \dots, a \odot e_n$  son linealmente independientes.
- Si  $a \in \mathbb{S}^{n-1}$ , las proyecciones de  $a \odot e_2, \dots, a \odot e_n$  en  $T_a \mathbb{S}^{n-1}$  son linealmente independientes.
- Multiplicación por  $a$  es una función continua.
- $T\mathbb{S}^{n-1}$  es trivial.
- $T\mathbb{P}^{n-1}$  es trivial.

EJERCICIO 14. Sean  $\pi : E \rightarrow X$  un haz vectorial y  $f : Y \rightarrow X$  continua. Sea

$$f^*(E) = \{(y, e) \in Y \times E : f(y) = \pi(e)\}$$

Defina  $\pi' : f^*(E) \rightarrow Y$  por  $\pi'(y, e) = y$  y  $\hat{f} : f^*(E) \rightarrow E$  por  $\hat{f}(y, e) = e$ . Podemos transferir a cada fibra  $\pi'^{-1}(y) = \{y\} \times \pi^{-1}(f(y))$ , la estructura de espacio vectorial de  $\pi^{-1}(f(y))$ .

a) Muestre que  $\pi' : f^*(E) \rightarrow Y$  es un haz vectorial y que  $\hat{f} : f^*(E) \rightarrow E$  es una transformación de haces que es un isomorfismo en cada fibra.

b) Suponga que tenemos otro haz vectorial  $\pi'' : E'' \rightarrow Y$  y una transformación de haces  $f'' : E'' \rightarrow E$  tal que

$$\begin{array}{ccc} E'' & \xrightarrow{f''} & E \\ \downarrow \pi'' & & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

conmuta. Demuestre que  $E'$  y  $E''$  son isomorfos,  $E' \cong E''$ .

- Si  $g : Z \rightarrow Y$  es continua  $(f \circ g)^*(E) \cong g^*(f^*(E))$ .
- Si  $\pi : E \rightarrow X$  es orientable entonces  $\pi' : f^*(E) \rightarrow Y$  es orientable.

e) Dar un ejemplo en el que  $\pi' : f^*(E) \rightarrow Y$  es orientable pero  $\pi : E \rightarrow X$  no es orientable.

f) Para el haz vectorial  $\pi : E \rightarrow X$  considere el haz  $\pi' : \pi^*(E) \rightarrow E$ . Muestre que si  $\pi : E \rightarrow X$  no es orientable entonces tampoco  $\pi' : \pi^*(E) \rightarrow E$  es orientable.

EJERCICIO 15. Dados los haces  $\pi : E \rightarrow X$ ,  $\pi' : E' \rightarrow X$  sea  $E \oplus E' = \{(e, e') : \pi(e) = \pi'(e')\}$  Definamos  $\pi'' : E \oplus E' \rightarrow X$  por  $\pi''(e, e') = \pi(e) = \pi'(e')$ .

a) Muestre que  $\pi'' : E \oplus E' \rightarrow X$  es un haz vectorial cuya fibra sobre  $p$  es la suma directa de las fibras  $\pi^{-1}(p)$  y  $\pi'^{-1}(p)$ .

b) Muestre que si  $f : Y \rightarrow X$  es continua  $f^*(E \oplus E') \cong f^*(E) \oplus f^*(E')$

c) Dados los haces  $\pi_i : E_i \rightarrow X_i, i = 1, 2$ , muestre que  $\pi_1 \times \pi_2 : E_1 \times E_2 \rightarrow X_1 \times X_2$  es un haz vectorial.

d) Si  $\Delta : X \rightarrow X \times X$  es la transformación diagonal  $\Delta(x) = (x, x)$ , muestre que  $E \oplus E' \cong \Delta^*(E \times E')$ .

e) Si  $E$  es orientable, entonces  $E'$  es orientable si y sólo si  $E \oplus E'$  es orientable.

g) Para cada espacio vectorial  $V$  defina una orientación natural de  $V \oplus V$  y pruebe que  $E \oplus E$  siempre es orientable.

EJERCICIO 16. Sean  $M_1, M_2$  variedades diferenciables

a) Si  $\pi_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$  son las proyecciones naturales, muestre que  $T(M_1 \times M_2) \cong \pi_1^*(TM_1) \oplus \pi_2^*(TM_2)$ .

b) Si  $M_1, M_2$  son orientables, entonces también  $M_1 \times M_2$  lo es.

EJERCICIO 17. Muestre que el haz tangente de una variedad diferenciable siempre es una variedad orientable.

EJERCICIO 18. Una matriz simétrica  $S \in M(n, n)$  es semidefinida positiva si  $\langle Sv, v \rangle \geq 0$  para todo  $v \in \mathbb{R}^n$ . Muestre que

a) Si  $A \in M(n, n)$ ,  $A^t A$  es semidefinida positiva.

b) Toda matriz semidefinida positiva  $S$  puede escribirse como  $S = B^2$  para alguna  $B$ .

c) Toda  $A \in Gl(n, \mathbb{R})$  puede escribirse de manera única como  $A = RS$  con  $R \in O(n)$  y  $S$  definida positiva.

d) Las matrices  $R$  y  $S$  son funciones continuas de  $A$ . **Sugerencia:** Si  $A_n \rightarrow A$  y  $A_n = R_n S_n$ , entonces  $R_n$  tiene una subsucesión convergente.

e)  $Gl(n, \mathbb{R})$  es difeomorfo a  $O(n) \times \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$ .

EJERCICIO 19. Sean  $(M, \langle, \rangle)$ ,  $(M', \langle, \rangle')$  variedades riemannianas. Una isometría local es un difeomorfismo  $F : U \subset M \rightarrow M'$  sobre su imagen tal que  $F^* \langle, \rangle' = \langle, \rangle$ . Un campo vectorial en  $(M, \langle, \rangle)$  se llama campo de Killing si su flujo local  $\{\varphi_t\}$  consiste de isometrías locales. Pruebe que

a) Un campo lineal en  $\mathbb{R}^n$  definido por la matriz  $A$  es de Killing si y sólo si  $A$  es antisimétrica.

b) Sea  $F : M \rightarrow M'$  una isometría, entonces  $X \in \mathfrak{X}(M)$  es de Killing  $\iff F_*X \in \mathfrak{X}(M')$  es de Killing.

c)  $X \in \mathfrak{X}(M)$  es de Killing  $\iff \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle = 0 \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ . **Sugerencia:**  $X$  es de Killing  $\iff L_X \langle \cdot, \cdot \rangle$ .

EJERCICIO 20. Sea  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$   $n$ -variedad riemanniana.

a) Muestre que para cada  $p \in M$  existe una base ortonormal local  $\{E_1, \dots, E_n\}$  alrededor de  $p$  tal que  $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$ .  $\{E_1, \dots, E_n\}$  se llama *marco geodésico* en  $p$ .

b) Sea  $\{E_1, \dots, E_n\}$  marco geodésico en  $p$ . Pruebe que

$$\text{grad } f(p) = \sum_{i=1}^n E_i(f) E_i(p).$$

$$X = \sum_{i=1}^n f_i E_i \implies \text{div } X(p) = \sum_{i=1}^n E_i(f_i)(p).$$

EJERCICIO 21. Una acción del grupo de Lie  $G$  sobre la variedad  $M$  es una transformación diferenciable  $G \times M \rightarrow M$ ,  $(g, x) \mapsto g \cdot x$  tal que  $gh \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ . La órbita de un punto  $x$  bajo la acción es el conjunto  $G \cdot x = \{g \cdot x : g \in G\}$ . El grupo de isotropía de un punto  $x$  es el conjunto  $G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$ . La acción se llama transitiva si  $M$  es la órbita de un punto.

a)  $O(n)$  actúa de forma natural en  $\mathbb{R}^n$ . Si  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ , entonces  $\mathbb{S}^n = O(n) \cdot x$  y el grupo de isotropía de  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$  es el conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} : B \in O(n-1) \right\} \cong O(n-1).$$

La acción de  $SO(n) = \{A \in O(n) : \det A = 1\}$  en  $\mathbb{S}^{n-1}$  es también transitiva y  $SO(n)_{e_1} \cong SO(n-1)$ .

b) Como  $SO(n)$  actúa linealmente en  $\mathbb{R}^n$ , induce una acción transitiva en el espacio proyectivo  $\mathbb{P}^{n-1}$  y el grupo de isotropía de  $\mathbb{R}e_1$  es el conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} \det B^{-1} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} : B \in O(n-1) \right\} \cong O(n-1).$$

c) El grupo unitario  $U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : A\bar{A}^t = I\}$  actúa transitivamente en  $\mathbb{S}^{2n-1} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$  y  $U(n)_{e_1} \cong U(n-1)$ .

d) El grupo  $SU(n) = \{A \in U(n) : \det A = 1\}$  actúa linealmente en  $\mathbb{C}^n$  y por lo tanto induce una acción en el espacio proyectivo complejo  $\mathbb{C}P^{n-1}$  de líneas complejas a través del origen de  $\mathbb{C}^n$ . La acción es

transitiva y el grupo de isotropía de  $\mathbb{C}e_1$  es el conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} \det B^{-1} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} : B \in U(n-1) \right\} \cong U(n-1).$$

e) El grupo  $Sl(2, \mathbb{R})$  actúa transitivamente en el semiplano superior  $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$  mediante transformaciones fraccionales lineales

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

El grupo de isotropía de  $i$  es  $O(2)$ . El grupo

$$SU(1, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}$$

actúa transitivamente en el disco unitario  $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  mediante transformaciones fraccionales lineales y  $SU(1, 1)_0 \cong U(1)$ .

EJERCICIO 22. Sea  $V$  un espacio vectorial. Para  $v \in V$ ,  $\omega \in \bigwedge^r V^*$ , definimos la *contracción*  $i(v)\omega \in \bigwedge^{r-1} V^*$  mediante

$$i(v)\omega(v_1, \dots, v_{r-1}) = \omega(v, (v_1, \dots, v_{r-1})).$$

- a) Muestre que  $i(v)(i(w)\omega) = -i(w)(i(v)\omega)$ .  
 b) Muestre que si  $\omega \in \bigwedge^k V^*$ ,  $\eta \in \bigwedge^r V^*$ , entonces

$$i(v)(\omega \wedge \eta) = (i(v)\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (i(v)\eta)$$

EJERCICIO 23. Sea  $V$  un espacio vectorial. Un elemento  $\omega \in \bigwedge^r V^*$  se llama *descomponible* si existen  $\phi_1, \dots, \phi_r \in V$  tales que

$$\omega = \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_r.$$

a) Demuestre que si  $\dim V \leq 3$ , todo elemento de  $\bigwedge V^*$  es descomponible.

- b) Si  $\dim V > 3$  dé un ejemplo de un elemento indescomponible.  
 El anulador de  $\omega \in \bigwedge^r V^*$  es el conjunto

$$\text{an}(\omega) = \{\phi \in V^* : \phi \wedge \omega = 0\}.$$

c) Muestre que  $\dim \text{an}(\omega) \leq r$  y que la igualdad se da si y sólo si  $\omega$  es descomponible.

- d) Si  $\dim V = n$ , todo elemento de  $\bigwedge^{n-1} V^*$  es descomponible.

EJERCICIO 24. Sea  $V$  un espacio vectorial real de dimensión  $n$  con producto escalar. Extendemos el producto escalar a toda el algebra exterior  $\bigwedge V$  definiendo

$$\langle v_1 \wedge \dots \wedge v_k, w_1 \wedge \dots \wedge w_k \rangle = \det(\langle v_i, w_j \rangle)$$

y extendiendo bilinealmente.

a) Pruebe que si  $e_1, \dots, e_n$  es una base ortonormal de  $V$  entonces la base  $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$  de  $\bigwedge^k V$  es ortonormal.

Eligiendo una orientación  $\mathcal{O}$  en  $V$  definamos  $*$  :  $\bigwedge V \rightarrow \bigwedge V$  tal que si  $(e_1, \dots, e_n)$  es una base ortonormal

$$*(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = \pm 1, *(1) = \pm e_1 \wedge \dots \wedge e_n, *(e_1 \wedge \dots \wedge e_p) = \pm e_{p+1} \wedge \dots \wedge e_n$$

donde el signo es  $+$  si  $(e_1, \dots, e_n) \in \mathcal{O}$  y  $-$  en caso contrario.

b) Pruebe que  $**| \bigwedge^p V = (-1)^{p(n-p)}$  y que si  $\omega, \eta \in \bigwedge^p V$ , entonces

$$\langle \omega, \eta \rangle = *(\omega \wedge *\eta) = *(\eta \wedge *\omega).$$

c) Para  $v \in V$  defina  $\gamma : \bigwedge^{p+1} V \rightarrow \bigwedge^p V$  por

$$\langle \gamma(\omega), \xi \rangle = \langle \omega, v \wedge \xi \rangle$$

para  $\omega \in \bigwedge^{p+1} V, \xi \in \bigwedge^p V$ . Pruebe que

$$\gamma(\omega) = (-1)^{np} * (v \wedge *\omega).$$

EJERCICIO 25. Lema de Cartan.

Sea  $M$  variedad diferenciable. Sean  $\omega_1, \dots, \omega_r$  1-formas linealmente independientes en cada punto de  $M$ . Sean  $\theta_1, \dots, \theta_r$  1-formas tales que

$$\sum_{i=1}^r \theta_i \wedge \omega_i = 0.$$

Pruebe que existen  $A_{ij} \in C^\infty(M)$  con  $A_{ij} = A_{ji}$  tales que

$$\theta_i = \sum_{j=1}^r A_{ij} \omega_j, \quad i = 1, \dots, r$$

EJERCICIO 26. Pruebe las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} L_X(\omega_1 \wedge \omega_2) &= L_X \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge L_X \omega_2. \\ X(\omega(X_1, \dots, X_r)) &= L_X \omega(X_1, \dots, X_r) \\ &+ \sum_{j=1}^r (-1)^{j+1} \omega([X, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_r). \\ d\omega(X_1, \dots, X_{r+1}) &= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} L_{X_i} \omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{r+1}) \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} \omega([X_i, X_j], \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{r+1}). \\ L_X \omega &= i(X) d\omega + d(i(X)\omega). \end{aligned}$$

$$2d\omega(X_1, \dots, X_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} (X_i(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{r+1})) + L_{X_i}\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{r+1})).$$

EJERCICIO 27. Sea  $M$  una  $n$ -variedad riemanniana con orientación  $\mathcal{O}$ . Defina el elemento de volumen riemanniano por

$$\nu(v_1, \dots, v_n) = \pm \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)}$$

donde el signo es  $+$  si  $(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{O}$  y  $-$  en caso contrario. Pruebe que

$$L_X \nu = d(i(X)\nu) = \operatorname{div} X \nu$$

**Sugerencia:** Sea  $p \in M$  y sea  $\{E_i : i = 1, \dots, n\}$  un marco geodésico en  $p$ . Sean  $\{\omega_i : i = 1, \dots, n\}$  las 1-formas duales. Muestre que  $\nu = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n$  y que si

$$\theta_i = \omega_1 \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_i \wedge \dots \wedge \omega_n,$$

$$\begin{aligned} i(X)\nu &= \sum_{i=1}^n \omega_i(X)\theta_i, \\ d\omega_i(p) &= 0 \quad , \quad d\theta_i(p) = 0, \\ d(i(X)\nu)(p) &= \sum_{i=1}^n E_i(\omega_i(X))(p)\nu(p) = \operatorname{div} X(p)\nu(p) \end{aligned}$$

EJERCICIO 28. Sea  $M$  una variedad riemanniana. Definimos una métrica riemanniana en  $TM$  de la siguiente manera. Si  $v \in T_p M$ ,  $V, W \in T_v(TM)$ , escogamos curvas  $\alpha, \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TM$  con  $\alpha(0) = \beta(0) = v$ ,  $\alpha'(0) = V$ ,  $\beta'(0) = W$ , entonces

$$\langle \langle V, W \rangle \rangle v = \langle \pi_* V, \pi_* W \rangle_p + \left\langle \frac{D\alpha}{dt}(0), \frac{D\beta}{ds}(0) \right\rangle_p$$

a) Pruebe que  $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$  está bien definida.

b) Un vector  $V \in T_v(TM)$  ortogonal a la fibra  $\pi^{-1}(\pi(v))$  se llama *horizontal*. Si  $\alpha : (a, b) \rightarrow TM$ , pruebe que  $\alpha'(t)$  es horizontal  $\forall t \iff \alpha$  es paralelo a lo largo de la curva  $\pi\alpha : (a, b) \rightarrow M$ .

c) Pruebe que el campo geodésico  $G \in \mathfrak{X}(TM)$  es horizontal en cada punto.

d) Pruebe el *Teorema de Liouville*:  $\operatorname{div} G = 0$ .

EJERCICIO 29. Sea  $M$  una variedad riemanniana tal que para cualquier par de puntos el transporte paralelo entre ellos no depende de

la curva escogida para unirlos. Pruebe que la curvatura es idénticamente nula. **Sugerencia:** Considere una superficie parametrizada  $f : (-\varepsilon, 1 + \varepsilon)^2 \rightarrow M$  tal que  $f(s, 0) = f(0, 0) \forall s \in (-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$ . Si  $V_0 \in T_{f(0,0)}M$  definamos un campo  $V$  a lo largo de  $f$  por  $V(s, 0) = V_0$  y como el transporte paralelo de  $V_0$  a lo largo de la curva  $t \mapsto f(s, t)$ . Entonces

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V + R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right)V = \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V = 0$$

Como el transporte paralelo no depende de la curva escogida,  $V(s, 1)$  es el transporte paralelo de  $V(0, 1)$  a lo largo de la curva  $s \mapsto f(s, 1)$ , de donde  $\frac{D}{\partial s} V(s, 1) = 0$  ya así

$$R_{f(0,1)}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(0, 1), \frac{\partial f}{\partial s}(0, 1)\right)V(0, 1) = 0.$$

La arbitrariedad de  $V_0$  y  $f$  demuestran que  $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $R(X, Y)Z = 0$ .

**EJERCICIO 30.** Una variedad riemanniana  $M$  es un *espacio localmente simétrico* si el tensor de curvatura  $R$  satisface  $\nabla R = 0$ .

a) Sea  $M$  un espacio localmente simétrico y sea  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  una geodésica. Sean  $X, Y, Z$  campos paralelos a lo largo de  $\gamma$ . Pruebe que  $R(X, Y)Z$  también es paralelo a lo largo de  $\gamma$ .

b) Pruebe que si  $\dim M = 2$  y  $M$  es un espacio localmente simétrico, conexo, entonces la curvatura (seccional o escalar) es constante.

c) Si  $M$  tiene curvatura (seccional) constante entonces es un espacio localmente simétrico.

**EJERCICIO 31.** Teorema de Schur.

Sea  $M$  una variedad riemanniana conexa con  $\dim M \geq 3$ . Supongamos que  $M$  es *isotrópica*, es decir si la curvatura seccional  $K(p, \sigma)$  no depende del plano  $\sigma \subset T_p M$ . Pruebe que  $K(p, \sigma)$  tampoco depende del punto  $p \in M$ .

**EJERCICIO 32.** Una variedad riemanniana es una *variedad de Einstein* si existe  $\lambda \in C^\infty(M)$  tal que  $Ric(\cdot, \cdot) = \lambda \langle \cdot, \cdot \rangle$ . Pruebe que

a) Si  $M$  es conexa y de Einstein con  $\dim M \geq 3$ , entonces  $\lambda$  es constante.

b) Si  $M$  es conexa y de Einstein con  $\dim M = 3$ , entonces  $M$  tiene curvatura seccional constante.



## Bibliografía

- [1] Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry* Volúmenes I-II. Publish or Perish.
- [2] Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics 94. Springer
- [3] Bott - Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology*. Graduate Texts in Mathematics 82. Springer
- [4] DoCarmo, M. *Geometría Riemanniana* , Projeto Euclides IMPA, 1988.
- [5] Kobayashi,S. Nomizu, K. *Foundations of Differential Geometry*, Interscience, 1963.
- [6] Lang, S. *Differential and Riemannian Manifolds*, Springer Verlag, 1995.
- [7] OÑeill, B. *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, 1983.
- [8] Petersen, P. *Riemannian Geometry*, GTM Springer, 1997.