Notas para un curso de Geometría Diferencial

Héctor Sánchez Morgado

Instituto de Matemáticas, UNAM, Ciudad Universitaria
C. P. 04510, Cd. de México, México.

Índice General

CAPíTULO 1

Variedades diferenciables.

1. Variedades diferenciables.

DEFINICIÓN 1.1. Un *espacio localmente euclidiano* de dimensión d es un espacio M de Hausdorff tal que cada punto tiene una vecindad homemomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^d$. Si $U \subset M$ es abierto y $\varphi : U \to \mathbb{R}^d$ es un homeomorfismo sobre un abierto de $\mathbb{R}^d$, la pareja (U, φ) se llama *carta de coordenadas*. Dos cartas (U, φ), (V, ψ) se llaman C^k *compatibles* si $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \mathbb{R}^d$, $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \mathbb{R}^d$ son de clase C^k.

OBSERVACIÓN 1.1. Un espacio localmente euclidiano es localmente compacto.

DEFINICIÓN 1.2. Sea M un espacio localmente euclidiano

(1) Un *atlas* $\mathcal{A}$ de clase C^k en M es una colección de cartas de coordenadas cuyos dominios cubren M y cualesquiera dos de ellas son C^k compatibles.
(2) Una *estructura diferenciable* es un atlas maximal $\mathcal{A}$, o sea que si la carta (U, φ) es C^k compatible con todas las cartas de $\mathcal{A}$, entonces $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$.

OBSERVACIÓN 1.2. Si $\mathcal{A}$ es un atlas, podemos agregar todas las cartas (U, φ) que son C^k compatibles con todas las cartas de $\mathcal{A}$ para formar una estructura diferenciable $\mathcal{A}_0$ de clase C^k.

DEFINICIÓN 1.3. Una *variedad diferenciable* de dimensión d y clase C^k es un espacio localmente euclidiano M con base numerable junto con una estructura diferenciable $\mathcal{A}$ de clase C^k.

EJEMPLO 1.1.

(1) U abierto de $\mathbb{R}^d$ con la estructura diferenciable determinada por la carta identidad (U, I).
(2) Sean $(M, \mathcal{A})$ variedad diferenciable y $W \subset M$ abierto, entonces $(W, \mathcal{A}_W)$ con $\mathcal{A}_W = \{(U, \varphi) \in \mathcal{A} : U \subset W\}$ es una variedad diferenciable de la misma dimensión.
(3) El conjunto M_n de matrices reales $n \times n$ junto con una identificación $\varphi : M_n \to \mathbb{R}^{n^2}$ determinan una estructura diferenciable

en M_n. El grupo lineal de matrices invertibles Gl(n,$\mathbb{R}$) es un abierto.

(4) Sean $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$ y $\pi_\pm : S^n \backslash \{p_\pm\} \to \mathbb{R}^n$ las proyecciones estereográficas desde los polos $p_\pm = (0, \ldots, 0, \pm 1)$. Entonces $\{(S^n \setminus \{p_+\}, \pi_+), (S^n \setminus \{p_-\}, \pi_-)\}$ determina una estructura diferenciable.

(5) Sean $(M, \mathcal{A}), (N, \mathcal{B})$ variedades diferenciables de dimensiones m, n, la colección de cartas coordenadas $(U \times V, \varphi \times \psi)$ con $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ determina una estructura diferenciable de dimensión $m + n$ en $M \times N$

Definición 1.4. Sean $(M, \mathcal{A}), (N, \mathcal{B})$ variedades de clase C^k, $W \subset M$ abierto.

- La función $f : W \to \mathbb{R}$ se llama *diferenciable de clase* C^k y escribimos $f \in C^k(W)$, si $f \circ \varphi^{-1}$ es de clase C^k para toda $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$. Para $f \in C^\infty(M)$ definimos
$$\text{soporte}\, f = \overline{\{x \in M : f(x) \neq 0\}}.$$
- La transformación continua $F : M \to N$ se llama *diferenciable de clase* C^k y escribimos $F \in C^k(M, N)$, si $g \circ F \in C^k(F^{-1}(V))$ para toda $g \in C^k(V)$, V abierto de N.

Definición 1.5.

- Una colección $\{U_\alpha\}$ de subconjuntos (abiertos) de M es una *cubierta (abierta)* de $W \subset M$ si $W \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$.
- Un *refinamiento* de la cubierta $\{U_\alpha\}$, es una cubierta $\{V_\beta\}$ tal que $\forall \beta \exists \alpha$ tal que $V_\beta \subset U_\alpha$.
- Una colección $\{A_\alpha\}$ es *localmente finita* si $\forall m \in M \exists W_m$ vecindad de m tal que $\{\alpha : W_m \cap A_\alpha \neq \emptyset\}$ es finito.
- M es *paracompacto* si toda cubierta abierta de M tiene un refinamiento localmente finito.
- Una *partición de la unidad* en una variedad diferenciable M es una colección $\{\varphi_\alpha\} \subset C^\infty(M)$ tal que
  (1) $\{\text{soporte}\, \varphi_\alpha\}$ es localmente finita
  (2) $\varphi_\alpha \geq 0, \sum_\alpha \varphi_\alpha \equiv 1$
- Se dice que $\{\varphi_\alpha\}$ está subordinada a $\{U_\beta\}$ si $\forall \alpha \exists \beta$ tal que soporte $\varphi_\alpha \subset U_\beta$.

Lema 1.1. *Sea M Hausdorff, localmente compacto con base numerable. Entonces toda cubierta abierta tiene un refinamiento numerable localmente finito consistente de abiertos con cerradura compacta.*

Demostración. Existe una cubierta numerable $\{G_k\}$ de abiertos con $\overline{G}_k$ compacto tal que $\overline{G}_k \subset G_{k+1}$. En efecto, sea $\mathcal{A}$ una base numerable y sea $\{U_k\}$ la subcolección que consiste de los elementos con cerradura compacta. Como M es Hausdorff, localmente compacto, $\{U_k\}$ es una base. Sea $G_1 = U_1$ y supongamos que $G_k = U_1 \cup \cdots \cup U_{j_k}$. Sea

$$j_{k+1} = \min\{m > j_k : \overline{G}_k \subset U_1 \cup \cdots \cup U_m\}$$

y definamos

$$G_{k+1} = U_1 \cup \cdots \cup U_{j_{k+1}}.$$

Sea $\{V_\alpha\}$ una cubierta abierta arbitraria. Para $k \geq 3$, $\overline{G}_k - G_{k-1}$ es compacto y esta contenido en $G_{k+1} \setminus \overline{G}_{k-2}$. Tomemos una subcubierta finita de la cubierta $\{V_\alpha \cap (G_{k+1} \setminus \overline{G}_{k-2})\}$ de $\overline{G}_k - G_{k-1}$. Escojamos también una subcubierta finita de la cubierta $\{V_\alpha \cap G_3\}$ de $\overline{G}_2$. La unión de estas subcubiertas finitas es la subcubierta deseada. □

Lema 1.2. *Existe* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ *tal que* $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi = 1$ *en* $\overline{C(1)}$, $\varphi = 0$ *en* $\mathbb{R}^d \setminus C(2)$, *donde* $C(r) = (-r, r)^d$.

Teorema 1.1. Particiones de la Unidad. *Sean M variedad C^∞ y $\{U_\alpha\}$ cubierta abierta. Existe una partición numerable de la unidad $\{\varphi_k\}$ con* soporte φ_k *compacto, subordinada a $\{U_\alpha\}$. Existe una partición de la unidad $\{\varphi_\alpha\}$ con una cantidad a lo más numerable de elementos no nulos y* soporte $\varphi_\alpha \subset U_\alpha$ $\forall\alpha$.

Demostración. Sea φ como en Lema 1.2. Sea $\{G_k\}$ como en el Lema 1.1, $G_0 = \emptyset$. Para $p \in M$ sea $k_p = \max\{k : p \notin \overline{G_k}\}$. Escojamos $\alpha(p)$ tal que $p \in U_{\alpha(p)}$ y (V, τ) carta tal que

$$\tau(p) = 0,\ \overline{C(2)} \subset \tau(V),\ V \subset U_{\alpha(p)} \cap (G_{k_p+2} \setminus \overline{G_{k_p}})$$

Definamos $\psi_p = \varphi \circ \tau$ en V, cero afuera de V. Así $\psi_p = 1$ en un abierto W_p y soporte $\psi_p \subset V$. Para cada k escojamos un subconjunto finito F_k de $\overline{G_k} \setminus G_{k-1}$ tal que $\{W_p : p \in F_k\}$ es una cubierta de $\overline{G_k} \setminus G_{k-1}$. Así $\{W_p : p \in F_k, k \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta numerable de M. Ordenemos $\{\psi_p : p \in F_k, k \in \mathbb{N}\}$ en una sucesión $\{\psi_i\}$. La colección $\{\text{soporte}\, \psi_i\}$ es localmente finita. Sea $\psi = \sum_{i=1}^\infty \psi_i$, entonces $\psi(p) > 0$ $\forall p \in M$. Definimos $\varphi_i = \psi_i/\psi$.

Para cada i escogemos $\alpha(i)$ tal que soporte $\varphi_i \subset U_{\alpha(i)}$. Sea $\phi_\alpha = \sum_{\alpha(i)=\alpha} \varphi_i$, entonces soporte $\phi_\alpha \subset \bigcup_{\alpha(i)=\alpha}$ soporte φ_i.

Sea $x \in M$, entonces hay una vecindad W_x de x tal que

$$\{i : \text{soporte}\, \varphi_i \cap W_x \neq \emptyset\} = \{i_1, \ldots, i_r\}$$

Si soporte $\phi_\alpha \cap W_x \neq \emptyset$, $\alpha = \alpha(i_j)$ para algún $j = 1, \ldots, r$ y así

$$\{\alpha : \text{soporte}\, \phi_\alpha \cap W_x \neq \emptyset\} = \{\alpha(i_1), \ldots, \alpha(i_r)\}.$$

Por lo tanto $\{\text{soporte}\, \phi_\alpha\}$ es localmente finita. □

Corolario 1.2. *Sean M una variedad C^∞, $V \subset M$ abierto y $A \subset V$ cerrado. Entonces existe $\varphi \in C^\infty(M)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi = 1$ en A y $\varphi = 0$ en $M \setminus V$.*

Demostración. $\{V, M \setminus A\}$ es una cubierta abiertade M. Sea $\{\varphi, \psi\}$ una partición de la unidad con soporte$\,\varphi \subset V$, soporte$\,\psi \subset M \setminus A$. Si $x \in A$, $\psi(x) = 0$ y entonces $\varphi(x) = 1$. □

2. El espacio tangente

Sean $U \subset \mathbb{R}^d$ abierto y $p \in U$, $v \in \mathbb{R}^d$. Definiendo

$$v(f) := Df_p(v) = \langle \nabla f(p), v \rangle = \sum_{i=1}^{d} D_i f(p) v_i$$

para $f \in C^1(U)$ podemos considerar a v como un operador lineal en $C^1(U)$ que satisface $v(1) = 0$ y $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$.

Definición 1.6. Sean M variedad diferenciable y $p \in M$. Definimos una relación de equivalencia en el conjunto de funciones diferenciables en una vecindad de p: $f \sim_p g \iff f \equiv g$ en alguna vecindad de p. Una clase de equivalencia $[f]$ se llama *gérmen de función* en p. Notemos que podemos definir $[f](p) = f(p)$ sin ambigüedad. Sea G_pM el conjunto de estos gérmenes.

En G_pM definimos las operaciones $[f] + [g] = [f + g]$, $a[f] = [af]$ $a \in \mathbb{R}$, $[f][g] = [fg]$.

Definición 1.7. Sea M variedad diferenciable. El espacio tangente a M en el punto $p \in M$, es el conjunto T_pM de operadores lineales $v : G_pM \to \mathbb{R}$ que satisfacen la regla de Leibnitz

$$v([fg]) = f(p)v([g]) + g(p)v([f]).$$

Como $[1] = [1][1]$, para $v \in T_pM$ tenemos

$$v([1]) = 1 \cdot v([1]) + 1 \cdot v([1]) = 2 \cdot v([1])$$

y así $v([1]) = 0$.

Ejemplo 1.2. Sea $p \in M$ y sea (U, φ) carta con $p \in U$. Definimos

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p : G_pM \to \mathbb{R}, \ \Big((\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p([f]) = D_i(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)).$$

Probaremos que $\Big(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\Big)_p, \ldots, \Big(\dfrac{\partial}{\partial x_m}\Big)_p$ es una base de T_pM.

LEMA 1.3. *Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto convexo con $0 \in U$. Sea $f \in C^\infty(U)$. Existen $g_1, \ldots g_m \in C^\infty(U)$ tales que*

$$f(z) = f(0) + \sum_{i=1}^{m} z_i \, g_i(z), \quad g_i(0) = D_i f(0).$$

Demostración. Sea $z \in U$ y definamos $h(t) = f(tz)$, entonces

$$f(z) - f(0) = h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(t)dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^{m} z_i D_i f(tz)dt.$$

Definiendo $g_i(z) = \int_0^1 D_i f(tz)dt$ obtenemos el Lema □

PROPOSICIÓN 1.1. *Sean M variedad diferenciable, $p \in M$. Sea (U, φ) carta con $p \in U$. Escribiendo $\varphi = (x_1, \ldots, x_m)$ tenemos que*

$$v = \sum_{i=1}^{m} v([x_i]) \Big(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big)_p$$

para todo $v \in T_pM$.

Demostración. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $\varphi(p) = 0$. Sea $f \in C^\infty(\varphi^{-1}(B_r(0)))$. Por el Lema 1.3 tenemos que

$$f \circ \varphi^{-1}(z) = f(p) + \sum_{i=1}^{m} z_i \, g_i(z), \; g_i(0) = D_i(f \circ \varphi^{-1})(0),$$

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^{m} x_i \, g_i \circ \varphi.$$

Así

$$v([f]) = \sum_{i=1}^{m} v([x_i]) g_i \circ \varphi(p) + \sum_{i=1}^{m} x_i(p) v([g_i \circ \varphi]) = \sum_{i=1}^{m} v([x_i]) D_i(f \circ \varphi^{-1})(0)$$

□

COROLARIO 1.3. *Sean M variedad diferenciable, $p \in M$. Entonces T_pM es un espacio vectorial de la misma dimension que M*

DEFINICIÓN 1.8. Sean M, N variedades diferenciables $F \in C^\infty(M, N)$. Definimos la derivada $F_{*p} : T_pM \to T_F(p)N$ de F en el punto p por

$$F_{*p}(v)([g]) = v([g \circ F])$$

donde $v \in T_pM$, $[g] \in G_{F(p)}N$. Algunas veces omitiremos el subíndice p en la derivada.

PROPOSICIÓN 1.2. *Sean M, N, P variedades diferenciables $F \in C^\infty(M, N)$, $H \in C^\infty(N, P)$, $p \in M$, $q = F(p)$.*

(1) *Si* F *es constante entonces* $F_* = 0$.
(2) $(H \circ F)_{*p} = H_{*q} \circ F_{*p}$.
(3) *Sean* (U, φ) *carta con* $p \in U, z = \varphi(p)$, $\varphi = (x_1, \dots, x_m)$ *y* $e_1, \dots, e_m$ *la base canónica de* $\mathbb{R}^m$. *Entonces*

$$\varphi^{-1}_{*\varphi(p)}(e_i) = \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p$$

de donde $T_pM = \varphi^{-1}_{*\varphi(p)}(\mathbb{R}^m)$.

Demostración.
Sean $v \in T_pM$, $[f] \in G_pM, [g] \in G_qN, [h] \in G_{H(q)}P$.
(1) Si F es constante, $[g \circ F]$ es un germen constante. Así

$$F_{*p}(v)([g]) = v([g \circ F]) = 0.$$

(2) $(H \circ F)_{*p}(v)([h]) = v([h \circ H \circ F])$
$= F_{*p}(v)([h \circ H]) = (H_{*q} \circ F_{*p})(v)([h])$
(3) $(\varphi^{-1}_{*\varphi(p)}(e_i)([f]) = e_i([f \circ \varphi^{-1}]) = D_i(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$.

$\square$.

Sean $(U, \varphi), (V, \psi)$ cartas con $p \in U, F(p) \in V$, con $\psi = (y_1, \dots, y_n)$

$$F_{*p}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i})\Big)_p([y_j]) = \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p([y_j \circ F]) = D_i(y_j \circ F \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)).$$

Por la Proposición 1.1

$$F_{*p}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p = \sum_{j=1}^{n} D_i(y_j \circ F \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))\,(\frac{\partial}{\partial y_j})_{F(p)}.$$

O sea que la matriz de F_{*p} en las bases $\Big\{\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p\Big\}_{i=1}^{m}, \Big\{\Big(\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)_{F(p)}\Big\}_{j=1}^{n}$ es la matriz jacobiana $D(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$.

3. El teorema del rango, inmersiones y encajes

Teorema 1.4. *Sean* M, N *variedades diferenciables de dimensiones* m, n *y* $h : M \to N$ *diferenciable.*
(1) *Supongamos que* rango $h_{*p} = \dim h_{*p}(T_pM) = k$. *Entonces existen cartas* $(U, \varphi), (V, \psi)$ *con* $\varphi(p) = 0, \psi(h(p)) = 0$ *tales que*

$$\psi \circ h \circ \varphi^{-1}(t_1, \dots, t_m) = (t_1, \dots, t_k, g_{k+1}(t), \dots, g_n(t))$$

(2) *Si* rango $h_* = k$ *en una vecindad de* p *entonces existen cartas* $(U, \varphi), (V, \psi)$ *con* $\varphi(p) = 0, \psi(h(p)) = 0$ *tales que*

$$\psi \circ h \circ \varphi^{-1}(t_1, \dots, t_m) = (t_1, \dots, t_k, 0, \dots, 0)$$

Demostración. Como el resultado es local podemos suponer que que M es una vecindad del origen en $\mathbb{R}^m$, $N = \mathbb{R}^n$ y $h(0) = 0$. La hipótesis es que la matriz $Dh(0)$ tiene rango k. Permutando las coordenadas podemos suponer que

$$Dh(x) = \begin{bmatrix} A(x) & * \\ * & * \end{bmatrix}, \det A(0) \neq 0.$$

En una vecindad del origen tenemos $\det A(x) \neq 0$. Definimos $\varphi : M \to \mathbb{R}^m$ por

$$\varphi(s_1, \ldots, s_m) = (h_1(s), \ldots, h_k(s), s_{k+1}, \ldots, s_m)$$
$$D\varphi(0) = \begin{bmatrix} A(0) & * \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Así $\det D\varphi(0) \neq 0$ y por el teorema de la funcion inversa existe una vecindad U del origen tal que $\varphi : U \to \varphi(U)$ es un difeomorfismo. Como $h_i \circ \varphi^{-1}(t_1, \ldots, t_m) = t_i$ para $i = 1, \ldots, k$

$$h \circ \varphi^{-1}(t_1, \ldots, t_m) = (t_1, \ldots, t_k, g_{k+1}(t), \ldots, g_n(t))$$

Supongamos ahora que rango $Dh(x) = k$ en una vecindad del origen. Sea $g = h \circ \varphi^{-1}$, entonces

$$Dg(t) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ * & \left[\dfrac{\partial g_i}{\partial t_j}\right]_{i,j \geq k} \end{bmatrix}.$$

Como rango $Dg(t) = k$ en una vecindad del origen, $\dfrac{\partial g_i}{\partial t_j} = 0$ para $i, j \geq k$ y así $g_i(t) = f_i(t_1, \ldots, t_k)$ para $i \geq k$. Sea

$$\psi(y_1, \ldots, y_n) = (y_1, \ldots, y_k, y_{k+1} - f_{k+1}(y_1, \ldots, y_k), \ldots, y_n - f_n(y_1, \ldots, y_k)),$$

entonces $D\psi(y) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ * & I \end{bmatrix}$ y

$$\psi \circ g(t_1, \ldots, t_m) = \psi(t_1, \ldots, t_k, g_{k+1}(t) \ldots, g_n(t)) = (t_1, \ldots, t_k, 0, \ldots, 0)$$

□

Corolario 1.5. *Sean M, N variedades diferenciables de dimensiones m, n y $h : M \to N$ diferenciable. Sea $q \in N$ tal que* rango $h_{*p} = k$ *para todo punto p en una vecindad de $h^{-1}(q) \neq \emptyset$. Entonces $h^{-1}(q)$ es una variedad diferenciable de dimensión $m - k$. Cuando $k = n$, q se llama valor regular de h.*

Demostración. Sea $p \in h^{-1}(q)$. Por el Teorema 1.4 existen cartas $(U, \varphi), (V, \psi)$ tales que $\varphi(p) = 0, \psi(q) = 0$ y

$$\psi \circ h \circ \varphi^{-1}(t_1, \ldots, t_m) = (t_1, \ldots, t_k, 0, \ldots, 0).$$

Sea $z \in U$, entonces

$$h(z) = q \iff \psi \circ h \circ \varphi^{-1}(\varphi(z)) = 0 \iff \varphi(z) = (0, \ldots, 0, z_{k+1}, \ldots, z_m).$$

Así $h^{-1}(q) \cap U = \varphi^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{m-k})$, y podemos definir la carta $\phi = \Pi \circ \varphi | h^{-1}(q) \cap U$, donde $\Pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-k}$ es la proyección sobre las últimas $m-k$ coordenadas. Si $j : \mathbb{R}^{m-k} \to \{0\} \times \mathbb{R}^{m-k} \subset \mathbb{R}^m$ es la inyección natural, $\phi^{-1} = \varphi^{-1} \circ j$. $\square$

Proposición 1.3. *Sea $q \in N$ valor regular de $h : M \to N$. Para $p \in h^{-1}(q)$ se tiene que $T_p\, h^{-1}(q) = \ker h_{*p}$.*

Demostración. Sean $m = \dim M, n = \dim N$. Sea (U, φ) carta de $h^{-1}(q)$ con $p \in U$. Entonces $h \circ \varphi^{-1}$ es constante. Así

$$h_{*p}(T_p\, h^{-1}(q)) = (h \circ \varphi^{-1})_{*x}(\mathbb{R}^{m-n}) = \{0\},$$

donde $x = \varphi(p)$. Es decir $T_p\, h^{-1}(q) \subset \ker h_{*p}$. Como h_{*p} es suprayectiva $\dim T_p\, h^{-1}(q) = m - n = \dim \ker h_{*p}$. $\square$

Ejemplo 1.3. Sean $M_n \cong \mathbb{R}^{n^2}$ el conjunto de matrices reales $n \times n$, $S_n = \{C \in M_n : C^t = C\} \cong \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$, $f : M_n \to S_n$, $f(A) = AA^t$. El grupo ortogonal $O(n) = f^{-1}(I)$ es una variedad de dimensión $n(n-1)/2$ ya que I es un valor regular de f. En efecto sean $A, B \in M_n$, entonces

$$f_{*A}(B) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s}((A + sB)(A + sB)^t - AA^t) = AB^t + BA^t.$$

Sean $A \in O(n)$, $C \in S_n$. Tomando $B = \frac{1}{2}CA$ tenemos que

$$f_{*A}(B) = \frac{1}{2}(AA^tC^t + CAA^t) = \frac{1}{2}(C^t + C) = C.$$

Así f_{*A} es suprayectiva.

$$T_I O(n) = \ker f_{*I} = \{B \in M_n : B^t + B = 0\}$$

es el conjunto de matrices antisimétricas.

Definición 1.9. Sean M, N variedades diferenciables y sea $h \in C^\infty(M, N)$.

- Decimos que h es una *inmersión* si h_{*x} es inyectiva para todo $x \in M$.
- Una inmersión h se llama *encaje* si es un homeomeomorfismo sobre su imagen $h(M)$, teniendo esta última la topología relativa como subconjunto de N.

Proposición 1.4. *Si $h : M \to N$ es una imersión inyectiva y M es compacto entonces h es un encaje.*

Demostración. Sólo tenemos que probar que $h^{-1} : h(M) \to M$ es continua. Sea $U \subset M$ abierto, entonces $M \setminus U$ es cerrado. Como M es compacto, $M \setminus U$ es compacto. Así $h(M \setminus U)$ es compacto y por consiguiente cerrado. Como h es inyectiva, $h(M \setminus U) = h(M) \setminus h(U)$, de donde $h(U)$ es abierto en $h(M)$. $\square$

OBSERVACIÓN 1.3. Si $h : M \to N$ es un encaje entonces $h(M)$ es una variedad de la misma dimensión que M. En efecto para $p \in M$ sean $(U, \varphi), (V, \psi)$ con cartas tales que $\varphi(p) = 0, \psi(h(p)) = 0$, $h(U) \subset V$ y

$$\psi \circ h \circ \varphi^{-1}(t_1, \ldots, t_m) = (t_1, \ldots, t_k, 0, \ldots 0)$$

Como h es un encaje, $h(U)$ es un abierto y por lo tanto hay una abierto
Si rango $h_* = k$ en una vecindad de p entonces existen cartas

Vamos a probar que cualquier variedad diferenciable compacta puede encajarse en algún espacio euclidiano.

PROPOSICIÓN 1.5. *Sean M variedad diferenciable y $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$ una cubierta localmente finita.*

(1) *Si $K \subset M$ es compacto entonces $\{\alpha \in A : V_\alpha \cap K \neq \emptyset\}$ es finito.*
(2) *Si $V_\alpha \neq \emptyset$ $\forall \alpha \in A$, entonces A es a lo más numerable.*

Demostración.

(1) Para cada $p \in M$ sea W_p vecindad talque $A_p = \{\alpha \in A : V_\alpha \cap W_p \neq \emptyset\}$ es finito. Escojamos una subcubierta finita $\{W_{p_1}, \ldots, W_{p_r}\}$ de K. Si $V_\alpha \cap K \neq \emptyset$, entonces $V_\alpha \cap W_{p_i}$ para algun $i = 1, \ldots, r$ y asi $\alpha \in A_{p_i}$. Luego
$$\{\alpha \in A : V_\alpha \cap K \neq \emptyset\} \subset \bigcup_{i=1}^{r} A_{p_i}$$
(2) Hay una sucesión creciente de compactos K_i tales que $M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$. Por el inciso anterior, $B_i = \{\alpha \in A : V_\alpha \cap K_i \neq \emptyset\}$ es finito. Como todo V_α debe intersectar algún K_i, $A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$. $\square$

PROPOSICIÓN 1.6. *Sea M variedad diferenciable.*

(1) *Si $V \subset M$ es abierto y $A \subset V$ es cerrado. Entonces existe U abierto tal que $A \subset U \subset \overline{U} \subset V$.*
(2) *Si $\{V_i\}$ es una cubierta abierta localmente finita, existe una cubierta abierta $\{U_i\}$ tal que $\overline{U_i} \subset V_i$ $\forall i$.*

Demostración.

(1) Sea $\varphi : M \to [0, 1]$ diferenciable tal que $\varphi = 1$ en A y $\varphi = 0$ en $M \setminus V$. Sea $U = \varphi^{-1}[0, 1/2)$.
(2) Por la Proposición 1.5, la cubierta $\{V_i\}$ es alo más numerable. El conjunto $A_1 = M \setminus \bigcup_{i>1} V_i$ es cerrado y $A_1 \subset V_1$. Por (1)

existe U_1 abierto tal que

$$A_1 \subset U_1 \subset \overline{U_1} \subset V_1, \text{ y así } M = U_1 \cup \bigcup_{i>1} V_i.$$

$A_2 = M \setminus (U_1 \cup \bigcup_{i>2} V_i)$ es cerrado y $A_2 \subset V_2$. Por (1) existe U_2 abierto tal que

$$A_2 \subset U_2 \subset \overline{U_2} \subset V_2, \text{ y así } M = U_1 \cup U_2 \cup \bigcup_{i>2} V_i.$$

Continuamos el proceso inductivamente. Sea $p \in M$. Como $\{V_i\}$ es localmente finita $\exists N$ tal que $p \notin V_i$ si $i > N$. Como $M = \bigcup_{i \leq N} U_i \cup \bigcup_{i>N} V_i$, tenemos que $p \in \bigcup_{i \leq N} U_i$. □

Teorema 1.6. *Si M es una variedad diferenciable compacta, entonces hay un encaje $f : M \to \mathbb{R}^n$ para algún n.*

Demostración. Como M es compacta, hay una colección finita $\{(V_1, \psi_1), \ldots, (V_k, \psi_k)\}$ de cartas coordenadas tal que $M = \bigcup_{i=1}^k V_i$. Por la Proposición 1.6, existe una cubierta $\{U_1, \ldots, U_k\}$ tal que $\overline{U_i} \subset V_i$. Por el Corolario 1.2 existe $\varphi_i : M \to [0, 1]$ diferenciable tal que $\varphi_i(U_i) = 1$ y soporte $\varphi_1 \subset V_i$. Sea $m = \dim M$ y definamos

$$f = (\varphi_1\psi_1, \ldots, \varphi_k\psi_k, \varphi_1, \ldots, \varphi_k) : M \to \mathbb{R}^{k(m+1)}.$$

f es inyectiva. Supongamos que $f(p) = f(q)$, $p, q \in M$. Si $p \in U_i$, $\varphi_i(p) = 1$, entonces $\varphi_i(q) = 1$ y así $q \in V_i$. Luego $\psi_i(p) = \varphi_i(p)\psi_i(p) = \varphi_i(q)\psi_i(q) = \psi_i(q)$ y entonces $p = q$.

f es una inmersión.

$$f_* = [(\varphi_1\psi_1)_*, \ldots, (\varphi_k\psi_k)_*, \varphi_{1*}, \ldots, \varphi_{k*}]$$

Sea $p \in U_i$. Como $\varphi_i\psi_i = \psi_i$ en U_i, $(\varphi_i\psi_i)_{*p} = \psi_{i*p}$ es un isomorfismo. □

4. Variedades con frontera

Definición 1.10. Sean $X \subset \mathbb{R}^m$, $f : X \to \mathbb{R}^n$. Decimos que f es de clase C^k si $\forall x \in X$, $\exists F \in C^k(V, \mathbb{R}^n)$ tal que V es una vecindad de x y $f|X \cap V = F|X \cap V$.

Definición 1.11. Sea M un espacio de Hausdorff.

- La pareja (U, φ) es una carta de m-variedad con frontera en M si φ es un homeomeorfismo del abierto $U \subset M$ en un abierto del semiespacio $\mathbb{H}^m = \{(x_1, \ldots, x_m) : x_m \geq 0\}$
- Dos cartas (U, φ), (V, ψ) se llaman C^k *compatibles* si $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \mathbb{H}^m$, $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \mathbb{H}^m$ son de clase C^k.

- Un *atlas* $\mathcal{A}$ de variedad con frontera, de clase C^k en M es una colección de cartas cuyos dominios cubren M y cualesquiera dos de ellas son C^k compatibles.
- Una *variedad con frontera* de dimensión m y clase C^k es un espacio de Hausdorff M con base numerable junto con un atlas maximal $\mathcal{A}$ de variedad con frontera de clase C^k .
- Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad C^k con frontera y $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$. Si $\varphi(x) \in \partial\mathbb{H}^m = \{(x_1, \ldots, x_m) : x_m = 0\}$ decimos que x es un *punto fronterizo* para la carta (U, φ).

Observación 1.4. La condicion de ser un punto fronterizo no depende de la carta.

En efecto, sean (U, φ), (V, ψ) cartas tales que $y = \varphi(x) \in \partial\mathbb{H}^m$ y supongamos que $z = \psi(x) \notin \partial\mathbb{H}^m$. Entonces $\exists r > 0$ tal que $B_r(z) \subset \psi(U \cap V) \setminus \partial\mathbb{H}^m$. Sea $F : W \to \mathbb{R}^m$ tal que W es vecindad de y y $F|W \cap \mathbb{H}^m = \psi \circ \varphi^{-1}|W \cap \mathbb{H}^m$. Así $F \circ \varphi \circ \psi^{-1}$ es la identidad, entonces $D(\varphi \circ \psi^{-1})(z)$ es invertible y por el teorema de la función inversa $\exists\, 0 < \varepsilon < r$ tal que $\varphi \circ \psi^{-1}(B_r(z)) \subset \varphi(U \cap V) \subset \mathbb{H}^m$ es un abierto de $\mathbb{R}^m$. Esto contradice el hecho de que $y \in \partial\mathbb{H}^m$.

Definición 1.12. Sea M variedad C^k con frontera. La frontera de M es el conjunto ∂M de puntos fronterizos para alguna carta. El interior de M es el conjunto $M \setminus \partial M$. Por la Observación 1.4, el interior de M es el conjunto de puntos para los cuales existe una carta (U, φ) con $\varphi(U)$ abierto de $\mathbb{R}^m$. Por lo tanto el interior de M es una variedad C^k (sin frontera).

Proposición 1.7. *Sea M una variedad diferenciable con frontera de dimensión m. Entonces ∂M es una variedad diferenciable de dimensión $m-1$ (sin frontera).*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ el conjunto de cartas (U, φ) de M tales que $U \cap \partial M \neq \emptyset$. Sea $\Pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-1}$ la proyección sobre las primeras $m-1$ coordenadas. Entonces $\{(U \cap \partial M, \Pi \circ \varphi | U \cap \partial M) : (U, \varphi) \in \mathcal{B}\}$ es un atlas para ∂M. □

Proposición 1.8. *Sea M una variedad diferenciable (sin frontera) de dimensión m Sea $f : M \to \mathbb{R}$ diferenciable y supongamos que 0 es un valor regular. Entonces $f^{-1}([0, \infty))$ es una variedad con frontera $f^{-1}(0)$.*

Demostración. El conjunto $f^{-1}((0, \infty))$ es abierto. Si $p \in f^{-1}(0)$, por (1) del Teorema 1.4, existe (U, φ) carta tal que $\varphi(p) = 0$ y

$$f \circ \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_m) = x_m.$$

Así $f^{-1}([0, \infty)) \cap U = \varphi^{-1}(\mathbb{H}^m)$, y entonces $(\varphi^{-1}(\mathbb{H}^m), \varphi|\varphi^{-1}(\mathbb{H}^m))$ es una carta de variedad con frontera. □

CAPíTULO 2

Haces vectoriales

1. Haces vectoriales y sus transformaciones

Definición 2.1. Sean E, B espacios topológicos, $p : E \to B$ continua y suprayectiva.

- Una *carta local de haz vectorial* de rango n para $p : E \to B$ es una pareja (U, φ) donde $U \subset B$ es abierto y $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo tal que el diagrama
$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times \mathbb{R}^n \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$
conmuta. Así, $\forall b \in U\ \varphi(p^{-1}(b)) \subset \{b\} \times \mathbb{R}^n$ y tenemos un homeomorfismo $\varphi_b = \pi_2 \circ \varphi | p^{-1}(b)$.
- Un *atlas de haz vectorial* para $p : E \to B$ es una colección Φ de cartas locales de haz vectorial cuyos dominios cubren B y tal que $\varphi_b \circ \psi_b^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo lineal para todo $(U, \varphi), (V, \psi) \in \Phi$, $b \in U \cap V$.
- Una *estructura de haz vectorial* para $p : E \to B$ es un atlas de haz vectorial maximal.
- Si E, B son variedades diferenciables y las cartas locales son difeomorfismos, entonces $p : E \to B$ es diferenciable y decimos que el haz vectorial es diferenciable.

Observación 2.1. Si Φ es un atlas de haz vectorial para $p : E \to B$, podemos definir una estructura de espacio vectorial en cada fibra $E_b = p^{-1}(b)$ declarando que φ_b es un isomorfismo para alguna y así para cualquier $(U, \varphi) \in \Phi$ con $b \in U$.

El ejemplo más simple de haz vectorial es $\pi_1 : B \times \mathbb{R}^n \to B$, conocido como *haz trivial.* Por tal razón una carta local de haz vectorial se llama también *trivialización local.*

Definición 2.2. Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta abierta de B. Una colección de transformaciones continuas $\{g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to Gl(n)\}$ se llama *cociclo* para la cubierta $\{U_\alpha\}$ si

$$\forall \alpha, \beta, \gamma\ g_{\alpha\alpha}(b) = I,\ g_{\alpha\beta}(b) g_{\beta\gamma}(b) = g_{\alpha\gamma}(b).$$

Como $g_{\alpha\beta}(b)g_{\beta\alpha}(b) = g_{\alpha\alpha}(b) = I$, tenemos que $g_{\alpha\beta}(b) = g_{\beta\alpha}(b)^{-1}$.

Proposición 2.1. *Sea B un espacio topológico.*

(1) *Si $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ es un atlas de haz vectorial entonces $g_{\alpha\beta}(b) = (\psi_\alpha)_b \circ (\psi_\beta)_b^{-1}$ define un cociclo.*
(2) *Todo cociclo $\{g_{\alpha\beta}\}$ para una cubierta $\{U_\alpha\}$ de B define un atlas de haz vectorial $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$.*

Demostración. (1) es claro. Para (2) definimos la relación de equivalencia $\sim$ en $X = \bigcup_\alpha \{\alpha\} \times U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ mediante

$$(\alpha, b, v) \sim (\beta, y, w) \iff b = y \in U_\alpha \cap U_\beta, v = g_{\alpha\beta}(b)w.$$

La reflexividad se sigue de $g_{\alpha\alpha}(b) = I$, la transitividad de $g_{\alpha\beta}(b)g_{\beta\gamma}(b) = g_{\alpha\gamma}(b)$ y la simetría de $g_{\alpha\beta}(b) = g_{\beta\alpha}(b)^{-1}$.

Sean $E = X/\sim$ y $p : E \to B$ dada por $p([\alpha, b, v]) = b$.

$$p^{-1}(U_\alpha) = \{[\alpha, b, v] : b \in U_\alpha, v \in \mathbb{R}^n\} \overset{\psi_\alpha}{\cong} U_\alpha \times \mathbb{R}^n.$$

Observación 2.2. Si el haz vectorial $p : E \to M$ es diferenciable, el cociclo definido en (1) de la Proposición 2.1 consiste de transformaciones diferenciables.

Si $(M, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\})$ es una variedad diferenciable de dimensión m y $\{g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to Gl(n)\}$ es un cociclo de transformaciones diferenciables, entonces el haz definido en (2) de la Proposición 2.1 tiene el atlas $\{(p^{-1}(U_\alpha), (\varphi_\alpha \times id) \circ \psi_\alpha)\}$ de variedad diferenciable de dimensión $n + m$.

Ejemplo 2.1. El Haz Tangente.

Sea $(M, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\})$ variedad diferenciable de dimensión m. El *haz tangente a M* es $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$ con la proyección $\pi : TM \to M$ con fibra T_pM. Si $p \in U_\alpha$, $(\varphi_\alpha)_{*p} : T_pM \to \mathbb{R}^m$ es un isomorfismo dado por $(\varphi_\alpha)_{*p}(V) = (V([x_1]), \ldots, V([x_m]))$.

Nos faltaría definir una topología en TM. En lugar de eso podemos utilizar (2) de la Proposición 2.1. Para $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ sea

$$g_{\alpha\beta}(p) = (\varphi_\alpha)_{*p} \circ (\varphi_\beta)_{*p}^{-1} = D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(\varphi_\beta(p)),$$

entonces $\{g_{\alpha\beta}\}$ es un cociclo para la cubierta $\{U_\alpha\}$. Sea $\Pi : \overline{TM} \to M$ el haz definido por la Proposición 2.1.

Sea $F : \overline{TM} \to TM$ dada por $F([\alpha, p, v]) = (\varphi_\alpha)_{*p}^{-1}(v)$. Observemos que si $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, $v = g_{\alpha\beta}(p)w \iff (\varphi_\alpha)_{*p}^{-1}(v) = (\varphi_\beta)_{*p}^{-1}(w)$. Por lo tanto F esta bien definida y $F : \Pi^{-1}(p) \to T_pM$ es un isomorfismo para todo $p \in M$. Por lo tanto identificaremos $\overline{TM}$ y TM.

De acuerdo con la Observación 2.2, TM es un variedad diferenciable con cartas $T\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n$ dadas por

$$\begin{aligned} T\varphi_\alpha(V) &= (\varphi_\alpha \times id) \circ \psi_\alpha \circ F^{-1}(V) = (\varphi_\alpha \times id)(p, (\varphi_\alpha)_{*p}(V)) \\ &= (\varphi_\alpha(p), V([x_1]), \ldots, V([x_m])) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2. El dual de un haz vectorial.

Sea $p : E \to B$ un haz vectorial de rango n y para cada $b \in B$ sea $E_b = p^{-1}(b)$. El *haz dual de E* es $E^* = \bigcup_{b\in B} E_b^*$ con la proyección $p^* : E^* \to B$ con fibra E_b^*. Sea $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ un atlas de haz vectorial para $p : E \to B$. Si $b \in U_\alpha$, $(\psi_\alpha)_b : E_b \to \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo con transpuesta $(\psi_\alpha)_b^t : \mathbb{R}^{n*} \cong \mathbb{R}^n \to E_b^*$. Definimos $(\psi_\alpha)_b^* = [(\psi_\alpha)_b^t]^{-1}$ y

$$g^*_{\alpha\beta} = (\psi_\alpha)_b^*[(\psi_\beta)_b^*]^{-1} = (g^t_{\beta\alpha}).$$

Entonces $\{g^*_{\alpha\beta}\}$ es un cociclo y como hicimos con el haz tangente, podemos identificar el haz vectorial definido por la Proposición 2.1 con E^*.

Si $E = TM$, el haz $T^*M = E^*$ se llama *haz cotangente* de M. Si $[f]$ es un germen en p definimos $df \in T_p^*M$ mediante $df_p(v) = v([f])$. En particular si $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_m))$ es una carta con $p \in U$,

$$dx_{ip}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right) = D_j(x_i \circ \varphi^{-1}) = \delta_{ij}$$

y así $dx_{1p}, \ldots, dx_{mp}$ es la base de T_p^*M dual a $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p$.

Definición 2.3. Sean $p : E \to B$, $p' : E' \to B'$ haces vectoriales.

- Una transformación $F : E \to E'$ se llama *fibrada* si existe $f : B \to B'$ tal que el diagrama
$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & E' \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$
conmuta, o sea que $\forall b \in B$, $F(E_b) \subset E'_{f(b)}$. En tal caso (F, f) se llama par fibrado.
- El par fibrado (F, f) de transformaciones continuas se llama *homomorfismo* de haces si $\forall b \in B$, $F : E_b \to E'_{f(b)}$ es lineal.
- El par fibrado (F, f) se llama *equivalencia* de haces si f es un homeomorfismo y $\forall b \in B$, $F : E_b \to E'_{f(b)}$ es isomorfismo.
- Si $B = B'$, una equivalencia (F, id) se llama *isomorfismo*.
- El haz $p : E \to B$ se llama *trivial* si es isomorfo al haz trivial $\pi_1 : B \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

- Una variedad diferenciable M se llama *paralelizable* si TM es trivial.

EJEMPLO 2.3. Sean M, N variedades, $f : M \to N$ diferenciable y definamos $f_* : TM \to TN$ por $f_*|T_pM = f_{*p}$. Entonces f_* es diferenciable y (f_*, f) es un homomorfismo de haces. Si f es un difeomorfismo, entonces (f_*, f) es una equivalencia de haces.

DEFINICIÓN 2.4.
- Una *sección* del haz vectorial $p : E \to B$ es una transformación continua $s : B \to E$ tal que $p \circ s = id$.
- Si el haz $p : E \to M$ es diferenciable, $\Gamma(E)$ denotará al conjunto de secciones diferenciables del haz.
- Un *campo vectorial* en M es un elemento de $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$ y una *1-forma* en M es un elemento de $\Omega^1(M) = \Gamma(T^*M)$.

PROPOSICIÓN 2.2. *El haz vectorial* $p : E \to B$ *de rango* n *es trivial si y solo si existen secciones* $s_1, \dots, s_n$ *tales que* $(s_1(b), \dots, s_n(b))$ *es una base de* E_b *para todo* $b \in B$.

Demostración.
$\Rightarrow$) Si $F : B \times \mathbb{R}^n \to E$ define un isomorfismo de haces, definamos secciones $s_i, i = 1, \dots, n$ por $s_i(b) = F(b, e_i)$ donde $(e_1, \dots, e_n)$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

$\Leftarrow$) Si $s_1, \dots, s_n$ son secciones tales que $\forall b \in B$ $(s_1(b), \dots, s_n(b))$ es una base de E_b, definamos $F : B \times \mathbb{R}^n \to E$ por $F(b, t_1, \dots, t_n) = t_1 s_1(b) + \dots + t_n s_n(b)$. □

EJEMPLO 2.4. Consideremos la inmersión $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^n$

$$f(x_1, \dots, x_n) = (\exp(ix_1), \dots, \exp(ix_n)).$$

El n-toro $\mathbb{T}^n = f(\mathbb{R}^n) = S^1 \times \dots \times S^1$ es paralelizable.

En efecto, $f(x+m) = f(x)$ si y solo si $m \in (2\pi\mathbb{Z})^n$. Sea $t_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la traslacion $x \mapsto x + m$. Para $m \in (2\pi\mathbb{Z})^n$, $f = f \circ t_m$ y asi $f_* = (f \circ t_m)_* = f_* \circ (t_m)_*$. Si $(x, v) \in T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $(t_m)_*(x, v) = (x+m, v)$ y luego $f_*(x, v) = f_*(x + m, v)$. Podemos por lo tanto, definir sin ambigüedad campos vectoriales s_i en $\mathbb{T}^n$ mediante $s_i(f(x)) = f_*(x, e_i)$.

2. Orientabilidad

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión n. Definimos la relación $\sim$ en el conjunto de bases ordenadas de V mediante $(v_1, \dots, v_n) \sim (w_, \dots, w_n)$ si y solo si la matriz de cambio de base $[A_{ij}]$ dada por $w_j = \sum_i A_{ij} v_i$, tiene determinante positivo. Hay dos clases de equivalencia y a cualquiera de ellas se le llama orientación de V. Si $f : V \to V'$ es un isomorfismo de haces vectoriales tenemos definida una función $\overline{f}([v_1, \dots, v_n]) = [f(v_1), \dots, f(v_n)]$.

La orientación natural ω de $\mathbb{R}^n$ es la clase de equivalencia de la base canónica.

Definición 2.5. Sea $p : E \to B$ haz vectorial.

- Decimos que la elección de una orientación $\mathcal{O}_b$ de la fibra E_b para cada $b \in B$ es continua, si para cada trivialización local (U, ψ) con U conexa, los isomorfismos $\psi_b : E_b \to \mathbb{R}^n$ satisfacen que $\forall b \in U$, $\overline{\psi}_b(\mathcal{O}_b) = \omega$ o que $\forall b \in U$, $\overline{\psi}_b(\mathcal{O}_b) \neq \omega$.
- Decimos que el haz es *orientable* si existe una elección continua de una orientación para cada fibra.
- Decimos que una variedad diferenciable M es orientable si TM es orientable.

Observación 2.3. Si el haz vectorial $p : E \to B$ es orientable y $(U, \varphi), (V, \psi)$ son trivializaciones locales con U, V conexos, entonces $\det(\varphi_b \circ \psi_b^{-1})$ tiene el mismo signo para todo $b \in U \cap V$.

Ejemplo 2.5. Si el haz vectorial $p : E \to B$ es trivial, sean $s_1, \ldots, s_n$ secciones tales que $\forall b \in B, (s_1(b), \ldots, s_n(b))$ es base de E_b entonces la elección $b \mapsto [s_1(b), \ldots, s_n(b)]$ es continua y por lo tanto el haz es orientable.

Proposición 2.3. *Si existe un atlas* $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ *del haz vectorial* $p : E \to B$ *tal que para el cociclo correspondiente* $\det g_{\alpha\beta} > 0$ $\forall \alpha, \beta$, *entonces el haz es orientable.*

Demostración. Para cada $b \in U_\alpha$ escogemos $\mathcal{O}_b = \overline{(\psi_\alpha)_b^{-1}}(\omega)$. La elección no depende de α ya que $\det g_{\alpha\beta} > 0$ implica que $\overline{g_{\alpha\beta}(b)}(\omega) = \omega$. Sea (V, φ) una trivialización local con V conexo, entonces $\{b \in V : \overline{\varphi}_b(\mathcal{O}_b) = \omega\}$ y $\{b \in V : \overline{\varphi}_b(\mathcal{O}_b) \neq \omega\}$ son ambos abiertos ya que si $b \in V \cap U_\alpha$ entonces hay una vecindad W de b donde $\det((\psi_\alpha)_p \circ \varphi_p^{-1})$ no cambia de signo. □

Dado un atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de la variedad diferenciable M, el cociclo correspondiente de TM es

$$g_{\alpha\beta} = D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) \circ \varphi_\beta.$$

Corolario 2.1. *La variedad diferenciable M es orientable si y solo existe un atlas* $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ *tal que* $\det D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) > 0$.

Ejemplo 2.6. Consideremos la circunferencia $S^1 = \{e^{ix} : x \in \mathbb{R}\}$ con la cubierta $U_0 = \{e^{ix} : |x| < \pi\}$, $U_1 = \{e^{ix} : x \in (0, 2\pi)\}$.

Para $A \in Gl(n)$ consideremos el haz $p_A : E_A \to S^1$ definido por el cociclo $g : U_0 \cap U_1 \to Gl(n)$ dado por

$$g(e^{ix}) = \begin{cases} I & x \in (0, \pi) \\ A & x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}.$$

El haz es orientable si y solo si $\det A > 0$. Cuando $n = 1$ y $A = -1$, E_A es la banda de Möbius.

3. Algebra multilineal, operaciones con haces

DEFINICIÓN 2.6. Sean $V_1, \ldots, V_k$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$.

- $f : V_1 \times \cdots \times V_k \to \mathbb{R}$ se llama multilineal si $\forall i = 1, \ldots, k$ $v_i, w_i \in V_i$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(v_1, \ldots, \lambda v_i + w_i, \ldots, v_k) = \lambda f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + f(v_1, \ldots, w_i, \ldots, v_k)$$

- El producto tensorial $V_1^* \otimes \cdots \otimes V_k^*$ es el conjunto de funciones multilineales $f : V_1 \times \cdots \times V_k \to \mathbb{R}$
- Si $f \in V_1^* \otimes \cdots \otimes V_k^*, g \in V_{k+1}^* \otimes \cdots \otimes V_m^*$ definimos
$$f \otimes g(v_1, \ldots, v_m) = f(v_1, \ldots, v_k) g(v_{k+1}, \ldots, v_m).$$
de tal suerte que $f \otimes g \in V_1^* \otimes \cdots \otimes V_m^*$.
- Sean $A_i : V_i \to W_i, i = 1 \ldots k$ lineales, definimos
$$A_1^* \otimes \cdots \otimes A_k^* : W_1^* \otimes \cdots \otimes W_k^* \to V_1^* \otimes \cdots \otimes V_k^*,$$
$$A_1^* \otimes \cdots \otimes A_k^*(f)(v_1, \ldots, v_k) = f(A_1(v_1), \ldots, A(v_k)).$$

En el caso en que $V_i = V, W_i = W, A_i = A \, \forall i$, denotaremos simplemente por A^* a la transformación $A^* \otimes \cdots \otimes A^*$.

OBSERVACIONES 2.4. Sean V, W espacios vectoriales.

- Sean $\{v_1, \ldots, v_m\}$, $\{w_1, \ldots, w_n\}$ bases de V, W y $\{v_1^*, \ldots, v_m^*\}$, $\{w_1^*, \ldots, w_n^*\}$ las bases duales de V^*, W^*. Entonces $\{v_i^* \otimes w_j^* : i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n\}$ es una base de $V^* \otimes W^*$ y para cualquier $f \in V^* \otimes W^*$ tenemos
$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(v_i, w_j) v_i^* \otimes w_j^*.$$
Similarmente para $V_1^* \otimes \cdots \otimes V_k^*$.
- Hay un isomorfismo canónico $i_V : V \to (V^*)^*$ dado para $v \in V, \alpha \in V^*$ por $i_V(v)(\alpha) = \alpha(v)$. Por lo tanto, $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ puede definirse como el conjunto de funciones multilineales $f : V_1^* \times \cdots \times V_k^* \to \mathbb{R}$.
- $V^* \otimes W \cong \hom(V, W) = \{g : V \to W : g \text{ es lineal}\}$. En efecto sea $h : \hom(V, W) \to V^* \otimes W$ dada por $h(g)(v, w^*) = w^*(g(v))$, cuya inversa esta dada por $h^{-1}(f)(v) = i_W^{-1}(f(v, \cdot))$.

DEFINICIÓN 2.7. Si $p_1 : E_1 \to B, \ldots, p_k : E_k \to B$ son haces vectoriales de rangos $n_1, \ldots n_k$, entonces el producto tensorial
$$E_1 \otimes \cdots \otimes E_k = \bigcup_b (E_1)_b \otimes \cdots \otimes (E_k)_b$$

con la proyección p con fibra $(E_1)_b \otimes \cdots \otimes (E_k)_b$ es un haz vectorial de rango $n_1 \cdots n_k$. Si $\{U_\alpha\}$ es una cubierta de B y $(g_i)_{\alpha\beta}$ es el cociclo correspondiente para el haz E_i, entonces $(g_1)_{\alpha\beta} \otimes \cdots \otimes (g_k)_{\alpha\beta}$ es el cociclo correspondiente para el haz $E_1 \otimes \cdots \otimes E_k$.

Ejemplo 2.7. Una métrica en el haz diferenciable $p : E \to M$ es una sección $G \in \Gamma(E^* \otimes E^*)$ tal que $\forall p \in M, G(p)$ es positivo definido y simétrico. Una métrica riemanniana en M es una métrica en TM. Siempre existe una métrica para $p : E \to M$. En efecto, sea $\{U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ un atlas de haz vectorial y para $p \in U_\alpha$ definamos

$$G_\alpha(p) = \sum_{i,j=1}^{m} \delta_{ij} (\psi_\alpha)_b^* (e_i^* \otimes e_j^*)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. Sea $\{h_\alpha\}$ una partición de la unidad subordinada a $\{U_\alpha\}$. Definimos $G = \sum_\alpha h_\alpha G_\alpha$.

Definición 2.8. Sea M una variedad diferenciable. Denotaremos por $T_s^r(M)$ al haz $T^*M^{\otimes r} \otimes TM^{\otimes s}$. Un elemento de $\Gamma(T_s^r(M))$ se llama *tensor r-covariante, s -contravariante.*

Observación 2.5. Para $R \in \Gamma(T_s^r(M))$, definamos $\overline{R} : \mathfrak{X}(M)^r \times \Omega^1(M)^s \to C^\infty(M)$ mediante

$$\overline{R}(X_1, \ldots X_r, \omega_1, \ldots, \omega_s)(p) = R_p(X_1(p), \ldots X_r(p), \omega_1(p), \ldots, \omega_s(p)).$$

$$\text{Si } f \in C^\infty(M), \overline{R}(X_1, \ldots, fX_i, \ldots, X_r, \omega_1, \ldots, \omega_s) =$$

$$\overline{R}(X_1, \ldots, X_r, \omega_1, \ldots, f\omega_j \ldots, \omega_s) = f\overline{R}(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_r, \omega_1, \ldots, \omega_s).$$

Decimos que $\overline{R}$ es $C^\infty(M)$ - multilineal.

En una carta local $U, \varphi = (x^1, \ldots, x^m)$ tenemos

$$R|_U = \sum_{i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots j_s=1}^{m} T_{i_1,\ldots,i_r}^{j_1,\ldots j_s} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_r} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}}$$

$$\text{donde} \quad T_{i_1,\ldots,i_r}^{j_1,\ldots j_s} = \overline{R|_U}\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}, dx^{i_1}, \ldots, dx^{i_s}\right).$$

Ejemplo 2.8.

$$T_1^1(M) = \bigcup_p T_p^* M \otimes T_p M = \bigcup_p \hom(T_pM, T_pM) = \hom(TM, TM).$$

El tensor de Kronecker $\delta \in \Gamma(T_1^1(M))$ se define por $\delta(p) = id : T_pM \hookleftarrow$. Definimos la contracción $c : \Gamma(T_1^1(M)) \to C^\infty(M)$ por $c(A)(p) = \operatorname{Tr} A(p)$. En una carta local $U, \varphi = (x_1, \ldots, x_m)$,

$$\delta|U = \sum_{i,j=1}^{m} \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes dx_j,\ A|U = \sum_{i,j=1}^{m} A_j^i \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes dx_j,\ c(A)|U = \sum_{i=1}^{m} A_i^i.$$

Proposición 2.4. *Si* $S : \mathfrak{X}(M)^r \to C^\infty(M)$ *es* $C^\infty(M)$*-multilineal, entonces* $\exists R \in \Gamma(T^r(M))$ *tal que* $S = \overline{R}$.

Demostración. Sea $z \in T_pM$ y sea $U, \varphi = (x_1, \dots, x_m)$ carta tal que $p \in U$, entonces $z = \sum_i a_i (\frac{\partial}{\partial x_i})_p$. Sea $h \in C^\infty(M)$ tal que $h(p) = 1$ y soporte $h \subset U$. Definiendo $Z = \sum_i a_i h \frac{\partial}{\partial x_i}$, tenemos que $Z(p) = z$. Por lo tanto, dados $z_1, \dots, z_r \in T_pM$ existen $Z_1, \dots, Z_r \in \mathfrak{X}$ tales que $Z_i(p) = z_i$ y definimos $R_p : T_pM^r \to \mathbb{R}$ por

$$R_p(z_1, \dots, z_r) = S(Z_1, \dots, Z_r)(p).$$

Tenemos que demostrar que la definición no depende de la elección de los $Z_i \in \mathfrak{X}(M)$. Por comodidad lo haremos para $r = 1$.

Lemita 1. *Si* $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *coinciden en una vecindad* V *de* p*, entonces* $S(Y)(p) = S(Z)(p)$.

Demostración. Sea $h \in C^\infty(M)$ con $h(p) = 1$ y soporte $h \subset V$, entonces $hS(Y) = S(hY) = S(hZ) = hS(Z)$. Evaluando en p obtenemos el Lemita 1.

Lemita 2. *Sean* $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *tales que* $Y(p) = Z(p)$*, entonces* $S(Y)(p) = S(Z)(p)$.

Demostración. Sea $X = Z - Y$ entonces $X(p) = 0$ y queremos demostrar que $S(X)(p) = 0$. Sea $U, \varphi = (x_1, \dots, x_m)$ carta tal que $p \in U$. Sea $h \in C^\infty(M)$ con $h = 1$ en una vecindad V de p y soporte $h \subset U$, entonces X y h^2X coinciden en V. Pero

$$h^2X = \sum_{i=1}^m h^2X(x^i)\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big), \; S(h^2X) = \sum_{i=1}^m hX(x^i)S\Big(h\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)$$

Como $X(p) = 0$, $X(x^i)(p) = 0$ y así, por el Lemita 1

$$S(X)(p) = S(h^2X)(p) = 0.$$

□

Observación 2.6. Sea $p : E \to M$ un haz vectorial diferenciable. El procedimiento usado en la demostración de la Proposición 2.4, permite construir en una vecindad U de cualquier punto $q \in M$, una base local $\{s_1, \dots, s_n\} \subset \Gamma(E)$. Es decir que $\{s_1(x), \dots, s_n(x)\}$ es una base de E_x $\forall x \in U$. En efecto sea V, ψ una carta de $p : E \to M$ con $q \in V$. Sea U vecindad de q tal que $\overline{U} \subset V$ y sea $h \in C^\infty(M, [0, 1])$ con $h = 1$ en U y soporte $h \subset V$. Para $i = 1, \dots, n$ sea $s_i(x) = h(x)\psi^{-1}(x, e_i)$.

4. Campos vectoriales y flujos

TEOREMA 2.2. Existencia y unicidad.
Sean $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto, $X \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$.

- *Dados $x_0 \in U$, $t_0 \in \mathbb{R}$, existen $\varepsilon > 0$ y una única solución $\alpha : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to U$ a la ecuación diferencial*

$$x' = X(x) \tag{2.1}$$

que satisface $\alpha(t_0) = x_0$.
- *Para cada $x \in U$ sea $J(x)$ el intervalo maximal donde esta definida una solución $J(x) \to U$ a (2.1) que satisface $0 \mapsto x$. Escribiendo $t \mapsto \varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ tal solución, se tiene que el conjunto $\Omega = \{(t, x) : x \in U, t \in J(x)\}$ es abierto y la función $\varphi : \Omega \to U$ es de clase C^1.*
- *Si se satisfacen dos de las condiciones $t \in J(x)$, $t + s \in J(x)$, $s \in J(\varphi_t(x))$, entonces se satisface la tercera y en tal caso*

$$\varphi_{t+s}(x) = \varphi_s(\varphi_t(x)).$$

La función $\varphi : \Omega \to U$ dada por el Teorema 2.2 se llama el flujo local definido por el campo vectorial $X \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$. Para cada $x \in U$, la derivada $A(t) = D\varphi_t(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$A'(t) = DX(\varphi_t(x))A(t) \tag{2.2}$$

conocida como la primera variación de 2.1.

PROPOSICIÓN 2.5. *Si $X \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$, entonces $\varphi \in C^k(\Omega, U)$*

Demostración. Por inducción.

Supongamos que el resultado es valido para cualquier campo vectorial de clase C^k y que $X \in C^{k+1}(U, \mathbb{R}^m)$. Consideremos el campo vectorial $Y(x, u) = (X(x), DX(x)u)$ cuyo flujo local esta dado por

$$\Phi_t(x, u) = (\varphi_t(x), D\varphi_t(x)u).$$

Como $Y \in C^k(U \times \mathbb{R}^m)$, $\Phi \in C^k(\Omega \times \mathbb{R}^m, U \times \mathbb{R}^m)$. □

DEFINICIÓN 2.9. Sean M una variedad diferenciable y $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M$ una curva diferenciable. Definimos el vector tangente a la curva en $\alpha(t)$ por $\alpha'(t) = \alpha_*(d/dt)_t$.

OBSERVACIÓN 2.7. Sea $h : M \to N$ un difeomorfismo y sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ consideremos el campo vectorial $h_*X \in \mathfrak{X}(N)$ definido por $h_*X(y) = h_*(X(h^{-1}(y)))$. Sean $\alpha : I \to M$ una curva diferenciable y $\beta = h \circ \alpha$. Entonces $\beta'(t) = h_* \circ \alpha_*(d/dt)_t = h_*(\alpha'(t))$. Así

$$\alpha'(t) = X(\alpha(t)) \iff \beta'(t) = h_*(X(\alpha(t))) = h_*X(\beta(t)),$$

o sea que α es una solución de la ecuación diferencial $x' = X(x)$ si y solo si $\beta = h \circ \alpha$ es una solución de la ecuación diferencial $y' = h_*(X)(y)$. Si $F : N \to L$ es otro difeomorfismo $(F \circ h)_* X = F_*(h_* X)$. En efecto

$$\begin{aligned}(F \circ h)_* X(F(h(x))) &= (F \circ h)_{*x}(X(x)) = F_{*h(x)}(h_{*x}(X(x))) \\ &= F_{*h(x)}(h_* X(h(x))) = F_*(h_* X)(F(h(x))).\end{aligned}$$

Tenemos ahora la versión para variedades del Teorema 2.2

Teorema 2.3. *Sea M una variedad diferenciable y sea $X \in \mathfrak{X}(M)$.*

- *Dados $p \in M$, $t_0 \in \mathbb{R}$, existen $\varepsilon > 0$ y una única solución $\alpha : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to M$ a la ecuación diferencial*

$$x' = X(x) \tag{2.3}$$

  que satisface $\alpha(t_0) = p$.
- *Para cada $x \in M$ sea $J(x)$ el intervalo maximal donde esta definida una solución $J(x) \to U$ a (2.3) que satisface $0 \mapsto x$. Escribiendo $t \mapsto \varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ tal solución, se tiene que el conjunto $\Omega = \{(t, x) : x \in M, t \in J(x)\}$ es abierto y la función $\varphi : \Omega \to M$ es diferenciable.*
- *Si se satisfacen dos de las condiciones $t \in J(x)$, $t + s \in J(x)$, $s \in J(\varphi_t(x))$, entonces se satisface la tercera y en tal caso*

$$\varphi_{t+s}(x) = \varphi_s(\varphi_t(x)).$$

Demostración. Sea (U, ψ) carta con $p \in U$. Consideremos el campo vectorial diferenciable $Y = \psi_* X : \psi(U) \to \mathbb{R}^m$. Por el Teorema 2.2 existen $\varepsilon > 0$ y una única solución $\beta : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to M$ a la ecuación diferencial $y' = Y(y)$ que satisface $\beta(t_0) = \psi(p)$. Por la Observación 2.7 $\alpha = \psi^{-1} \circ \beta$ es la única solución a (2.3) definida en $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ que satisface $\alpha(t_0) = p$. Las demás afirmaciones se sigue también del Teorem 2.2. $\square$

Observación 2.8. La función $\varphi : \Omega \to M$ es el flujo local definido por $X \in \mathfrak{X}(M)$. Se sigue de la Observación 2.7 y del Teorema 2.3 que si $h : M \to N$ es un difeomorfismo $X \in \mathfrak{X}(M)$ entonces el flujo local de $h_* X$ es $(t, y) \mapsto h \circ \varphi_t \circ h^{-1}$.

Teorema 2.4. *Sean M variedad compacta y $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces $\Omega = \mathbb{R} \times M$.*

Demostración. Para cada $x \in M$ sean $\varepsilon(x) > 0$ y U_x vecindad de x tales que $(-\varepsilon(x), \varepsilon(x)) \times U_x \subset \Omega$. Sea $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_k}\}$ cubierta de M y pongamos $\varepsilon = \min\{\varepsilon(x_1), \ldots, \varepsilon(x_k)\}$. Para $t \in \mathbb{R}$, sean $k(t) = [2t/\varepsilon]$

y $s(t) = t - k(t)\varepsilon/2$. Definamos

$$\varphi_t = \begin{cases} \varphi_{s(t)} \circ \varphi_{\varepsilon/2}^{\circ k(t)} & t \geq 0 \\ \varphi_{s(t)} \circ \varphi_{-\varepsilon/2}^{\circ -k(t)} & t < 0. \end{cases}$$

$\square$

TEOREMA 2.5. Caja de flujo
Sean M una variedad diferenciable y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Si $X(p) \neq 0$, existe una carta $U, \psi = (x_1, \ldots, x_m)$ con $p \in U$ tal que $X|_U = \partial/\partial x_1$.

Demostración. Sea (V, ϕ) carta con $p \in V$, $\phi(p) = 0$ y $\phi_*(X(p)) = e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. Sea φ_t el flujo local de $\phi_* X$.

Definimos $h : (-\varepsilon, \varepsilon)^m \to \mathbb{R}^m$ por $h(y_1, \ldots, y_m) = \varphi_{y_1}(0, y_2 \ldots, y_m)$ y observamos que

$$h(y_1 + t, \ldots, y_m) = \varphi_{y_1+t}(0, y_2 \ldots, y_m) = \varphi_t(h(y_1, \ldots, y_m)),$$

Así $D_1 h(y) = \phi_* X(h(y))$ y $D_i h(0) = e_i$ para $i > 1$. Entonces $Dh(0) = I$ y por el teorema de la función inversa, h es un difeomorfismo de una vecindad del origen en otra. Sea $\psi = h^{-1} \circ \phi$, entonces

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{\psi^{-1}(y)} = \psi_{*y}^{-1}(e_1) = \phi_{*h(y)}^{-1}(D_1 h(y)) = X(\psi^{-1}(y)).$$

$\square$

5. La derivada de Lie

DEFINICIÓN 2.10. Sea $F : M \to N$ diferenciable. Definimos
- $F^* : C^\infty(N) \to C^\infty(M)$ por $F^* g = g \circ F$.
- $F^* : \Gamma(T^r(N)) \to \Gamma(T^r(M))$ por $(F^* T)(x) = (F_{*x})^*(T(F(x)))$.

PROPOSICIÓN 2.6. *Si $F : M \to N$ y $G : N \to L$ son diferenciables.*
- $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$
- *Si $g \in C^\infty(N)$, $dF^* g = F^* dg$.*

Demostración.

$$d(F^* g)_x = dg_{F(x)} \circ F_{*x} = (F_{*x})^*(dg_{F(x)}) = (F^* dg)(x).$$

DEFINICIÓN 2.11. Sean M variedad diferenciable, $X \in \mathfrak{X}(M)$ y φ_t el flujo local de X. Para $f \in C^\infty(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(M)$, $R \in \Gamma(T^r(M))$ definimos la derivada de Lie L_X por

$$L_X f(x) = X(x)(f) = df_x(X(x)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t^* f(x),$$

$$L_X Y(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi_{-t*} Y)(x),$$

$$L_X R(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t^* R(x).$$

Proposición 2.7. *Con la notación de la Definición 2.11 y* $F : M \to N$ *difeomorfismo.*

(1) $L_X \circ F^* = F^* \circ L_{F_*X}$, $F_*(L_X Y) = L_{F_*X} F_* Y$.
(2) $L_X(fY) = f L_X(Y) + L_X(f)Y$, $L_X(fR) = f L_X(Y) + L_X(f)R$
(3) $d(L_X f) = L_X(df)$
(4) *Si* $Y_1, \ldots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$, *entonces*

$$L_X(R(Y_1,\ldots,Y_r)) = L_X(R)(Y_1,\ldots,Y_r) + \sum_{i=1}^r R(Y_1,\ldots,L_X(Y_i),\ldots,Y_r).$$

Demostración. (1) El flujo local de F_*X es $F \circ \varphi_t \circ F^{-1}$. Así

$$\begin{aligned}
L_X(F^*T)(x) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t^* F^* T(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (F^*(F^{-1})^* \varphi_t^* F^* T)(x) \\
&= (F_{*x})^* \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (F \circ \varphi_t \circ F^{-1})^* T)(F(x)) \\
&= (F_{*x})^* L_{F_*X} T(F(x)) = (F^* \circ L_{F_*X})(x). \\
L_{F_*X} F_* Y(F(x)) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} ((F \circ \varphi_{-t} \circ F^{-1})_* F_* Y) F(x) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (F_*(\varphi_{-t})_* Y) F(x) = F_{*x}(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi_{-t})_* Y(x)) \\
&= F_* x(L_X Y(x)) = F_*(L_X Y)(F(x)).
\end{aligned}$$

Para demostrar (3) primero supongamos que M es un abierto de $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
(L_X df)(x) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi_t^* df)(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (d\varphi_t^* f)(x) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\big(f \circ \varphi\big)(0,x) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\big(f \circ \varphi\big)(0,x) = d(L_X f)(x).
\end{aligned}$$

En el caso general sea $x \in M$ y sea (U, ψ) una carta alrededor de x. Por el inciso (1), en la vecindad U tenemos

$$\begin{aligned}
L_X(df) &= \psi^*(L_{\psi_*X}(\psi^{-1*} df)) = \psi^*(L_{\psi_*X} d(\psi^{-1*} f)) \\
&= \psi^* d(L_{\psi_*X}(\psi^{-1*} f)) = d\psi^*(L_{\psi_*X}(\psi^{-1*} f)) = d(L_X f)
\end{aligned}$$

(4) Observemos que

$$\begin{aligned}
\varphi_t^*(R(Y_1,\ldots,Y_r))(x) &= R(Y_1,\ldots,Y_r)(\varphi_t(x)) \\
&= R(\varphi_t(x))(Y_1(\varphi_t(x)),\ldots,Y_r(\varphi_t(x))) \\
&= R(\varphi_t(x))(\varphi_{t*x}((\varphi_{-t*}Y_1)(x)),\ldots,\varphi_{t*x}((\varphi_{-t*}Y_r)(x))) \\
&= (\varphi_t^* R)(x)((\varphi_{-t*}Y_1)(x),\ldots,(\varphi_{-t*}Y_r)(x)).
\end{aligned}$$

$$L_X(R(Y_1,\ldots,Y_r))(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\varphi_t^* R)(x)((\varphi_{-t*}Y_1)(x),\ldots,(\varphi_{-t*}Y_r)(x))$$
$$= L_X R(x)(Y_1(x),\ldots,Y_r(x)) + \sum_{i=1}^{r} R(x)(Y_1(x),\ldots,L_X Y_i(x),\ldots,Y_r(x)).$$

La demostración de (2) es similar y más sencilla. □

Proposición 2.8. *Sean* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$. *Entonces*

$$(L_X Y)(f) = [X,Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Demostración. $f \circ \varphi(t,x) = f(x) + tg(t,x)$, donde

$$g(t,x) = \int_0^1 D_1(f\circ\varphi)(ts,x),\ g(0,x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f\circ\varphi(t,x) = X(f)(x).$$

$$(L_X Y)(f)(x) = (L_X Y)(x)(f) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\varphi_{-t*}Y(x)(f), \text{ pero}$$

$$(\varphi_{-t*}Y)(x)(f) = [\varphi_{-t*}(Y(\varphi_t(x)))](f) = Y(\varphi_t(x))(f\circ\varphi_{-t})$$
$$= Y(\varphi_t(x))(f - tg(-t,\cdot)) = (Y(f))(\varphi_t(x)) - tY(g(-t,\cdot))(\varphi_t(x)).$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\varphi_{-t*}Y)(x)(f) &= X(Y(f))(x) - Y(g(0,\cdot))(x)\\ &= (X(Y(f)) - Y(X(f)))(x).\end{aligned}$$

□

Corolario 2.6. Identidad de Jacobi
Si $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$, $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$.
Esta igualdad se puede escribir $L_{[X,Y]} = L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X$.

Proposición 2.9. *Sean* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *con flujos locales* φ_t, ψ_t. *Entonces*

$$[X,Y] = 0 \iff \varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$$

Demostración. El flujo local de $(\psi_{-s})_* X$ es $\psi_{-s}\circ\varphi_t\circ\psi_s$ y

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\Big|_{s=t}(\psi_{-s})_*X &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}(\psi_{-(t+s)})_*X = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}(\psi_{-t})_*((\psi_{-s})_*X)\\ &= (\psi_{-t})_*(L_Y X).\end{aligned}$$

Si $L_Y X = 0$ entonces $(\psi_{-s})_*X = \psi_{0*}X = X$ y así $\psi_{-s}\circ\varphi_t\circ\psi_s = \varphi_t$.

Reciprocamente si $\varphi_t\circ\psi_s = \psi_s\circ\varphi_t$, el flujo local de $(\psi_{-s})_*X$ es φ_t, o sea $(\psi_{-s})_*X = X$ y entonces $L_Y X = (d(\psi_{-s})_*X/ds)_{s=0} = 0$. □

PROPOSICIÓN 2.10. *Sean* $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ *linealmente independientes en* $p \in M$ *y tales que* $\forall_{i,j=1,\dots,k}$ $[X_i, X_j] = 0$. *Entonces hay una carta* $U, \psi = (x_1, \dots, x_m)$ *con* $p \in U$ *tal que*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, X_k = \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Demostración. Sea V, ϕ carta con $\phi(p) = 0$ y sean $Y_i = \phi_* X_i$, entonces $Y_1(0), \dots, Y_k(0)$ son linealmente independientes y completamos a una base de $\mathbb{R}^m$ con $Y_{k+1}, \dots, Y_m$. Sea $A \in Gl(n)$ tal que $AY_i(0) = e_i, i = 1, \dots, k$, $AY_{k+j} = e_{k+j}$. Sea φ^i_t el flujo local de $Z_i = AY_i, i = 1, \dots, k$ y definamos

$$h(x_1, \dots, x_m) = \varphi^1_{x_1} \circ \dots \circ \varphi^k_{x_k}(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_m).$$

Como $[Z_i, Z_j] = A\phi_*[X_i, X_j] = 0$, para $i = 1, \dots, k$ tenemos

$$h(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_m) = \varphi^i_t \circ h(x_1, \dots, x_m),$$

$$Dh(x)e_i = D_i h(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi^i_t \circ h(x) = Z_i(h(x))$$

Así $D_i h(0) = Z_i(0) = e_i, i = 1, \dots, k$, $D_{k+j}h(0) = e_{k+j}$ y entonces h es un difeomorfismo de una vecindad del origen en otra.

Sea $\psi = h^{-1} \circ A \circ \phi$, entonces

$$\psi_* X_i = h^{-1}_* A\phi_* X_i = h^{-1}_* Z_i = e_i.$$

DEFINICIÓN 2.12. Un grupo $(G, \cdot)$ es un grupo de Lie si es una variedad diferenciable y la transformación $\mu : G \times G \to G$ dada por $\mu(g, h) = g \cdot h^{-1}$ es diferenciable.

Sea G un grupo de Lie. Denotaremos por e la identidad de G. Para cada $a \in G$ definimos las traslaciones izquierda y derecha $L_a, R_a : G \to G$ mediante $L_a(g) = a \cdot g$ $R_a(g) = g \cdot a$. Tenemos también los automorfismos interiore $I_g = L_a \circ R_{a^{-1}}$.

Un campo $X \in \mathfrak{X}(G)$ se llama invariante por la izquierda si $L_{a*}X = X$ para todo $a \in G$. Denotaremos por $\mathfrak{g}$ el conjunto de campos invariantes por la izquierda.

OBSERVACIONES 2.9. Si $X, Y \in \mathfrak{g}$ entonces $[X, Y] \in \mathfrak{g}$ ya que

$$L_{a*}[X, Y] = [L_{a*}X, L_{a*}Y] = [X, Y] \; \forall a \in G.$$

Si $X \in \mathfrak{g}$, entonces $X(g) = (L_{g*}X)(g) = L_{g*e}(X(g^{-1}g)) = L_{g*e}(X(e))$. Así hay un isomorfismo $T_eG \cong \mathfrak{g}$, $x \mapsto X$ donde $X(g) = L_{g*e}(x)$. Si $X \in \mathfrak{g}$ con $X(e) = x$, denotaremos por $t \mapsto e^{tx} = \exp(tx)$ a la solución de $g' = X(g)$ con $0 \mapsto e$. Entonces el flujo de X esta dado por $\varphi_t(g) = g \cdot e^{tx} = R_{\exp(tx)}(g)$ ya que

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g \cdot e^{tx} = L_{g*e}(x) = X(g).$$

Si $X, Y \in \mathfrak{g}$ con $X(e) = x$, $Y(e) = y$ definiremos $[x, y] = [X, Y](e)$. Así

$$
\begin{aligned}
[x, y] &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (R_{\exp(-tx)*}Y)(e) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} R_{\exp(-tx)*}(Y(e^{tx})) \\
\text{(2.4)} \qquad &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} R_{\exp(-tx)*}L_{\exp(tx)*}(y) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (R_{\exp(-tx)}L_{\exp(tx)})_{*e}(y).
\end{aligned}
$$

Como $h_{*e}(y) = d/ds|_{s=0} h(e^{sy})$ para $h \in C^\infty(G, G)$, tenemos

$$[x, y] = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\Big|_{(0,0)} e^{tx}e^{sy}e^{-tx} = -[y, x] = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\Big|_{(0,0)} e^{-sy}e^{tx}e^{sy}.$$

La aparente diferencia entre las dos derivadas se explica con

$$[x, y] = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\Big|_{(0,0)} e^{-sy}e^{tx}e^{sy}e^{-tx}$$

Definición 2.13. Sea G un grupo de Lie. Cualquiera de $\mathfrak{g}$ ó T_eG con la correspondiente operación $[,]$ se llama el *álgebra de Lie* de G y la tansformación $T_eG \to G$, $x \mapsto e^x$ se conoce como la *transformación exponencial*.

Observaciones 2.10. Si $x_1, \dots, x_k$ es una base de T_eG, entonces los campos $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{g}$ con $X_i(e) = x_i$, forman una base de T_gG en cada punto $g \in G$. Por lo tanto G es paralelizable mediante el difeomeorfismo $G \times \mathfrak{g} \cong TG$, $(g, X) \to X(g)$.

Definimos $Ad(g) : (I_g)_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ y $ad_x = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad_{\exp(tx)}$.

Puesto que $Ad(gh) = Ad(g) \circ Ad(h)$ y $Ad(g)$ es un isomorfismo del algebra de Lie, Ad define una acción del grupo en su álgebra. Por (2.4) y la identidad de Jacobi

$$
\begin{aligned}
ad_x y &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} ((I_{\exp(tx)})_{*e}(y) = [x, y] \\
ad_[x, z] &= ad_x \circ ad_z - ad_z \circ ad_x
\end{aligned}
$$

y entonces ad define un homomorfismo entre el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y el álgebra de Lie $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g})$ con la operación natural.

6. Conexiones. Transporte paralelo. Geodésicas

En esta sección $\pi : E \to M$ denotara un haz vectorial diferenciable

Definición 2.14. Una conexión en el haz $\pi : E \to M$, es una función $\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$ tal que para $f \in C^\infty(M)$, $s \in \Gamma(E)$

$$\nabla(fs) = f\nabla s + df \otimes s.$$

Observación 2.11. Sea $\{s_1, \dots, s_n\} \subset \Gamma(E)$ una base local en U. Definimos la matriz ω de la conexión para esa base local por

$$\nabla s_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} \otimes s_j, \quad \omega_{ij} \in \Gamma(T^*M).$$

Si $\{s'_1, \dots, s'_n\} \subset \Gamma(E)$ es otra base local en U,

$$s'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} s_j, s_k = \sum_{l=1}^{n} a^{-1}_{kl} s'_l$$

$$\begin{aligned}\nabla s'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \nabla s_j + da_{ij} \otimes s_j &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{k=1}^{n} \omega_{jk} \otimes s_k + \sum_{k=1}^{n} da_{ik} \otimes s_k \\ = \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\omega_{jk} + da_{ik}) \otimes s_k &= \sum_{k,l=1}^{n} (da_{ik} a^{-1}_{kl} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\omega_{jk} a^{-1}_{kl}) \otimes s'_l\end{aligned}$$

O sea que la matriz de la conexión para la nueva base local es

$$\omega' = da \cdot a^{-1} + a \cdot \omega \cdot a^{-1}.$$

Definición 2.15. Sea ∇ una conexión en $\pi : E \to M$

- Para $X \in \mathfrak{X}(M)$ definimos la derivada covariante de la sección s en la dirección de X como $\nabla_X s = \nabla s(X)$. Si ω es la matriz de la conexión en una base, es costumbre escribir
$$\Gamma^k_{ij} = \omega_{jk}(\frac{\partial}{\partial x_i}).$$
- Si $\langle , \rangle$ es una métrica en E, la conexión ∇ se llama compatible con $\langle , \rangle$ si para todo $s, r \in \Gamma(E)$
$$d\langle s, r\rangle = \langle s, \nabla r\rangle + \langle \nabla s, r\rangle.$$
- Si $E = TM$ definimos la torsion de la conexión como
$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$
y la conexión se llama simétrica si $T = 0$.

Observación 2.12. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\{s_1, \dots, s_n\} \subset \Gamma(E)$ es una base local, para cualquier $s \in \Gamma(E)$ tenemos $s = \sum_i f_i s_i$ y así

$$\nabla s(X) = \sum_{i=1}^{n} \Big(X(f_i) s_i + f_i \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}(X) s_j \Big) = \sum_{j=1}^{n} \Big(X(f_j) + \sum_{i=1}^{n} f_i\, \omega_{ij}(X) \Big) s_j.$$

Por lo tanto para calcular $\nabla s(X)$ en q solo hay que conocer $X(q)$, las componentes de s en q y sus derivadas en la dirección de $X(q)$. Sea $\gamma : I \to M$ una curva diferenciable y sea $s : I \to E$ una función diferenciable tal que $s(t) \in \pi^{-1}(\gamma(t)), \forall t \in I$. Decimos que s es una sección alo largo de γ. Escribiendo $s(t) = \sum_i f_i(t)s_i(\gamma(t))$ definimos la derivada covariante de s a lo largo de la curva mediante

$$\frac{Ds}{dt}(t) = \sum_{j=1}^{n}\Big(f_j'(t) + \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\omega_{ij}(\gamma'(t))\Big)s_j(\gamma(t)). \tag{2.5}$$

Decimos que la sección s es paralela a lo largo de γ si $Ds/dt \equiv 0$

TEOREMA 2.7. *Sean ∇ una conexión el haz $\pi : E \to M$ y $\gamma : [a,b] \to M$ una curva diferenciable. Para todo $v \in \pi^{-1}(\gamma(a))$ hay una única sección s paralela a lo largo de γ tal que $s(a) = v$. Escribiendo $s(b) = T_\gamma(v)$, la transformación $T_\gamma : \pi^{-1}(\gamma(a)) \to \pi^{-1}(\gamma(b))$ es lineal.*

Demostración. Dividamos el intervalo $[a,b]$ en subintervalos $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, \dots l-1$ tales que $\gamma([t_k, t_{k+1}]) \subset U_k$ y hay una base local $\{s_i^k\}$ en U_k. Sea ω^k la matriz de la conexión para esa base local. Para todo $w \in \mathbb{R}^n$, el sistema lineal en $[t_k, t_{k+1}] \times \mathbb{R}^n$

$$f' = -f\,\omega^k_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \tag{2.6}$$

tiene una única solución en $f : [t_k, t_{k+1}] \to \mathbb{R}^n$ que satisface $f(t_k) = w$. Sea $f^0 : [a, t_1] \to \mathbb{R}^n$ la solución del sistema (2.6) $k = 0$, que satisface $(\gamma(a), f^0(a)) = \psi_0(v)$. Definimos

$$s(t) = \sum_i f_i^0(t)s_i^0(\gamma(t)), t \in [a, t_1].$$

Inductivamente, sea $f^k : [t_k, t_{k+1}] \to \mathbb{R}^n$ la solución del sistema (2.6) que satisface $(\gamma(t_k), f^k(t_k)) = \psi_k(s(t_k))$ y definamos

$$s(t) = \sum_i f_i^k(t)s_i^k(\gamma(t)), t \in [t_k, t_{k+1}].$$

Que la transformación T_γ es lineal se sigue del hecho de que el conjunto de soluciones de un sistema lineal es un espacio vectorial. □

OBSERVACIÓN 2.13. Supongamos que la conexión ∇ es compatible con una métrica $\langle , \rangle$. Si s, r son secciones paralelas a lo largo de γ

$$\frac{d}{dt}\langle s(t), r(t)\rangle = \Big\langle \frac{Ds}{dt}(t), r(t)\Big\rangle + \Big\langle s(t), \frac{Dr}{dt}(t)\Big\rangle = 0.$$

Así $\langle s(t), r(t)\rangle$ es constante y la transformación T_γ preserva la métrica.

Si $\{s_1, \dots, s_n\} \subset \Gamma(E)$ es una base local ortonormal, entonces

$$0 = \langle s_i, \nabla s_j\rangle + \langle \nabla s_i, s_j\rangle = \omega_{ji} + \omega_{ij}$$

o sea que ω es antisimétrica.

TEOREMA 2.8. Levi Civita.
Sea $\langle,\rangle$ una métrica riemanniana en la variedad diferenciable M. Existe una única conexión en TM compatible con la métrica y simétrica.

Demostración. Supongasé que ∇ es compatible con la métrica y simétrica. Para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned} X\langle Y,Z\rangle &= \langle\nabla_X Y,Z\rangle+\langle Y,\nabla_X Z\rangle \\ Y\langle Z,X\rangle &= \langle\nabla_Y Z,X\rangle+\langle Z,\nabla_Y X\rangle \\ Z\langle X,Y\rangle &= \langle\nabla_Z X,Y\rangle+\langle X,\nabla_Z Y\rangle \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} &X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle= \\ &\qquad\langle[X,Z],Y\rangle+\langle[Y,Z],X\rangle+\langle[X,Y],Z\rangle+2\langle\nabla_Y X,Z\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2\langle\nabla_Y X,Z\rangle= \\ &X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle-\langle[X,Z],Y\rangle-\langle[Y,Z],X\rangle-\langle[X,Y],Z\rangle. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Lo que demuestra la unicidad. Por otra parte la ecuación (2.7) define una conexión y se comprueba facilmente que es simétrica y compatible con la métrica. □

DEFINICIÓN 2.16. Sea $\langle,\rangle$ una métrica riemanniana en la variedad M y sea ∇ la conexión de Levi-Civita. Una curva $\gamma : I \to M$ se llama geodésica si $D\gamma'/dt = 0$.

Si en coordenadas locales $\varphi(\gamma(t)) = (a_1(t), \ldots, a_n(t))$, entonces

$$\gamma'(t)=\sum_{i=1}^{n} a_i'(t)\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_{\gamma(t)}$$

y se sigue de la ecuación (2.5) que γ es una geodésica si y sólo si

$$a_k''(t)+\sum_{i=1}^{n}\Gamma_{ij}^k(\gamma(t))a_i'(t)a_j'(t)=0,\ k=1,\ldots n. \tag{2.8}$$

EJEMPLO 2.9. En un grupo de Lie G siempre podemos definir una métrica riemanniana invariante por la izquierda. De hecho sea $\langle,\rangle_e$ cualquier métrica en T_eG y definamos $\forall g \in G$

$$\langle,\rangle_g=(L^*_{g^{-1}})_g(\langle,\rangle_e).$$

Para $\langle,\rangle$ invariante por la izquierda y $X, Y \in \mathfrak{g}$, tenemos que$\langle X,Y\rangle$ es constante. Si $\langle,\rangle = 0$ es también invariante por la derecha, $L_X\langle,\rangle = 0$

y así, por (4) de la Proposición 2.7

$$
\begin{aligned}
Z\langle X,Y\rangle &= L_Z\langle,\rangle(X,Y)+\langle [Z,X],Y\rangle+\langle X,[Z,Y]\rangle\\
&\langle [Z,X],Y\rangle+\langle X,[Z,Y]\rangle=0. \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

La conexión dada por $\nabla_X Y=[X,Y]/2$ para $X,Y\in\mathfrak{g}$, es la conexión de Levi-Civita ya que es compatible con la métrica por (2.9) y

$$\nabla_X Y-\nabla_Y X=\frac{1}{2}[X,Y]-\frac{1}{2}[Y,X]=[X,Y].$$

Como $\nabla_X X=0$ para $X\in\mathfrak{g}$, tenemos que las curvas $t\mapsto e^{tx}$ son geodésicas.

En un grupo compacto siempre existem métricas bi-invariantes.

CAPíTULO 3

Formas diferenciales

1. El algebra exterior

Para V espacio vectorial de dimensión finita, sea

$$\wedge^k V^* = \{\omega \in V^{*\otimes k} : \omega(v_1, \dots, v_k) = 0, \text{ si } \exists i < j \text{ tal que } v_i = v_j\}.$$

$$\begin{aligned}
&\text{Si } \omega \in \wedge^k V^*, \omega(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_k) = 0, \\
&\quad \Rightarrow \omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_k) + \omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) \\
&\quad + \omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) + \omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_j, \dots, v_k) = 0,
\end{aligned}$$

y así $\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$

Definición 3.1. Sea S_k el grupo de permutaciones de un conjunto de k elementos y sea A_k el subgrupo de permutaciones pares. Para $\sigma \in S_K$ sea $\hat{\sigma}(v_1, \dots, v_k) = (v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$. Para $T \in V^{*\otimes k}$ definimos

$$\operatorname{Alt}(T) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_K} (\operatorname{sgn} \sigma) T \circ \hat{\sigma}$$

Nótese que $\hat{\tau}\hat{\sigma}(v_1, \dots, v_k) = \hat{\tau}(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = (v_{\sigma\tau(1)}, \dots, v_{\sigma\tau(k)}) = (\sigma\tau)\hat{}(v_1, \dots, v_k)$ y así $\hat{\tau}\hat{\sigma} = (\sigma\tau)\hat{}$.

Proposición 3.1. Alt *es una proyección de* $V^{*\otimes k}$ *sobre* $\wedge^k V^*$*:*

(1) $\operatorname{Alt}(V^{*\otimes k}) \subset \wedge^k V^*$.
(2) $\operatorname{Alt} | \wedge^k V^* = id| \wedge^k V^*$.

Demostración.

(1) Si $v_i = v_j$ para algun par $i < j$, sea $\tau = (ij)$. Entonces $(\tau\sigma)\hat{}(v_1, \dots, v_k) = \hat{\sigma}\hat{\tau}(v_1, \dots, v_k) = \hat{\sigma}(v_1, \dots, v_k)$ para todo $\sigma \in S_K$.

$$\begin{aligned}
k! \operatorname{Alt}(T)(v_1, \dots, v_k) &= \sum_{\sigma \in S_K} (\operatorname{sgn} \sigma) T \circ \hat{\sigma}(v_1, \dots, v_k) \\
&= \sum_{\sigma \in A_k} T \circ \hat{\sigma}(v_1, \dots, v_k) - \sum_{\sigma \in A_k} T \circ (\tau\sigma)\hat{}(v_1, \dots, v_k) = 0
\end{aligned}$$

(2) Sean $\omega \in \wedge^k V^*$, $\tau = (12)$, entonces $\omega \circ \hat{\tau} = -\omega$ y $\omega \circ \hat{\sigma} = \omega \; \forall \sigma \in A_k$. Entonces

$$\mathrm{Alt}(\omega) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in A_K} \omega \circ \hat{\sigma} - \omega \circ (\sigma\tau)\hat{} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in A_K} \omega - \omega \circ \hat{\tau} \circ \hat{\sigma} = \frac{2}{k!} \sum_{\sigma \in A_K} \omega = \omega.$$

Definición 3.2. Para $\omega \in \wedge^k V^*, \eta \in \wedge^l V^*$ definimos

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta) \in \wedge^{k+l} V.$$

Proposición 3.2. *El producto exterior $\wedge$ satisface*

(1) *Es bilineal*
(2) *Si $f : W \to V$ es lineal, entonces $f^*(\wedge^k V^*) \subset \wedge^k W^*$ y*

$$f^*(\omega \wedge \eta) = (f^*\omega) \wedge (f^*\eta).$$

(3) *Si $\omega \in \wedge^l V^*, \eta \in \wedge^k V^*$, $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$.*

Demostración. (3)

$$\begin{aligned} k!l!\, \omega \wedge \eta &= (-1)^l \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\mathrm{sgn}\, \sigma)(\omega \otimes \eta) \circ ((1 \cdots l+1)\sigma)\hat{} \\ &= (-1)^{2l} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\mathrm{sgn}\, \sigma)(\omega \otimes \eta) \circ ((2 \cdots l+2)(1 \cdots l+1)\sigma)\hat{} \\ \cdots &= (-1)^{kl} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\mathrm{sgn}\, \sigma)(\omega \otimes \eta) \circ ((k \cdots l+k) \cdots (1 \cdots l)\sigma)\hat{} \\ &= (-1)^{kl} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\mathrm{sgn}\, \sigma)(\eta \otimes \omega) \circ \hat{\sigma} = (-1)^{kl} k!l!\, \eta \wedge \omega \end{aligned}$$

Proposición 3.3. *Sean $S \in V^{*\otimes k}, T \in V^{*\otimes l}$, $\omega \in \wedge^k V^*, \eta \in \wedge^l V^* \theta \in \wedge^r V^*$.*

(1) *Si $\mathrm{Alt}(S) = 0$, $\mathrm{Alt}(S \otimes T) = \mathrm{Alt}(T \otimes S) = 0$.*
(2) *$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$*

Demostración. (1) Consideremos el subgrupo

$$\hat{S_k} = \{\sigma \in S_{k+l} : \sigma|_{\{k+1,\ldots,k+l\}} = id|_{\{k+1,\ldots,k+l\}}\}$$

y las clases laterales

$$\{\sigma \circ \hat{S_k} : \sigma \in S_{k+l}\} = \{\sigma_1 \circ \hat{S_k}, \ldots, \sigma_m \circ \hat{S_k}\}, m = (k+l)!/k!$$

$$
\begin{aligned}
(k+l)!\,\mathrm{Alt}(S\otimes T) &= \sum_{\sigma\in S_{k+l}} (\operatorname{sgn}\sigma) S\otimes T\circ\hat{\sigma}\\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{\sigma\in\hat{S_k}} \operatorname{sgn}(\sigma_i\sigma)(S\otimes T)\circ(\sigma_i\sigma)\hat{}\\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{\sigma\in\hat{S_k}} (\operatorname{sgn}\sigma) S\circ\hat{\sigma}\circ(\sigma_i|_{\{1,\dots,k\}})\hat{}\otimes \operatorname{sgn}(\sigma_i) T\circ(\sigma_i|_{\{k+1,\dots,k+l\}})\hat{}\\
&= \sum_{i=1}^{m} k!\,\mathrm{Alt}(S)\circ(\sigma_i|_{\{1,\dots,k\}})\hat{}\otimes \operatorname{sgn}(\sigma_i) T\circ(\sigma_i|_{\{k+1,\dots,k+l\}})\hat{} = 0
\end{aligned}
$$

(2) Por (2) de la Proposición 3.1 $\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\omega\otimes\eta)-\omega\otimes\eta)=0$.
Por (1) de esta Proposición $\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\omega\otimes\eta)\otimes\theta)=\mathrm{Alt}(\omega\otimes\eta\otimes\theta)$
Similarmente $\mathrm{Alt}(\omega\otimes\mathrm{Alt}(\eta\otimes\theta))=\mathrm{Alt}(\omega\otimes\eta\otimes\theta)$. Así,

$$
(\omega\wedge\eta)\wedge\theta = \frac{(k+l+r)!}{k!l!r!}\,\mathrm{Alt}(\omega\otimes\eta\otimes\theta) = \omega\wedge(\eta\wedge\theta).
$$

□

Corolario 3.1. *Sean $\phi_1\dots,\phi_k\in V^*$, $v_1,\dots,v_k\in V$, entonces*

$$
\phi_1\wedge\cdots\wedge\phi_k = k!\,\mathrm{Alt}(\phi_1\otimes\cdots\otimes\phi_k) = \sum_{\sigma\in S_k}\operatorname{sgn}\sigma(\phi_1\otimes\cdots\otimes\phi_k)\circ\sigma,
$$

$$
\phi_1\wedge\cdots\wedge\phi_k(v_1,\dots,v_k) = \det\Big(\phi_i(v_j)\Big).
$$

Proposición 3.4. *Sea $\{\phi_1\dots,\phi_n\}$ una base de V^*, entonces $\{\phi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\phi_{i_k} : 1\le i_1<\cdots<i_k\le n\}$ es una base de $\wedge^k V^*$. Así $\dim\wedge^k V^* = \binom{n}{k}$*

Demostración. Sabemos que $\{\phi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\phi_{i_k} : 1\le i_1,\dots,i_k\le n\}$ es una base de $V^{*\otimes k}$ y si $\{v_1,\dots,v_n\}$ es la base de V dual a $\{\phi_1\dots,\phi_n\}$, entonces para cualquier $\omega\in V^{*\otimes k}$

$$
\omega = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n}\omega(v_1,\dots,v_k)\,\phi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\phi_{i_k}
$$

Si $\omega \in \wedge^k V^*$ entonces

$$\begin{aligned}\omega = \operatorname{Alt}\omega &= \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \omega(v_1,\ldots,v_k)\ \operatorname{Alt}(\phi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\phi i_k)\\ &= \frac{1}{k!}\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \omega(v_1,\ldots,v_k)\,\phi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\phi_{i_k}\\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \omega(v_1,\ldots,v_k)\,\phi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\phi_{i_k}.\end{aligned}$$

Supongamos que

$$\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \alpha_{i_1,\ldots,i_k}\,\phi_1\wedge\cdots\wedge\phi_k = 0,$$

evaluando en $(v_{j_1},\ldots,v_{j_k})$

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \alpha_{i_1,\ldots,i_k}\ \det\left(\phi_{i_r}(v_{j_s})\right) &= 0\\ \alpha_{j_1\cdots j_k} &= 0.\end{aligned}$$

Observaciones 3.1. Si $\dim V = n$, cualquier $\omega \in \wedge^n V^*\backslash\{0\}$ define una orientación $\mathcal{O}$ en V así: $(v_1,\ldots,v_n)\in\mathcal{O} \iff \omega(v_1,\ldots,v_n) > 0$.

Si $\dim V = \dim W = n$, $f^* : \wedge^n W^* \to \wedge^n V^*$ es la versión libre de bases del determinante.

Proposición 3.5. *$\phi_1\ldots,\phi_k \in V^*$ son linealmente independientes si y sólo si $\phi_1\wedge\cdots\wedge\phi_k \neq 0$.*

Demostración. Si $\phi_1\ldots,\phi_k\in V^*$ son linealmente independientes completemos a una base $\phi_1\ldots,\phi_n$ de V^*, entonces $\phi_1\wedge\cdots\wedge\phi_k$ forma parte de una base de $\wedge^k V^*$ y así, no es cero.

Reciprocamente supongamos que $\phi_1\ldots,\phi_k \in V^*$ son linealmente dependientes, digamos $\phi_k = \sum_{i<k} a_i\phi_i$. Entonces $\phi_1\wedge\cdots\wedge\phi_k = \sum_{i<k} a_i\phi_1\wedge\cdots\wedge\phi_{k-1}\wedge\phi_i = 0$. □

2. Formas diferenciales

Definición 3.3. Para $\pi : E \to M$ un haz vectorial diferenciable definimos

$$\wedge^k E = \bigcup_{p\in M}\wedge^k E_p, \quad \Omega^k(E) = \Gamma(\wedge^k E).$$

Un elemento de $\Omega^k(M) = \Omega^k(T^*M)$ se llama k-forma diferencial en M. Si $\omega\in\Omega^k(M), \eta\in\Omega^l(M)$ definimos $(\omega\wedge\eta)(p) = \omega(p)\wedge\eta(p)$

Observaciones 3.2. Si $F : N \to M$ es diferenciable y $\omega \in \Omega^k(M), \eta \in \Omega^l(M)$ entonces $F^*(\omega \wedge \eta) = F^*(\omega) \wedge F^*(\eta)$.

En cada punto $p \in \mathbb{R}^n$, $\{dx_p^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_p^{i_k} : 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n\}$ es base de $\wedge^k T_p^*\mathbb{R}^n$. Así, cualquier $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ se escribe

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \alpha_{i_1 \cdots i_n} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \quad \alpha_{i_1 \cdots i_n} \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Por brevedad, para $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$ utilizaremos la notación $I = (i_1, \ldots, i_n)$ y escribiremos $\omega = \sum_I \alpha_I dx^I$.

Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto $F = (F^1, \ldots, F^m)$, $F^i \in C^\infty(U)$, $g \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, tenemos

$$\begin{aligned} F^*(g\, dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_k}) &= F^*g\, F^*dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge F^*dy^{j_k} \\ = g \circ F\, dF^*y^{j_1} \wedge \cdots \wedge dF^*y^{j_k} &= g \circ F\, dF^{j_1} \wedge \cdots \wedge dF^{j_k} \\ &= g \circ F \sum_I \det \left(\frac{\partial F^{j_r}}{\partial x^{i_s}} \right) dx^I. \end{aligned}$$

Proposición 3.6. *Una variedad de dimensión n es orientable si y sólo si posee una n-forma que nunca se anula.*

Demostración. Si M es orientable hay un atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ tal que $\det D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) > 0$. Escribiendo $\varphi_\alpha = (x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)$, definimos

$$\omega_\alpha = dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge x_\alpha^n,$$

Sean $\{h_\alpha\}$ una partición de la unidad subordinada a $\{U_\alpha\}$, entonces $\omega = \sum_\alpha h_\alpha \omega_\alpha$ nunca se anula. En efecto, sea $p \in M$ y sea β tal que $h_\beta(p) > 0$. Para cualquier α, $\omega_\alpha = \det D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) \circ \varphi_\beta \, \omega_\beta$. Así

$$\omega(p) = \Big(\sum_\alpha h_\alpha(p) \det D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(\varphi_\beta(p)) \Big) \omega_\beta(p).$$

Reciprocamente, sea ω una n-forma en M que nunca se anula. Sea $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlas con U_α conexo $\forall \alpha$, entonces

$$\omega | U_\alpha = f_\alpha\, dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge x_\alpha^n \quad f_\alpha \in C^\infty(U_\alpha).$$

Como f_α no se anula y U_α es conexa, $\operatorname{sgn} f_\alpha$ es constante y podemos entonces suponer que $f_\alpha > 0$. En $U_\alpha \cap U_\beta$ tenemos

$$f_\alpha \det D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) \circ \varphi_\beta\, dx_\beta^1 \wedge \cdots \wedge x_\beta^n = f_\beta\; dx_\beta^1 \wedge \cdots \wedge x_\beta^n,$$

y así $\det D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) > 0$. □

Definición 3.4. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Definimos la derivada exterior $d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ para todo $k \ge 0$ por

$$d(\sum_I f_I dx^I) = \sum_I df_I \wedge dx^I.$$

Proposición 3.7. *La derivada exterior tiene las siguientes propiedades*

1. *d es lineal*
2. *Si $\omega \in \Omega^k(U), \eta \in \Omega^l(U)$, $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$.*
3. *Si $f \in C^\infty(U)$, $d(df) = 0$.*

Demostración. (1) es obvia.

(2) Si $\omega = f dx^I, \eta = g dx^J$, $\omega \wedge \eta = fg dx^I \wedge dx^J$

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) = (gdf + fdg) \wedge dx^I \wedge dx^J &= df \wedge dx^I \wedge (g dx^J) + f dg \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} d(df) &= d(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i) = \sum_{i=1}^n d(\frac{\partial f}{\partial x^i}) \wedge dx^i = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i \\ &= \sum_{j<i} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i - \sum_{j<i}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i = 0 \end{aligned}$$

□

Corolario 3.2. *Si $\omega \in \Omega^k(U)$, entonces $d(d\omega) = 0$*

Demostración. **Por inducción**. El caso $k = 0$ es (3) de la Proposición 3.7. Suponiendo que el resultado vale para $k-1$,

$$\begin{aligned} d(d(f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k})) &= d(df \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = \\ d(df) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} &- df \wedge d(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \\ &= -df \wedge d(d(x^{i_1} dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k})) = 0. \end{aligned}$$

□

Proposición 3.8. *Sea $d' : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ un operador lineal para todo $k \geq 0$. Si d' satisface las propiedades de la Proposición 3.7 y $d' f = df$ para $f \in C^\infty(U)$, entonces $d = d'$.*

Demostración.

$$d'(f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = d' f \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} + f \wedge d'(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}).$$

Demostraremos que $d'(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = 0$ por inducción sobre k. Para $k = 1$, $d' dx^i = d' d' x^i = 0$.

$$\begin{aligned} d'(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = d' dx^{i_1} &\wedge (dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \\ &- dx^{i_1} \wedge d'(dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = 0. \end{aligned}$$

□

DEFINICIÓN 3.5. Para M variedad diferenciable y todo $k \geq 0$, definimos $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ tal que en cada carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$

$$\omega|U_\alpha = \sum_I f_{\alpha,I} dx_\alpha^I \Rightarrow d\omega|U_\alpha = \sum_I df_{\alpha,I} \wedge dx_\alpha^I.$$

Por la Proposición 3.8, la definición no depende de la carta.

TEOREMA 3.3. *Sean* $\omega \in \Omega^r(M)$, $X_1, \ldots, X_{r+1} \in \mathfrak{X}(M)$, *entonces*

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \ldots, X_{r+1}) &= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} X_i(\omega(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{r+1})) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{r+1}) \end{aligned}$$

Demostración. Sean $\Sigma_1, \Sigma_2 : \mathfrak{X}(M)^{r+1} \to C^\infty(M)$ las sumas en el miembro derecho y sea $d'\omega = \Sigma_1 + \Sigma_2$. Probaremos que $d'\omega$ es $C^\infty(M)$ multilineal.

$$\begin{aligned} \Sigma_1(X_1, \ldots, fX_l, \ldots, X_{r+1}) &= (-1)^{l+1} f X_l(\omega(X_1, \ldots, \hat{X}_l, \ldots, X_{r+1})) \\ &+ \sum_{l<i} (-1)^{i+1} X_i(f\omega(X_1, \ldots, X_l, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{r+1})) \\ &+ \sum_{i<l} (-1)^{i+1} X_i(f\omega(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_l, \ldots, X_{r+1})) \\ &= f\Sigma_1(X_1, \ldots, X_{r+1}) + \sum_{i \neq l} (-1)^{i+1} (X_i f)(\omega(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{r+1})) \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} [X_i, fX_l] &= f[X_i, X_l] + (X_i f) X_l \\ [fX_l, X_j] &= f[X_l, X_j] - (X_j f) X_l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_2(X_1, \ldots, fX_l, \ldots, X_{r+1}) &= f\Sigma_2(X_1, \ldots, \ldots, X_{r+1}) \\ &- \sum_{l<j} (-1)^{l+j} (X_j f) \omega(X_l, \ldots, \hat{X}_l, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{r+1}) \\ &+ \sum_{i<l} (-1)^{i+l} (X_i f) \omega(X_l, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_l, \ldots, X_{r+1}) \\ &= f\Sigma_2(X_1, \ldots, \ldots, X_{r+1}) + \sum_{l<j} (-1)^j (X_j f) \omega(X_1, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{r+1}) \\ &+ \sum_{i<l} (-1)^i (X_i f) \omega(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{r+1}) \end{aligned}$$

Así $d'\omega(X_1,\ldots,fX_l,\ldots,X_{r+1}) = fd'\omega(X_1,\ldots,X_{r+1})$.

$$\begin{aligned} d'\omega &= \sum_{i_1<\cdots<i_{r+1}} d'\omega(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{i_{r+1}}})\, dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{r+1}}, \\ d'\omega(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{i_{r+1}}}) &= \sum_{s=1}^{r+1}(-1)^{s+1}\frac{\partial}{\partial x^{i_s}}\omega(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\ldots,\frac{\hat{\partial}}{\partial x^{i_s}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{i_{r+1}}}) \end{aligned}$$

Para $\omega = gdx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_r}$, $j_1<\cdots<j_r$, tenemos que

$$\omega(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\ldots,\frac{\hat{\partial}}{\partial x^{i_s}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{i_{r+1}}}) = \begin{cases} g & (i_1,\ldots,i_{r+1}) = (j_1,\ldots,i_s,\ldots,j_r) \\ 0 & \{j_1,\ldots,j_r\}\not\subset\{i_1,\ldots,i_{r+1}\} \end{cases}$$

Así

$$d'\omega = \sum_{s\notin\{j_1,\ldots,j_r\}}(-1)^{s+1}\frac{\partial g}{\partial x^s}dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^s\wedge\cdots\wedge dx^{j_r} = d\omega.$$

□

3. Cohomología de de Rham

DEFINICIÓN 3.6. Para M una variedad diferenciable consideremos la sucesión

$$0\to C^\infty(M)\xrightarrow{d}\Omega^1(M)\xrightarrow{d}\cdots\xrightarrow{d}\Omega^n(M)\to 0$$

Ya que $d\circ d=0$, $B^k(M) := d(\Omega^{k-1}(M))\subset Z^k(M) := \ker d$. Sean

$$\begin{aligned} \Omega_c^k(M) &= \{\omega\in\Omega^k(M) : \text{soporte}\,\omega \text{ es compacto}\}, \\ B_c^k(M) &= d(\Omega_c^{k-1}(M)), Z_c^k(M) = Z^k(M)\cap\Omega_c^k(M). \end{aligned}$$

- El k-ésimo grupo de cohomología de de Rham es
$$H^k(M) = Z^k(M)/B^k(M).$$
- El k-ésimo grupo de cohomología con soporte compacto es
$$H_c^k(M) = Z_c^k(M)/B_c^k(M).$$

EJEMPLO 3.1. Sean A y B el conjunto de componentes conexas y el conjunto de componentes conexas compactas de M respectivamente.

$$H^0(M) = Z^0(M) = \{g\in C^\infty(M) : dg=0\} = \bigoplus_{a\in A}\mathbb{R}$$

$$H_c^0(M) = Z_c^0(M) = \{g\in C_c^\infty(M) : dg=0\} = \bigoplus_{a\in B}\mathbb{R}$$

OBSERVACIONES 3.3. Sea $F\in C^\infty(M,N)$

- Como $F^*d = dF^*$, $F^*(Z^k(N))\subset Z^k(M)$, $F^*(B^k(N))\subset B^k(M)$ y se define un homorfismo $F^* : H^k(N)\to H^k(M)$.

- Si F es *propia*, o sea que para todo $K \subset N$ compacto, $F^{-1}(K)$ es compacto, entonces $F^*(\Omega_c^k(N)) \subset \Omega_c^k(M)$ y se define un homomorfismo $F^* : H_c^k(N) \to H_c^k(M)$.

DEFINICIÓN 3.7. Dos transformaciones diferenciables $f, g : M \to N$ se llaman *homotópicas* si existe $F : M \times [0,1] \to N$ diferenciable tal que $\forall x \in M$ $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$.

Sean $\pi_M : M \times [0,1] \to M$, $t : M \times [0,1] \to \mathbb{R}$ las proyecciones naturales. Cualquier $\omega \in \Omega^k(M \times [0,1])$ puede escribirse en la forma

$$\omega = \pi_M^* \omega_t + dt \wedge \pi_M^* \eta_t,\ \omega_t \in \Omega^k(M), \eta_t \in \Omega^{k-1}(M), t \in [0,1].$$

LEMA 3.1. *Considere las inclusiones $i_t : M \to M \times [0,1]$, $x \mapsto (x,t)$. Defina el operador $I : \Omega^k(M \times [0,1]) \to \Omega^{k-1}(M)$ mediante*

$$I(\pi_M^* \omega_t + dt \wedge \pi_M^* \eta_t) = \int_0^1 \eta_t \, dt.$$

Entonces $i_1^* \omega - i_0^* \omega = I(d\omega) + dI(\omega)$.

Demostración. Caso 1. Si $\omega = g dx^I$, entonces $I(\omega) = 0$,

$$\begin{aligned} d\omega &= dg \wedge dx^I = \sum_i \frac{\partial g}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I + \frac{\partial g}{\partial t} dt \wedge dx^I, \\ I(d\omega) &= \Big(\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial t} dt \Big) dx^I = (g(x,1) - g(x,0)) dx^I, \\ i_1^* \omega &= g(x,1) dx^I,\ i_0^* \omega = g(x,0) dx^I. \end{aligned}$$

Caso 2. Si $\omega = g dt \wedge dx^I$

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \Big(\int_0^1 g(x,t) dt \Big) dx^I, \\ dI(\omega) &= \sum_i \Big(\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x^i} dt \Big) dx^i \wedge dx^I \\ d\omega &= \sum_i \frac{\partial g}{\partial x^i} dx^i \wedge dt \wedge dx^I, \\ I(d\omega) &= -\sum_i \Big(\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x^i} dt \Big) dx^i \wedge dx^I. \end{aligned}$$

Como $\forall x \in M$ $t \circ i_s(x) = s$, $i_s^* dt = d i_s^* t = d(t \circ i_s) = 0$. Entonces

$$is^* \omega = i_s^*(dt) \wedge i_s^*(g dx^I) = 0.$$

$\square$

PROPOSICIÓN 3.9. *Sean $f, g : M \to N$ homotópicas, entonces $f^* = g^* : H^k(N) \to H^k(M)$ para todo k.*

Demostración.$F \circ i_0 = f$, $F \circ i_1 = g$. Entonces $i_0^* \circ F^* = f^*$, $i_1^* \circ F^* = g^*$. Por el lema 3.1

$$g^*(\omega) - f^*(\omega) = I(d(F^*\omega)) + dI(F^*\omega) = I(F^*d\omega) + dI(F^*\omega).$$

Si $d\omega = 0$, $g^*(\omega) - f^*(\omega) = dI(F^*\omega)$ y así $[g^*(\omega)] = [f^*(\omega)] \in H^k(M)$.

Lema 3.2. Poincaré. *Supongamos que M es contraíble, es decir, la transformación identidad es homotópica a una transformación constante. Entonces $H^k(M) = 0$ para $k > 0$.*

Demostración. Si g es una transformación constante y $k > 0$, $g^*|H^k(M) = 0$. □

4. Integración en cadenas

Definición 3.8. Un *k-cubo singular* en M es una función diferenciable $c : [0,1]^k \to M$. Si ω es una k-forma en M, $c^*\omega = g dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$ y definimos

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^k} c^*\omega = \int_{[0,1]^k} g.$$

Proposición 3.10. *Sean ω una k-forma en $\mathbb{R}^k$ y c un k-cubo singular con $\det c \geq 0$. Entonces*

$$\int_{[0,1]^k} c^*\omega = \int_{c([0,1]^k)} \omega.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \omega &= f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k \\ c^*\omega &= c \circ f \det Dc \, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k \\ \int_{[0,1]^k} c^*\omega = \int_{[0,1]^k} c \circ f \det Dc &= \int_{c([0,1]^k)} f = \int_{c([0,1]^k)} \omega. \end{aligned}$$

Proposición 3.11. *Sean c un k-cubo singular en M y $p : [0,1]^k \to [0,1]^k$ suprayectiva con $\det Dp \geq 0$. Entonces*

$$\int_{c \circ p} \omega = \int_c \omega.$$

Demostración.

$$\int_{c \circ p} \omega = \int_{[0,1]^k} (c \circ p)^*\omega = \int_{[0,1]^k} p^*(c^*\omega) = \int_{p([0,1]^k)} c^*\omega = \int_c \omega.$$

Definición 3.9. Una *k-cadena* en M es una combinación formal entera de k-cubos singulares $c = \sum_{i=1}^r a_i c_i$, $a_i \in \mathbb{Z}$.

Sea $I^n : [0,1]^n \to \mathbb{R}^n$ la inclusión. Para $\alpha = 0,1$ definimos $I^n_{i,\alpha} : [0,1]^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ por $I^n_{i,\alpha}(x^1,\ldots,x^{n-1}) = (x^1,\ldots,x^{i-1},\alpha,x^i,\ldots,x^{n-1})$.

$$\partial I^n = \sum_{\substack{i=1\\ \alpha=0,1}}^{n} (-1)^{i+\alpha} I^n_{i,\alpha}$$

Para c un n-cubo singular en M, definimos $c_{i,\alpha} = c \circ I^n_{i,\alpha}$ y

$$\partial c = \sum_{\substack{i=1\\ \alpha=0,1}}^{n} (-1)^{i+\alpha} c_{i,\alpha}$$

Proposición 3.12. *Si c es un cubo singular en M, $\partial(\partial c) = 0$.*

Demostración.

$$\partial(\partial c) = \sum_{i,\alpha} (-1)^{i+\alpha} \partial c_{i,\alpha},$$

$$\partial c_{i,\alpha} = \sum_{\substack{j=1\\ \beta=0,1}}^{n-1} (-1)^{j+\beta} c_{i,\alpha} \circ I^{n-1}_{j,\beta} = \sum_{\substack{j=1\\ \beta=0,1}}^{n-1} (-1)^{j+\beta} c \circ I^n_{i,\alpha} \circ I^{n-1}_{j,\beta}$$

Si $i \le j \le n-1$

$$\begin{aligned}
I^n_{i,\alpha} \circ I^{n-1}_{j,\beta}(x^1,\ldots,x^{n-2}) &= I^n_{i,\alpha}(x^1,\ldots,x^{j-1},\beta,x^j,\ldots,x^{n-2}) \\
&= (x^1,\ldots,x^{i-1},\alpha,x^i,\ldots,x^{j-1},\beta,x^j,\ldots,x^{n-2}) \\
I^n_{j+1,\beta} \circ I^{n-1}_{i,\alpha}(x^1,\ldots,x^{n-2}) &= I^n_{j+1,\beta}(x^1,\ldots,x^{i-1},\alpha,x^i,\ldots,x^{n-2}) \\
&= (x^1,\ldots,x^{i-1},\alpha,x^i,\ldots,x^{j-1},\beta,x^j,\ldots,x^{n-2}). \\
\partial(\partial c) &= \sum_{\substack{i \le j \le n-1\\ \alpha,\beta=0,1}} (-1)^{i+j+\alpha+\beta} c \circ I^n_{i,\alpha} \circ I^{n-1}_{j,\beta} \\
&\quad + \sum_{\substack{i \le j \le n-1\\ \alpha,\beta=0,1}} (-1)^{i+j+1+\alpha+\beta} c \circ I^n_{j+1,\beta} \circ I^{n-1}_{i,\alpha} = 0
\end{aligned}$$

Teorema 3.4. Stokes *Sean M una variedad diferenciable, c una k-cadena en M y ω una $k-1$ forma en M. Entonces*

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Demostración. (1). Sea ω una $k-1$ forma en $\mathbb{R}^k$ y $c = I^k$.

$$\begin{aligned} \omega &= f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \cdots \wedge dx^k \\ \partial I^k &= \sum_{\substack{j=1 \\ \alpha=0,1}}^{k} (-1)^{j+\alpha} I^k_{j,\alpha} \\ \int_{\partial I^k} \omega &= \sum_{\substack{j=1 \\ \alpha=0,1}}^{k} (-1)^{j+\alpha} \int_{[0,1]^{k-1}} I^{k*}_{j,\alpha}\omega \end{aligned}$$

$$I^{k*}_{j,\alpha}\omega = f \circ I^k_{j,\alpha}\ d(x^1 \circ I^k_{j,\alpha}) \wedge \cdots \wedge d(x^{i-1} \circ I^k_{j,\alpha}) \wedge d(x^{i+1} \circ I^k_{j,\alpha}) \wedge \cdots \wedge d(x^k \circ I^k_{j,\alpha})$$

$$x^l \circ I^k_{j,\alpha}(t^1, \ldots, t^{k-1}) = x^l(t^1, \ldots, \alpha, t^j, \ldots, t^{k-1}) = \begin{cases} t^l & l < j \\ \alpha & l = j \\ t^{l-1} & l > j \end{cases}$$

$$d(x^l \circ I^k_{j,\alpha}) = \begin{cases} dt^l & l < j \\ 0 & l = j \\ dt^{l-1} & l > j \end{cases}$$

$$I^{k*}_{j,\alpha}\omega = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ f \circ I^k_{j,\alpha}\ dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^{k-1} & j = i \end{cases}$$

$$\int\limits_{\partial I^k} \omega = \int\limits_{[0,1]^{k-1}} (-1)^i [f(t^1, \ldots, 0, t^j, \ldots, t^{k-1}) - f(t^1, \ldots, 1, t^j, \ldots, t^{k-1})] dt^1 \cdots dt^{k-1}$$

$$d\omega = (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$$

$$\int\limits_{I^k} d\omega = \int\limits_{[0,1]^k} (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \cdots dx^k$$

$$= \int\limits_{[0,1]^{k-1}} (-1)^i [f(x^1, \ldots, 0, x^j, \ldots, x^{k-1}) - f(x^1, \ldots, 1, x^j, \ldots, x^{k-1})] dx^1 \cdots dx^{k-1}.$$

(2) Sea ω una $k-1$ forma en M y c un k-cubo singular.

$$\begin{aligned} \int_c d\omega &= \int\limits_{[0,1]^k} c^*(d\omega) = \int\limits_{[0,1]^k} d(c^*\omega) = \int\limits_{\partial[0,1]^k} c^*\omega = \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha=0,1}}^{n} (-1)^{i+\alpha} \int\limits_{[0,1]^{k-1}} I^{k*}_{j,\alpha} c^*\omega \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha=0,1}}^{n} (-1)^{i+\alpha} \int\limits_{[0,1]^{k-1}} c^*_{j,\alpha}\omega = \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha=0,1}}^{n} (-1)^{i+\alpha} \int_{c_{j,\alpha}} \omega = \int_{\partial c} \omega. \end{aligned}$$

□

5. Integración en variedades

PROPOSICIÓN 3.13. *Sean* $c_1, c_2 : [0,1]^n \to M$, $\omega \in \Omega_c^n(M)$ *con* $\operatorname{soporte}\omega \subset c_1([0,1]^n) \cap c_1([0,1]^n)$ *y* $\det D(c_1^{-1} \circ c_2) \geq 0$. *Entonces*

$$\int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega.$$

Definimos $\int_M \omega = \int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega$.

Demostración.

$$\int_{c_2} \omega = \int_{[0,1]^n} c_2^* \omega = \int_{c_2^{-1}(\operatorname{soporte}\omega)} c_2^* \omega = \int_{c_2^{-1}(\operatorname{soporte}\omega)} (c_1^{-1} \circ c_2)^* c_1^* \omega = \int_{c_1^{-1}(\operatorname{soporte}\omega)} c_1^* \omega = \int_{c_1} \omega$$

□

DEFINICIÓN 3.10. Sea (M, μ) una n-variedad orientada. Sea $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ atlas tal que $[0,1]^n \subset \varphi_\alpha(U_\alpha)$ y φ_α preserva la orientación. Sea Φ una partición de la unidad subordinada a $\{U_\alpha\}$. Sea $\omega \in \Omega_c^n(M)$, entonces $\{\varphi \in \Phi : \operatorname{soporte}\varphi \cap \operatorname{soporte}\omega \neq \emptyset\}$ es finito. Definimos

$$\int_M \omega = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M \varphi\omega.$$

Sea Ψ otra partición de la unidad subordinada a una cubierta como antes, entonces

$$\sum_{\psi \in \Psi} \int_M \psi\omega = \sum_{\psi \in \Psi} \int_M \sum_{\varphi \in \Phi} \varphi\psi\omega = \sum_{\psi \in \Psi} \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M \varphi\psi\omega = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M \varphi\omega.$$

DEFINICIÓN 3.11. Sean M una n-variedad con frontera, $p \in \partial M$ y (U, ϕ) una carta con $\phi(p) = 0$. Decimos que un vector $v \in T_pM$ *apunta hacia afuera* si $\phi_{*p}(v) = (w_1, \ldots, w_n)$ con $w_n < 0$.

El concepto no depende de la carta ya que si (V, ψ) es otra carta con $\psi(p) = 0$, $\alpha(t) = t(w_1, \ldots, w_n)$ y $\beta(t) = \psi \circ \phi^{-1} \circ \alpha(t)$ entonces

$$\psi_{*p}(v) = (\psi \circ \phi^{-1})_{*p}(\phi_{*p}(v)) = \beta'(0) = \lim_{t \to 0^-} \frac{\beta(t)}{t}.$$

Como $\beta(t) \in \mathbb{H}^n$, $\beta_n'(0) \leq 0$, y ya que $\phi_{*p}(v) \notin \mathbb{R}^{n-1}$ y $(\psi \circ \phi^{-1})_{*p}$ es un isomorfismo, $\psi_{*p}(v) \notin \mathbb{R}^{n-1}$. Así $\beta_n'(0) < 0$. □

Si M tiene una orientación μ, definimos la orientación $\partial\mu$ en ∂M:

$$(v_2, \ldots, v_n) \in \partial\mu_p \iff (v, v_2, \ldots, v_n) \in \mu_p$$

para $v \in T_pM$ apuntando hacia afuera.

Supongamos que el cubo $c : [0,1]^n \to M$ preserva la orientación y $c_{n,0}([0,1]^{n-1}) \subset \partial M$. Sea ω una $n-1$ - forma en M con soporte $\omega \subset c([0,1]^n)$, entonces $\omega = 0$ en $c_{k,\alpha}([0,1]^{n-1})$ para $(k,\alpha) \neq (n,0)$. Así

$$\int_{\partial M} \omega = (-1)^n \int_{[0,1]^{n-1}} c_{n,0}^* \omega = (-1)^n \int_{c_{n,0}} \omega = \int_{\partial c} \omega.$$

TEOREMA 3.5. Stokes *Sean M n-variedad con frontera y $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$. Entonces*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Demostración. Sea Φ una partición de la unidad tal que $\forall \varphi \in \Phi$ hay una carta (U,ψ) que preserva orientación con $[0,1]^n \subset \psi(U)$, soporte $\varphi \subset \psi^{-1}([0,1]^n)$. Denotaremos $c_\psi = \psi^{-1}|_{[0,1]^n}$.

- Si $\psi^{-1}([0,1]^n) \subset int(M) \neq \emptyset$,
$$\int_M d(\varphi\omega) = \int_{c_\psi} d(\varphi\omega) = \int_{\partial c_\psi} \varphi\omega = 0 = \int_{\partial M} \varphi\omega.$$
- Si $\psi^{-1}([0,1]^n) \cap \partial M$,
$$\int_M d(\varphi\omega) = \int_{c_\psi} d(\varphi\omega) = \int_{\partial c_\psi} \varphi\omega = \int_{\partial M} \varphi\omega.$$

Como Φ es una particion de la unidad,

$$\sum_{\varphi\in\Phi} d\varphi = 0, \sum_{\varphi\in\Phi} d(\varphi\omega) = \sum_{\varphi\in\Phi} \varphi d\omega,$$

$$\int_M d\omega = \sum_{\varphi\in\Phi} \int_M \varphi d\omega = \sum_{\varphi\in\Phi} \int_M d(\varphi\omega) = \sum_{\varphi\in\Phi} \int_{\partial M} \varphi\omega) \int_{\partial M} \omega.$$

□

Sea M una n-variedad orientable conexa y sin frontera. Sabemos que

$$H^k(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ 0 & k > 0, M \text{ contraíble} \end{cases} \tag{3.1}$$

$$H_c^0(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & M \text{ compacta} \\ 0 & M \text{ no compacta} \end{cases} \tag{3.2}$$

Queremos calcular $H^n(M)$ y $H_c^n(M)$.

OBSERVACIONES 3.4.

$$\eta \in \Omega_c^{n-1}(M) \Rightarrow \int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta = 0.$$

Así, si $\omega \in \Omega_c^n(M)$ y $\int_M \omega \neq 0$, se tiene $\omega \neq d\eta$ y entonces $H_c^n(M) \neq 0$.

Consideremos la esfera $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Definamos $\sigma' \in \Omega^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ por

$$\sigma'_p(v_1, \dots, v_{n-1}) = \det(p, v_1, \dots, v_{n-1}).$$

Es claro que si definimos

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} z_i dz^1 \wedge \cdots \wedge \hat{dz_i} \wedge \cdots \wedge dz_n$$

e $i : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ es la inclusión, entonces $\sigma' = i^*(\sigma)$. Sea $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$, $r(z) = z/|z|$, entonces $(r^*\sigma')_z = \sigma_z |z|^{-n}$. Consideremos el cambio de variable $\phi : B - \{0\} \to \mathbb{S}^{n-1} \times (0, 1]$, $\phi(z) = (r(z), |z|)$. Sean π, t las proyecciones de $\mathbb{S}^{n-1} \times (0, 1]$ sobre sus factores. Cualquier $\omega \in \Omega^n(\mathbb{S}^{n-1} \times (0, 1])$ se escribe $\omega = h\pi^*\sigma' \wedge dt$ con $h \in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times (0, 1])$. Entonces

$$\begin{aligned}
\phi^*\omega &= (h \circ \phi)\phi^*\pi^*(\sigma') \wedge d(t \circ \phi) = (h \circ \phi) r^*(\sigma') \wedge d|z| \\
&= (h \circ \phi) \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{z_i}{|z|^n} dz_1 \wedge \cdots \wedge \hat{dz_i} \wedge \cdots \wedge dz_n \sum_{i=1}^{n} z_i dz_i \\
&= (h \circ \phi) \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-1} \frac{(z_i)^2}{|z|^n} dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \\
&= (h \circ \phi) \Big(\frac{-1}{|z|}\Big)^{n-1} dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n
\end{aligned}$$

Dada $f : B \to \mathbb{R}$ queremos h tal que $h(\phi(z)) = (-|z|)^{n-1} f(z)$. Sea $h(p, t) = (-t)^{n-1} f(tp)$, entonces
(3.3)

$$\int_B f = \int_B \phi^*(h\pi^*\sigma' \wedge dt) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}\times(0,1]} h \quad \pi^*\sigma' \wedge dt = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (\int_0^1 t^{n-1} f(tp) dt)\sigma'.$$

Teorema 3.6. *Sea M una n-variedad orientable conexa y sin frontera. Entonces la funcional lineal $\int : H^n_c(M) \to \mathbb{R}$, $[\omega] \mapsto \int_M \omega$ es un isomorfismo.*

Sólo hace falta ver que $\int : H^n_c(M) \to \mathbb{R}$ es inyectiva, es decir

$$\int_M \omega = 0 \Rightarrow \exists \eta \in \Omega^{n-1}_c(M) \ t.q. \ \omega = d\eta.$$

Demostración. Por inducción. Seguiremos los siguientes pasos
(1) La Proposición es cierta para $M = \mathbb{R}$
(2) Si la Proposición es cierta para toda $n - 1$ variedad, entonces es cierta para $\mathbb{R}^n$
(3) Si la Proposición es cierta para $\mathbb{R}^n$, entonces es cierta para para toda n variedad.

(1). Si $\omega \in \Omega^1_c(\mathbb{R})$, entonces $\omega = df$ con

$$f(x) = \begin{cases} c_- & x \leq -N \\ c_+ & x \geq N \end{cases}.$$

$$\int_{\mathbb{R}} \omega = 0 \Rightarrow 0 = \int_{-N}^{N} df = c_+ - c_- \Rightarrow f - c_+ \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \omega = d(f - c_+).$$

(2). Sea $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ con soporte en la bola unitaria B y $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$. Sea $F : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $F(z,t) = tz$. En el lema de Poincaré definimos $I : \Omega^n(\mathbb{R}^n \times [0,1]) \to \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\omega = -d(I(F^*\omega))$. Escribiendo

$$\begin{aligned} \omega &= f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, \\ F^*\omega &= (f \circ F) d(tz_1) \wedge \cdots \wedge d(tz_n) \\ &= (f \circ F)(z_1 dt + t dz_1) \wedge \cdots \wedge (z_n dt + t dz_n) \\ &= (f \circ F)(t^n dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n + t^{n-1} dt \wedge \sigma), \\ I(F^*\omega) &= \int_0^1 t^{n-1} f(tz) dt \, \sigma \end{aligned}$$

Para $z \neq 0$ fija hagamos el cambio de variable $u = |z|dt$, entonces

$$\eta := I(F^*\omega) = \int_0^{|z|} \frac{u^{n-1}}{|z|^n} f(ur(z)) du \, \sigma = \int_0^1 u^{n-1} f(ur(z)) du \, \frac{\sigma}{|z|^n}$$

ya que $f(z) = 0$ si $|z| > 1$.

Sea $g : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ definida por $g(p) = \int_0^1 t^{n-1} f(tp) dt$, entonces $\eta = (g \circ r) r^* \sigma' = r^*(g\sigma')$. Por (3.3)

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} g\sigma' = \int_B f = \int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0.$$

Por hipótesis de inducción, $\int : H_c^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \to \mathbb{R}$ es un inyectiva y así $g\sigma' = d\lambda$. Luego $\eta = r^*(g\sigma') = d(r^*\lambda)$. Sea $h : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ suave con $h = 0$ en una vecindad del origen $h = 1$ fuera de B. Entonces $\xi = \eta - d(hr^*\lambda)$ tiene soporte en B y $d\xi = d\eta = \omega$.

(3). Sea M una n-variedad orientable conexa y sin frontera. Sea U vecindad difeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Sea $\eta \in \Omega^n_c(M)$ con soporte en U tal que $\int_M \eta > 0$. Por demostrar que $\forall \omega \in \Omega^n_c(M)$ existen $c \in \mathbb{R}, \beta \in \Omega^{n-1}_c(M)$ tal que $\omega = c\eta + d\beta$. Sea Φ una partción de la unidad subordinada a un atlas. Como $\{\phi \in \Phi : \text{soporte}\, \phi \cap \text{soporte}\, \omega \neq \emptyset\}$ es finito,

$$\omega = \phi_1 \omega + \cdots + \phi_k \omega, \; \phi_i \in \Phi.$$

Demostrando que $\phi_i \omega = c_i \eta + d\beta_i$, habremos concluido la demostación. Así, hemos reucido (3) a demostrar que si ω tiene soporte en una vecindad V difeomorfa a $\mathbb{R}^n$, entonces $\omega = c\eta + d\alpha$, $\alpha \in \Omega^{n-1}_c(M)$.

Sean $U_1 = U, U_2, \ldots, U_l = V$ vecindades difeomorfas a $\mathbb{R}^n$ con $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$. Escojamos $\omega_i \in \Omega_c(M)$ con soporte en $U_i \cap U_{i+1}$ e $\int_M \omega_i \neq 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= c_1\eta + d\alpha_1, \ \text{soporte}\,\alpha_1 \subset U, \\
\omega_i &= c_i\omega_{i-1} + d\alpha_i, \ \text{soporte}\,\alpha_i \subset U_i, \\
\omega &= c_l\omega_{l-1} + d\alpha_l = \cdots = c_l \cdots c_1\eta + d\alpha_l + \cdots + c_l \ldots c_{l-2} d\alpha_1.
\end{aligned}$$

□

TEOREMA 3.7. *Sea M una n-variedad conexa, no orientable y sin frontera. Entonces $H_c^n(M) = 0$.*

Demostración.

TEOREMA 3.8. *Sea M una n-variedad conexa y no compacta. Entonces $H^n(M) = 0$.*

Demostración. Sea $\omega \in \Omega_c^n(M)$ con soporte en una vecindad coordenada U con cerradura compacta. Hay una sucesión $\{U_i\}$ de vecindades coordenadas con cerradura compacta tales que $U_1 = U, U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ y para cualquier compacto K existe $n(K)$ tal que $U_i \cap K = \emptyset$ si $i > n(K)$.

Escojamos $\omega_i \in \Omega_c(M)$ con soporte en $U_i \cap U_{i+1}$ e $\int_M \omega_i \neq 0$. Entonces existen $c_i \in \mathbb{R}$ η_i con soporte $\eta_i \subset U_i$ tales que

$$\begin{aligned}
\omega &= d\eta_1 + c_1\omega_1 \\
\omega_i &= d\eta_{i+1} + c_{i+1}\omega_{i+1} \\
\omega &= d\eta_1 + c_1 d\eta_2 + c_1c_2\omega_2 \\
& \ldots \\
\omega &= d\eta_1 + \cdots + c_1 \cdots c_{l-1} d\eta_l + c_1 \cdots c_l\omega_l
\end{aligned}$$

CAPíTULO 4

Curvatura

1. Curvatura

DEFINICIÓN 4.1. Sea ∇ una conexión del haz vectorial $\pi : E \to M$. Extendemos la definicion a $\nabla^r : \Omega^r(M) \otimes \Gamma(E) \to \Omega^{r+1}(M) \otimes \Gamma(E)$ mediante $\nabla^r(\omega \otimes s) = d\omega \otimes s + (-1)^r \omega \wedge \nabla s$

Definimos la *curvatura* de la conexión como $\mathbf{\Omega} = \nabla^1 \circ \nabla$.

OBSERVACIONES 4.1. Sean $\omega \in \Omega^1(M), s \in \Gamma(E)$, entonces

$$\begin{aligned}\nabla^1(\omega \otimes s)(X, Y) &= d\omega(X, Y)s - \omega \wedge \nabla s(X, Y)\\ &= (X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]))s - \omega(X)\nabla_Y s + \omega(Y)\nabla_X s\\ &= \nabla_X(\omega(Y)s) - \nabla_Y(\omega(X)s) - \omega([X, Y]))s\end{aligned}$$

Así

$$(\mathbf{\Omega} s)(X, Y) = \nabla^1(\nabla s)(X, Y) = \nabla_X(\nabla_Y s) - \nabla_Y(\nabla_X s) - \nabla_{[X,Y]}s. \tag{4.1}$$

Si $f \in C^\infty(M)$, entonces

$$\mathbf{\Omega}(fs) = \nabla^1(f\nabla s + df \otimes s) = df \wedge \nabla s + f\mathbf{\Omega} s + ddf \otimes s - df \wedge \nabla s = f\mathbf{\Omega} s.$$

Sea ω la matriz de la conexión en la base local $\{s_1, \dots, s_n\} \subset \Gamma(E)$.

$$\begin{aligned}\mathbf{\Omega} s_i &= \sum_{j=1}^n \nabla^1(\omega_{ij} \otimes s_j) = \sum_{j=1}^n d\omega_{ij} \otimes s_j - \omega_{ij} \wedge \nabla s_j\\ &= \sum_{k=1}^n (d\omega_{ik} - \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \wedge \omega_{jk}) \otimes s_k.\end{aligned}$$

Así, la matriz de $\mathbf{\Omega}$ en la base local es $\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$.

Si la conexión es compatible con una métrica $\langle , \rangle$ en E y $\{s_1, \dots, s_n\}$ es una base local ortonormal, ω es antisimétrica y por consiguiente Ω también. Luego

$$\langle (\mathbf{\Omega} s_i)(X, Y), s_k\rangle = \Omega_{ik}(X, Y) = -\langle s_i, (\mathbf{\Omega} s_k)(X, Y)\rangle.$$

Como $\mathbf{\Omega}$ es $C^\infty(M)$ lineal, para todo $r, s \in \Gamma(E)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$\langle (\mathbf{\Omega} r)(X, Y), s\rangle + \langle r, (\mathbf{\Omega} s)(X, Y)\rangle = 0. \tag{4.2}$$

Teorema 4.1. . *Sea ∇ la conexión de Levi-Civita de una métrica riemanniana en M. Sean $\{X_1, \ldots, X_n\}$ base ortonornal local de TM y $\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ la base local dual. Entonces*

- *Ecuaciones de estructura.* $d\theta = \omega \wedge \theta$, $d\omega = \Omega + \omega \wedge \omega$.
- *Primera identidad de Bianchi.* $\Omega \wedge \theta = 0$
- *Segunda identidad de Bianchi.* $d\Omega + \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega = 0$

Demostración.

$$\begin{aligned} d\theta_i(X,Y) &= X(\theta_i(Y)) - Y(\theta_i(X)) - \theta_i([X,Y]) \\ &= X\langle X_i, Y\rangle Y - Y\langle X_i, X\rangle - \langle X_i, [X,Y]\rangle \\ &= \langle \nabla_X X_i, Y\rangle - \langle \nabla_Y X_i, X\rangle + \langle X_i, \nabla_X Y - \nabla_Y X\rangle - \langle X_i, [X,Y]\rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(X)\langle X_j, Y\rangle - \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(Y)\langle X_j, x\rangle = \sum_{j=1}^n (\omega_{ij} \wedge \theta_j)(X,Y), \end{aligned}$$

$$d\theta_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \wedge \theta_j.$$

Entonces

$$0 = d(d\theta) = (d\omega) \wedge \theta - \omega \wedge d\theta = (d\omega - \omega \wedge \omega) \wedge \theta = \Omega \wedge \theta.$$

Similarmente

$$\begin{aligned} 0 = d(d\omega) &= d(\Omega + \omega \wedge \omega) = d\Omega + (d\omega) \wedge \omega - \omega \wedge d\omega \\ &= d\Omega + (\Omega + \omega \wedge \omega) \wedge \omega - \omega \wedge (\Omega + \omega \wedge \omega) \\ &= d\Omega + \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega \end{aligned}$$

Definición 4.2. Si $\langle , \rangle$ es una métrica riemanniana en M y ∇ es la conexión de Levi-Civita, se acostumbra denotar $(\mathbf{\Omega} Z)(X,Y) = R_{XY}Z$ y se define el tensor de Riemann $R \in \Gamma(T^4(M))$ por

$$R(X,Y,Z,W) = \langle R_{XY}Z, W\rangle.$$

La conexión de Levi-Civita se extiende a $\nabla : \Gamma(T^r(M)) \to \Gamma(T^{r+1}(M))$,

$$\nabla S(Z, X_1, \ldots, X_r) = Z(S(X_1, \ldots, X_r)) - \sum_{i=1}^r S(X_1, \ldots, \nabla_Z X_i, \ldots, X_r)$$

Proposición 4.1. *El tensor de Riemann tiene las propiedades*

(1) $R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W)$
(2) $R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z)$
(3) $R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y = 0$
(4) $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$
(5) $\nabla R(X,Y,Z,\cdot,\cdot) + \nabla R(Y,Z,X,\cdot,\cdot) + \nabla R(Z,X,Y,\cdot,\cdot) = 0$

Demostración. (1) se sigue de la definición. (2) se sigue de (4.2). (3). Sean $\{X_1, \ldots, X_n\}$ base local ortonormal de TM y $\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ la base local dual de T^*M. Por la primera identidad de Bianchi, para $k = 1, \ldots, n$ se tiene

$$\begin{aligned}
&\langle (\mathbf{\Omega} Z)(X,Y) + (\mathbf{\Omega} X)(Y,Z) + (\mathbf{\Omega} Y)(Z,X), X_k \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Omega_{ik}(X,Y)\theta_i(Z) + \sum_{i=1}^{n} \Omega_{ik}(Y,Z)\theta_i(X) + \sum_{i=1}^{n} \Omega_{ik}(Z,X)\theta_i(X) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = \sum_{i=1}^{n} (\Omega_{ik} \wedge \theta_i)(X,Y,Z) = 0
\end{aligned}$$

(4). Se sigue de (1), (2) y (3) que

$$\begin{aligned}
&(4.3) \quad & R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W) &= 0 \\
&(4.4) \quad & R(X,Y,Z,W) + R(Y,W,Z,X) + R(X,W,Y,Z) &= 0 \\
&(4.5) \quad & R(Y,Z,X,W) + R(Y,W,Z,X) + R(Z,W,X,Y) &= 0 \\
&(4.6) \quad & R(Z,W,X,Y) + R(Z,X,Y,W) + R(X,W,Y,Z) &= 0
\end{aligned}$$

Sumando (4.3),(4.4) y restando (4.5) y (4.6) obtenemos (4).

(5). De la segunda identidad de Bianchi

$$(4.7) \qquad d\Omega_{ij}(X,Y,Z) + \sum_k (\Omega_{ik} \wedge \omega_{kj} - \omega_{ik} \wedge \Omega_{kj})(X,Y,Z) = 0$$

Por el Teorema 3.3

$$\begin{aligned}
d\Omega_{ij}(X,Y,Z) &= X(\Omega_{ij}(Y,Z)) + Y(\Omega_{ij}(Z,X)) + Y(\Omega_{ij}(Z,X)) \\
&- \Omega_{ij}([X,Y],Z) - \Omega_{ij}([Y,Z],X) - \Omega_{ij}([Z,X],Y)
\end{aligned}$$

Como $\Omega_{ij}(\cdot,\cdot) = R(\cdot,\cdot,X_i,X_j)$,

$$\begin{aligned}
X(\Omega_{ij}(Y,Z)) &= \nabla R(X,Y,Z,X_i,X_j) + \Omega_{ij}(\nabla_X Y, Z) + \Omega_{ij}(Y, \nabla_X Z) \\
&+ \sum_k \omega_{ik}(X)\Omega_{kj}(Y,Z) + \sum_k \omega_{jk}(X)\Omega_{ik}(Y,Z)
\end{aligned}$$

Puesto que $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$, tenemos

$$\begin{aligned}
&d\Omega_{ij}(X,Y,Z) = \sum_k (\omega_{ik} \wedge \Omega_{kj} + \omega_{jk} \wedge \Omega_{ik})(X,Y,Z) \\
&+ \nabla R(X,Y,Z,X_i,X_j) + \nabla R(Y,Z,X,X_i,X_j) + \nabla R(Z,X,Y,X_i,X_j).
\end{aligned}$$

Comparando con (4.7) obtenemos (5).

Ejemplo 4.1. Sean G un grupo de Lie y $\langle , \rangle$ una métrica riemanniana invariante por la izquierda. Sea ∇ la conexión del Ejemplo 2.9. Por la identidad de Jacobi

$$R_{XY}Z = \frac{1}{4}[X,[Y,Z]] - \frac{1}{4}[Y,[X,Z]] - \frac{1}{2}[[X,Y],Z] = -\frac{1}{4}[[X,Y],Z]$$

Definición 4.3. Sea $\langle , \rangle$ una métrica riemanniana en M y sea ∇ la conexión de Levi-Civita.

- Para $f \in C^\infty(M)$ definimos el campo *gradiente* de f por
$$\langle \operatorname{grad} f, X\rangle = df(X) = X(f).$$
- Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ entonces $\nabla X \in \Gamma(T_1^1(M)) = \Gamma(\hom(TM,TM))$. Definimos la *divergencia* de X por
$$\operatorname{div} X = c(\nabla X) = \operatorname{Tr} \nabla X.$$
- Definimos el *hessiano* de f por
$$H^f = \nabla(df)$$
- Definimos el *laplaciano* de f como
$$\triangle f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \operatorname{Tr} \nabla(\operatorname{grad} f)$$

Observaciones 4.2. Sea $X_1, \dots, X_n$ una base local ortonormal de TM, entonces

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{X_i} X, X_i\rangle.$$

$$\begin{aligned}
H^f(X,Y) &= X(df(Y)) - df(\nabla_X Y) = X(Y(f)) - \nabla_X Y(f)\\
&= Y(X(f)) - \nabla_Y X(f) = H^f(Y,X)\\
H^f(X,Y) &= X\langle \operatorname{grad} f, Y\rangle - \langle \operatorname{grad} f, \nabla_X Y\rangle = \langle \nabla_X(\operatorname{grad} f), Y\rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto H^f es simétrico y

$$\triangle f = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{X_i} \operatorname{grad} f, X_i\rangle = \sum_{i=1}^n H(X_i, X_i).$$

Definición 4.4. Para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ consideremos $Q(X,Y) \in \Gamma(\hom(TM,TM))$ dado por $Q(X,Y)(Z) = R_{XZ}Y$. Definimos la curvatura de Ricci $Ric \in \Gamma(T^2(M))$ como $Ric(X,Y) = \operatorname{Tr} Q(X,Y)$.

$$Ric(X,Y) = \sum_{j=1}^n \langle R_{XX_j}Y, X_j\rangle = \sum_{j=1}^n R(X, X_j, Y, X_j).$$

Hay un isomorfismo entre $\Gamma(T^2(M))$ y $\Gamma(\hom(TM,TM))$ dado por

$$T(X,Y) = \langle \mathbf{T}(X), Y\rangle.$$

A la métrica $\langle , \rangle$ le corresponde la identidad I. A *Ric* le corresponde un **Ric** simétrico.

Definimos la *curvatura escalar* S y el *tensor de Eintein* G por

$$S = \operatorname{Tr}\mathbf{Ric},\ G = Ric - \frac{1}{2}S\langle , \rangle$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} Ric(X_i, X_i) = \sum_{i,j=1}^{n} R(X_i, X_j, X_i, X_j).$$

Si $\mathbf{T} \in \Gamma(\hom(TM, TM)), Y \in \mathfrak{X}(M)$, $(\nabla\mathbf{T})(Y) \in \Gamma(\hom(TM, TM))$ esta dado por

$$(\nabla\mathbf{T}(Y))(X) = (\nabla_X\mathbf{T})(Y) := \nabla_X(\mathbf{T}(Y)) - \mathbf{T}(\nabla_X Y)$$

y $\operatorname{div} T \in \Omega^1(M)$ por $(\operatorname{div} T)(Y) = \operatorname{Tr}((\nabla\mathbf{T})(Y))$. Así

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div} T)(Y) &= \sum_{i=1}^{n} \langle (\nabla_{X_i}\mathbf{T}(Y), X_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{X_i}(\mathbf{T}(Y)) - \mathbf{T}(\nabla_{X_i}Y), X_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} X_i(T(Y, X_i)) - T(Y, \nabla_{X_i}X_i) - T(\nabla_{X_i}Y, X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \nabla T(X_i, Y, X_i)
\end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 4.2. *$dS = 2\operatorname{div} Ric$ y si $\dim M = 4$, $\operatorname{div} G = 0$.*

Demostración. Sea $p \in M$ y sea $X_1, \ldots, X_n$ marco geodésico en p (ejercicio 20)

$$
\begin{aligned}
Ric(X,Y) &= \sum_{i=1}^{n} R(X, X_i, Y, X_i) \\
\nabla Ric(Z,X,Y) &= Z(Ric(X,Y)) - Ric(\nabla_Z X, Y) - Ric(X, \nabla_Z Y) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \nabla R(Z, X, X_i, Y, X_i) + R(X, \nabla_Z X_i, Y, X_i) \\
&+ \sum_{i=1}^{n} R(X, X_i, Y, \nabla_Z X_i) \\
\nabla Ric(Z,X,Y)(p) &= \sum_{i=1}^{n} \nabla R(Z, X, X_i, Y, X_i)(p) \\
\operatorname{div} Ric(X)(p) &= \sum_{i,j=1}^{n} \nabla R(X_j, X, X_i, X_j, X_i)(p) \\
dS(X) &= \sum_{i,j=1}^{n} \nabla R(X, X_i, X_j, X_i, X_j) \\
&+ 2 \sum_{i,j=1}^{n} R(\nabla_X X_i, X_j, X_i, X_j) + R(X_i, \nabla_X X_j, X_i, X_j)
\end{aligned}
$$

Por (5) de la Proposición 4.1

$$
\begin{aligned}
-\nabla R(X, X_i, X_j, X_j, X_i) &= \nabla R(X_i, X_j, X, X_j, X_i) + \nabla R(X_j, X, X_i, X_j, X_i) \\
\nabla R(X, X_i, X_j, X_i, X_j) &= 2 \sum_{i,j=1}^{n} \nabla R(X_j, X, X_i, X_j, X_i) \\
dS(X)(p) &= 2 \sum_{i,j=1}^{n} \nabla R(X_j, X, X_i, X_j, X_i)(p) \\
&= \operatorname{div} Ric(X)(p)
\end{aligned}
$$

□

2. Campos de Jacobi. Puntos conjugados

PROPOSICIÓN 4.3. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to M$ diferenciable. Sea V un campo vectorial a lo largo de f. Entonces*

$$\frac{D}{\partial s}\frac{DV}{\partial t} - \frac{D}{\partial t}\frac{DV}{\partial s} = R_{\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}} V$$

Demostración. En una carta coordenada (U,φ)

$$\phi\circ f=(f_1,\ldots,f_n),\quad V=\sum_j V_j\partial_j$$

$$\begin{aligned}
\frac{DV}{\partial t} &= \sum_{j=1}^n\Big(\frac{\partial V_j}{\partial t}+\sum_{i=1}^n V_i\omega_{ij}(\frac{\partial f}{\partial t})\Big)\partial_j\\
\frac{D}{\partial s}\frac{DV}{\partial t} &= \sum_{k=1}^n\Big[\frac{\partial^2 V_k}{\partial s\partial t}+\sum_{i=1}^n\frac{\partial V_i}{\partial s}\omega_{ik}(\frac{\partial f}{\partial t})+V_i\frac{\partial}{\partial s}(\omega_{ik}(\frac{\partial f}{\partial t}))\\
&+ \sum_{j=1}^n\Big(\frac{\partial V_j}{\partial t}+\sum_{i=1}^n V_i\omega_{ij}(\frac{\partial f}{\partial t})\Big)\omega_{jk}(\frac{\partial f}{\partial s})\Big]\partial_k.\\
\frac{D}{\partial t}\frac{DV}{\partial s} &= \sum_{k=1}^n\Big[\frac{\partial^2 V_k}{\partial t\partial s}+\sum_{i=1}^n\frac{\partial V_i}{\partial t}\omega_{ik}(\frac{\partial f}{\partial s})+V_i\frac{\partial}{\partial t}(\omega_{ik}(\frac{\partial f}{\partial s}))\\
&+ \sum_{j=1}^n\Big(\frac{\partial V_j}{\partial s}+\sum_{i=1}^n V_i\omega_{ij}(\frac{\partial f}{\partial t})\Big)\omega_{jk}(\frac{\partial f}{\partial s})\Big]\partial_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}V-\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s} &= \sum_{i,k=1}^n\Big(\frac{\partial}{\partial s}(\omega_{ik}(\frac{\partial f}{\partial t}))-\frac{\partial}{\partial t}(\omega_{ik}(\frac{\partial f}{\partial s}))\\
&+ \sum_{j=1}^n\omega_{ij}(\frac{\partial f}{\partial t})\omega_{jk}(\frac{\partial f}{\partial s})-\omega_{ij}(\frac{\partial f}{\partial t})\omega_{jk}(\frac{\partial f}{\partial s})\Big)V_i\partial_k
\end{aligned}$$

Para $\omega=\sum_i a_i dx^i$ tenemos $\omega(\frac{\partial f}{\partial t})=\sum_i a_i\frac{\partial f_i}{\partial t}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\omega(\frac{\partial f}{\partial t}) &= \sum_i\frac{\partial a_i}{\partial x^j}\frac{\partial f_j}{\partial s}\frac{\partial f_i}{\partial t}+a_i\frac{\partial^2 f_i}{\partial s\partial t}\\
\frac{\partial}{\partial s}\omega(\frac{\partial f}{\partial t})-\frac{\partial}{\partial t}\omega(\frac{\partial f}{\partial s}) &= \sum_i(\frac{\partial a_i}{\partial x^j}-\frac{\partial a_j}{\partial x^i})\frac{\partial f_j}{\partial s}\frac{\partial f_i}{\partial t}=d\omega(\frac{\partial f}{\partial s},\frac{\partial f}{\partial t})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{D}{\partial s}\frac{DV}{\partial t}-\frac{D}{\partial t}\frac{DV}{\partial s} &= \sum_{i,k=1}^n\Big(d\omega_{ik}-\sum_{j=1}^n\omega_{ij}\wedge\omega_{jk}\Big)(\frac{\partial f}{\partial s},\frac{\partial f}{\partial t})V_i\partial_k\\
&= \sum_{i,k=1}^n\Omega_{ik}(\frac{\partial f}{\partial s},\frac{\partial f}{\partial t})V_i\partial_k\\
&= R_{\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}}V
\end{aligned}$$

□

Corolario 4.2. *Sean $p \in M$, $f(t,s) = \exp_p(tu(s))$. El campo vectorial $J(t) = \dfrac{\partial f}{\partial s}(t,0)$ definido a lo largo de $\gamma(t) = f(t,0)$ satisface la ecuación diferencial de Jacobi*

$$\frac{D^2 J}{dt^2}(t) + R_{J(t)\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0 \tag{4.8}$$

Demostración. Para s fija la curva $t \mapsto f(t,s)$ es una geodésica, por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 = \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t} + R_{\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s} + R_{\frac{\partial f}{\partial s},\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned}$$

Evaluando en $s = 0$ obtenemos (4.8). □

Definición 4.5. Un campo vectorial J a lo largo de la geodésica $\gamma : [0,a] \to M$ se llama campo de Jacobi si satisface (4.8).

Proposición 4.4. *Sea J un campo de Jacobi a lo largo de la geodésica $\gamma : [0,a] \to M$ con $J(0) = 0$. Entonces hay una curva $u(\varepsilon,\varepsilon) \to T_pM$, $p = \gamma(0)$ tal que si definimos $f(t,s) = \exp_p(tu(s))$, entonces*

$$J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t,0)$$

Demostración. Sea $v = \gamma'(0)$ y sea $u(\varepsilon,\varepsilon) \to T_pM$ tal que $u(0) = v$ y $u'(0) = \dfrac{DJ}{dt}(0)$. Si $f(t,s) = \exp_p(tu(s))$ entonces

$$Y(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t,0) = (\exp_p)_{*tv}(tu'(0))$$

es un campo de Jacobi con $Y(0) = 0$. Como

$$\begin{aligned} \frac{DY}{dt} &= \frac{D}{dt} * t(\exp_p)_{*tv}u'(0)) \\ &= t\frac{D}{dt}(\exp_p)_{*tp}(u'(0)) + (\exp_p)_{*tp}(u'(0)) \\ \frac{DY}{dt}(0) &= (\exp_p)_{*0}(u'(0)) = u'(0) = \frac{DJ}{dt}(0) \end{aligned}$$

Por el teorema de existencia y unicidad 2.2 $J(t) = Y(t)$.

Definición 4.6. Sea $\gamma : [0,a] \to M$ una geodésica. El punto $\gamma(T)$ $(0 < T \leq a)$ es conjugado a $\gamma(0)$ a lo largo de γ, si existe un campo de Jacobi J no nulo a lo largo de γ tal que $J(0) = 0 = J(T)$. El número máximo de tales campos linealmente independientes es la **multiplicidad** del punto conjugado $\gamma(T)$.

□

COROLARIO 4.3. *Sea* $\gamma : [0, a] \to M$ *una geodésica. El punto* $\gamma(T)$ *es conjugado a* $\gamma(0)$ *a lo largo de* γ *si y sólo si* $Tv = T\gamma'(0)$*, es un punto crítico de* $\exp_p$*. Más aún, la multiplicidad del punto conjugado* $\gamma(T)$ *es igual a* $\dim \ker(\exp_p)_{*Tv}$*.*

Demostración. Por la Proposición 4.4, cualquier campo de Jacobi J a lo largo de γ con $J(0) = 0$ se escribe $J(t) = (\exp_p)_{*tv}(tw)$, $w = \dfrac{DJ}{dt}(0)$. Por el Teorema de existencia y unicidad 2.2, J no es nulo si y sólo si $w \neq 0$. Por lo tanto $\gamma(T)$ es conjugado a $\gamma(0)$ si y sólo si $\exists w \in T_pM \setminus 0$ tal que

$$(\exp_p)_{*Tv}(Tw) = 0.$$

Otra vez por el Teorema 2.2 los campos de Jacobi $J_1, \ldots, J_k$ con $J_i(0) = 0$ son linealmente independientes si y sólo si

$$\frac{DJ_1}{dt}(0), \ldots, \frac{DJ_k}{dt}(0)$$

son linealmente independientes. □

3. La primera y segunda variaciones de la acción

DEFINICIÓN 4.7. Una trayectoria diferenciable por tramos que une a los puntos p y q, es una función continua $\gamma : [0, T] \to M$ tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma(T) = q$ y existe una partición de $[0, T]$ de la forma

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T$$

de tal manera que $\gamma|[t_{i-1}, t_i]$ es diferenciable de clase C^∞.

El conjunto formado por estas trayectorias (que unen a p y q en M) se denotará por $\Omega(M; p, q)$.

El espacio tangente a $\Omega(M; p, q)$ en la trayectoria γ, es el espacio vectorial que esta formado por todos los campos vectoriales W a lo largo de γ, diferenciables por tramos, para los cuales $W(0) = 0$ y $W(T) = 0$.

DEFINICIÓN 4.8. Considere una trayectoria $\gamma \in \Omega(M; p, q)$. Una variación de γ es una función continua

$$F : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Omega(M; p, q)$$

para alguna $\varepsilon > 0$, que satisface lo siguiente:

(1) $F(0) = \gamma$.
(2) Existe una partición de $[0, T]$, con $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T$, de tal manera que la función

$$f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, T] \to M$$

definida por $f(u,t) = F(u) \cdot t$ es C^∞ al restringirla a cada $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_{i-1}, t_i]$, con $i = 1, \ldots, k$.

Dado que cada $F(u)$ pertenece a $\Omega(M; p, q)$, se tiene que $f(u, 0) = p$ y $f(u, T) = q$ para todo $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Observaciones 4.3.

(1) Para referirnos a la variación usaremos f ó F indistintamente. Algunas veces en vez de tomar $(-\varepsilon, \varepsilon)$ se toma una vecindad U de $\mathbb{R}^s$ con centro en 0 y en tal caso f sera llamada variación a s parámetros de γ.

(2) Si f es diferenciable entonces diremos que la variación es diferenciable.

Para t fija, consideremos la curva diferenciable $f_t : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ dada por $f_t(u) = f(u, t)$. El vector velocidad de esta curva transversal en $u = 0$ es

$$W(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(0, t).$$

El campo vectorial $W \in T_\gamma \Omega$ es el campo tangente a la variación f.

Observación 4.4. Dado cualquier campo W diferenciable por tramos, a lo largo de γ la función $f(u,t) = \exp_{\gamma(t)}(uW(t))$ define una variación de γ cuyo campo tangente es $W(t)$.

Consideremos el funcional de Acción

$$E : \Omega(M; p, q) \to \mathbb{R}$$

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^T \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle dt. \tag{4.9}$$

Lema 4.1. *Sean $p, q \in M$ y sea $\gamma : [0, T] \to M$ una geodésica minimizante que une p con q. Para toda curva $c : [0, T] \to M$ que une p con q se tiene que*

$$E(\gamma) \leq E(c)$$

y la igualdad vale si y sólo si c es una geodésica minimizante.

Demostración. Por la desigualdad de Schwarz

$$l(c)^2 = (\int_0^T |c'| dt)^2 \leq T \int_0^T |c'|^2 dt = TE(c)$$

y la iguladad ocurre si y sólo $|c'|$ es constante. Así

$$TE(\gamma) = l(\gamma)^2 \leq l(c)^2 \leq TE(c)$$

y $E(\gamma) = E(c)$ implica que $|c'|$ es constante y $l(\gamma) = l(c)$, lo que implica que c es una geodésica minimizante. □

TEOREMA 4.4. Fórmula de la primera variación. *Sean F una variación de la curva $\gamma \in \Omega(M;p,q)$ y $W(t) = \dfrac{\partial f}{\partial u}(0,t)$ su campo vectorial tangente, entonces*

$$
(E \circ F)'(0) = -\int_0^T \langle \frac{D\gamma'}{dt}, W(t)\rangle dt - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \gamma'(t_i^+) - \gamma'(t_i^-), W(t_i)\rangle \tag{4.10}
$$

donde

$$
\gamma'(t_i^-) = \lim_{t \to t_i^-} \gamma'(t); \quad \gamma'(t_i^+) = \lim_{t \to t_i^+} \gamma'(t)
$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
E \circ F &= \frac{1}{2}\int_0^T \langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\rangle dt \\
\frac{d(A_L \circ F)}{du} &= \int_0^T \langle \frac{D}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\rangle dt = \int_0^T \langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial t}\rangle dt \\
&= \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial t}\rangle dt - \int_0^T \langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}\rangle dt \\
&= \sum_{i=1}^{k} \langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial t}\rangle \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} - \int_0^T \langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}\rangle dt
\end{aligned}
$$

Evaluando en $u = 0$ obtenemos la fórmula (4.10) □

DEFINICIÓN 4.9. Una trayectoria $\gamma \in \Omega(M;p,q)$ se llama crítica si y sólo si $(E \circ F)'(0) = 0$ para toda variación F de γ.

COROLARIO 4.5. *La trayectoria $\gamma \in \Omega(M;p,q)$ es crítica si y solo si es una geodésica*

Demostración. Supongase que γ es una trayectoria crítica, entonces de la ecuación (4.10) tenemos que

$$
-\int_0^T \langle \frac{D\gamma'}{dt}, W(t)\rangle dt + \sum_{i=1}^{k} \langle \gamma', W\rangle \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} = 0 \tag{4.11}
$$

para toda variación. Sea $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable por tramos con $g(t) > 0$ si $t \neq t_i$, y $g(t_i) = 0$ con $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Sea $W(t) = g(t)\dfrac{D\gamma'}{dt}$, entonces

$$
\sum_{i=1}^{k} \langle \gamma', W\rangle \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} = 0.
$$

Así, por (4.11)

$$\int_0^T g(t)|\frac{D\gamma'}{dt}|^2 dt = 0.$$

de donde $\dfrac{D\gamma'(t)}{dt} = 0, \forall t \leq t_i$ y así cada $\gamma|(t_i, t_{i+1})$ es una geodésica. Ahora nos falta ver lo que ocurre en los puntos t_i. Tomemos otro campo variacional $W^*(t)$ con $W^*(0) = 0 = W^*(1)$ y si $t_i \neq 0, 1$ definimos $W^*(t_i) = \gamma'(t_i^-) - \gamma'(t_i^+)$ y usemos el hecho que $\gamma|(t_i, t_{i+1})$ es una geodésica. Así

$$0 = \sum_{i=1}^{k} |\gamma'(t_i^-) - \gamma'(t_i^+)|^2$$

de donde $\gamma \in C^1$ en cada t_i, por lo tanto γ es una geodésica. Ahora suponga que $\gamma \in \Omega(M; p, q)$, es una geodésica, entonces

$$\int_0^T \langle \frac{D\gamma'}{dt}, W(t)\rangle dt = 0.$$

para todo $W \in T_\gamma\Omega$. Como γ es diferenciable,

$$\sum_{i=1}^{k} \langle \gamma', W\rangle \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} = 0.$$

Sumando las dos ecuaciones obtenemos $(E \circ F)'(0) = 0$. □

Teorema 4.6. Fórmula de la segunda variación. *Sea F una variación de la geodésica γ con campos tangente W. Entonces*

$$(E \circ F)''(0) = -\int_0^T \langle W(t), \frac{D^2 W}{dt} + R_{W\gamma'(t)}\gamma'(t)\rangle dt - \sum_{i=1}^{k-1} \langle W(t_i), \frac{DW}{dt}(t_i^+) - \frac{DW}{dt}(t_i^-)\rangle. \tag{4.12}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}(E \circ F)'' &= \sum_{i=1}^{k} \langle \frac{D}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial t}\rangle \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} + \sum_{i=1}^{k} \langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{D}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial t}\rangle \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} \\ &- \int_0^T \langle \frac{D}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}\rangle dt - \int_0^T \langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}\rangle dt\end{aligned}$$

Evaluando en $u = 0$ el primer término se anula, y ya que γ es una geodésica, también lo hace el tercero. Como en el Corolario 4.2

$$\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}(0, t) = \frac{D^2 W}{dt^2} + R_{W\gamma'(t)}\,\gamma'(t).$$

Evaluando el segundo término en $u = 0$

$$\sum_{i=1}^{k} \langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{D}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial t} \rangle \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} = -\sum_{i=1}^{k-1} \langle W(t_i), \frac{DW}{dt}(t_i^+) - \frac{DW}{dt}(t_i^-) \rangle .$$

Juntando estos hechos obtenemos (4.12) □

TEOREMA 4.7. Bonnet-Myers

Sea M una variedad riemanniana completa de dimensión n tal que para todo $p \in M$, $v \in T_pM$, $|v| = 1$ se tiene que

$$Ric(v, v) \geq \frac{(n-1)}{r^2} > 0.$$

Entonces M es compacta y $\operatorname{diam} M \leq \pi r$.

Demostración. Sean $p, q \in M$. Sea $\gamma : [0, 1] \to M$ geodésica minimizante uniendo p con q. Basta demostrar que $l(\gamma) \leq \pi r$.

Supongamos por el contrario que $l(\gamma) > \pi r$. Sean

$$e_1(t), \ldots e_{n-1}(t), e_n(t) = \frac{\gamma'(t)}{l(\gamma)}$$

campos paralelos ortonormales a lo largo de γ. Definamos

$$W_j(t) = \sin(\pi t) e_j(t), \quad j = 1, \ldots n-1.$$

Sea F_j una variación con campo tangente W_j y sea $E_j = E \circ F_j$. Usando que e_j es paralelo en (4.12) tenemos

$$\begin{aligned} E_j''(0) &= -\int_0^1 \langle W_j, \frac{D^2 W_j}{dt} + R_{W_j \gamma'(t)} \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^1 \sin^2(\pi t)(\pi^2 - l^2 K(e_n(t), e_j(t))) dt \end{aligned}$$

donde $K(e_n(t), e_j(t))$ es la curvatura seccional del palno generado por $e_n(t), e_j(t)$. Sumando

$$\sum_{i=1}^{n-1} E_j''(0) = \int_0^1 \sin^2(\pi t)((n-1)\pi^2 - l^2 Ric(e_n(t), e_n(t))) dt.$$

Como $Ric(e_n(t), e_n(t)) \geq \dfrac{(n-1)}{r^2}$ y $l > \pi r$,

$$\sum_{i=1}^{n-1} E_j''(0) < 0$$

y por lo tanto existe un j tal que $E_j''(0) < 0$, lo que contradice el hecho de que γ es minimizante. □

COROLARIO 4.8. *Sea $M, \langle , \rangle$ una variedad riemaniana completa tal que $Ric(v, v) \geq \delta > 0$ para todo $p \in M$, $v \in T_pM$. Entonces el cubriente universal de de M es compacto. En particular $\pi_1(M)$ es finito.*

Demostración. Si $P : \tilde{M} \to M$ es el recubrimiento universal, $\tilde{M}$ con la métrica $P^*\langle , \rangle$ es completa y $\tilde{Ric} \geq \delta > 0$. Por el teorema 4.7, $\tilde{M}$ es compacta. Así, las fibras de P son finitas. Pero la cardinaliadad de $\pi_(M)$ coincide con la de las fibras. $\square$

Problemas

EJERCICIO 1. Sean $(M, \mathcal{A}), (N, \mathcal{B})$ variedades diferenciables de dimensiones m, n.

a) La colección de cartas coordenadas $(U \times V, \varphi \times \psi)$ con $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ determina una estructura diferenciable de dimensión $m + n$ en $M \times N$.

b) Las proyecciones $\pi_1 : M \times N \to M$, $\pi_2 : M \times N \to N$ son diferenciables.

c) $F : P \to M \times N$ es diferenciable si y sólo si $\pi_1 \circ F, \pi_2 \circ F$ son diferenciables.

d) Si $f : P \to M, g : Q \to N$ son diferenciables, entonces $f \times g$ lo es. Determine $\operatorname{rango} f \times g$ en términos de $\operatorname{rango} f, \operatorname{rango} g$.

EJERCICIO 2. Sean $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$ y $\pi_\pm : \mathbb{S}^n \setminus \{p_\pm\} \to \mathbb{R}^n$ las proyecciones estereográficas desde los polos $p_\pm = (0, \dots, 0, \pm 1)$. Demuerstre que $\{(\mathbb{S}^n \setminus \{p_+\}, \pi_+), (\mathbb{S}^n \setminus \{p_-\}, \pi_-)\}$ determina una estructura diferenciable.

EJERCICIO 3. Sean $\mathbb{P}^n$ el espacio proyectivo y $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$ la proyección canónica. Muestre que $f : \mathbb{P}^n \to M$ es diferenciable si y sólo si $f \circ g : \mathbb{S}^n \to M$ lo es y $\operatorname{rango} f = \operatorname{rango} f \circ g$

EJERCICIO 4. Sean C_0, C_1 cerrados disjuntos en la variedad C^∞ M. Demuestre que hay una $f : M \to [0, 1]$ C^∞ tal que $C_i = f^{-1}(i), i = 0, 1$.

EJERCICIO 5. Sea M una variedad diferenciable.

a) El conjunto $N \subset M$ tiene una estructura de subvariedad diferenciable de dimensión k de M si y sólo si para todo punto de $p \in N$ hay una carta (U, φ) alrededor de p tal que $N \cap U = U \cap \varphi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\})$.

b) El conjunto $N \subset M$ resulta una subvariedad cerrada de M si y sólo si una carta como en a) existe para todo punto de M.

EJERCICIO 6. El conjunto $\{(x, |x|) : x \in \mathbb{R}\}$ no es la imagen de una inmersión $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

EJERCICIO 7. a) Sean $U \subset \mathbb{R}^k$ abierto y $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ diferenciable, entonces $\operatorname{graf} f = \{(p, f(p) : p \in U\}$ es subvariedad de $\mathbb{R}^n$.

b) Toda subvariedad de $\mathbb{R}^n$ es localmente la gráfica de una función diferenciable.

Ejercicio 8. Sean M, N variedades de dimensión n y $f : M \to N$ una inmersión. Demuestre que

a) f es una transformación abierta, o sea que manda abiertos en abiertos.

b) Si M es compacta y N es conexa entonces f es sobre.

Ejercicio 9. Sea $\mathbb{S}^1$ el conjunto de complejos unitarios. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ por $f(t) = (\exp(it), \exp(i\alpha t))$ donde α es un número irracional. Pruebe que f es una inmersión inyectiva y que $f(\mathbb{R})$ es densa en $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Ejercicio 10. a) Sean q un valor regular de $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $M = g^{-1}(q)$. Sea $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ diferenciable. Demuestre que para todo $p \in M$, $\ker D(f|M)_p = \ker D(f, g)_p$.

b) Defina $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ por $f([x, y, z]) = (yz, xz, xy)$. Muestre que f no es una inmersión en precisamente 6 puntos.

c) Defina $F : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{R}^4$ por $F([x, y, z]) = (x^2 - y^2, yz, xz, xy)$. Muestre que F es un encaje .

Ejercicio 11. Una función continua $f : X \to Y$ se llama propia si para cualquier compacto $C \subset Y$ se tiene que $f^{-1}(C)$ es compacto. El conjunto límite $L(f)$ de f es el conjunto de los $y \in Y$ para los cuales existe una sucesión (x_n) en X sin subsucesiones convergentes tal que $y = \lim f(x_n)$.

a) f es propia si y sólo si $L(f) = \emptyset$.

b) $f(X)$ es cerrado en Y si y sólo si $L(f) \subset f(X)$

c) Encuentre $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ con $f(\mathbb{R})$ cerrada pero $L(f) \neq \emptyset$.

d) $f : X \to Y$ continua e inyectiva es un homeomorfismo sobre su imagen si y sólo si $L(f) \cap f(X) = \emptyset$.

c) Una subariedad $N \subset M$ es cerrada si y sólo si la inclusión $i : N \to M$ es propia.

e) Si M es una variedad C^∞ hay una $f \in C^\infty(M)$ propia.

Ejercicio 12. Sea $M(m, n)$ el conjunto de matrices reales $m \times n$ y sea $M(m, n : k)$ el conjunto de matrices en $M(m, n)$ con rango k. Demuestre que $M(m, n : k)$ es una subvariedad de $M(m, n)$ de dimensión $k(n + m - k)$.

Sugerencia: Para $X_0 \in M(m, n : k)$ hay matrices de permutación $P \in M(m, m), Q \in M(n, n)$ tales que $PX_0Q = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}$ con $A_0 \in M(k, k)$ nosingular. Si X es cercana a X_0 entonces $PXQ = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ con $A \in M(k, k)$ nosingular y $X \in M(m, n : k)$ si y sólo si $D = CA^{-1}B$.

EJERCICIO 13. Suponga que la operación $\odot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ satisface

$$\begin{aligned}
(a_1 + a_2) \odot b &= a_1 \odot b + a_2 \odot b \\
a \odot (b_1 + b_2) &= a \odot b_1 + a \odot b_2 \\
\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda(a \odot b) &= (\lambda a) \odot b = a \odot (\lambda b) \\
a \odot (1, 0, \ldots, 0) &= a \\
\forall a \neq 0, \exists b \ni\ a \odot b &= b \odot a = (1, 0, \ldots, 0)
\end{aligned}$$

Sea $e_1, \ldots, e_n$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que

a) Todo punto de $\mathbb{S}^{n-1}$ se representa de manera única en la forma $a \odot e_1$.

b) Si $a \neq 0$, entonces $a \odot e_1, \ldots, a \odot e_n$ son linealmente independientes.

c) Si $a \in \mathbb{S}^{n-1}$, las proyecciones de $a \odot e_2, \ldots, a \odot e_n$ en $T_a\mathbb{S}^{n-1}$ son linealmente independientes.

d) Multiplicación por a es una función continua.

e) $T\mathbb{S}^{n-1}$ es trivial.

f) $T\mathbb{P}^{n-1}$ es trivial.

EJERCICIO 14. Sean $\pi : E \to X$ un haz vectorial y $f : Y \to X$ continua. Sea

$$f^*(E) = \{(y, e) \in Y \times E : f(y) = \pi(e)\}$$

Defina $\pi' : f^*(E) \to Y$ por $\pi'(y, e) = y$ y $\hat{f} : f^*(E) \to E$ por $\hat{f}(y, e) = e$. Podemos transferir a cada fibra $\pi'^{-1}(y) = \{y\} \times \pi^{-1}(f(y))$, la estructura de espacio vectorial de $\pi^{-1}(f(y))$.

a) Muestre que $\pi' : f^*(E) \to Y$ es un haz vectorial y que $\hat{f} : f^*(E) \to E$ es una transformación de haces que es un isomorfismo en cada fibra.

b) Suponga que tenemos otro haz vectorial $\pi'' : E'' \to Y$ y una transformación de haces $f'' : E'' \to E$ tal que

$$\begin{array}{ccc}
E'' & \xrightarrow{f''} & E \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \pi''} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\
Y & \xrightarrow{f} & Y
\end{array}$$

conmuta. Demuestre que E' y E'' son isomorfos, $E' \cong E''$.

c) Si $g : Z \to Y$ es continua $(f \circ g)^*(E) \cong g^*(f^*(E))$.

d) Si $\pi : E \to X$ es orientable entonces $\pi' : f^*(E) \to Y$ es orientable.

e) Dar un ejemplo en el que $\pi' : f^*(E) \to Y$ es orientable pero $\pi : E \to X$ no es orientable.

f) Para el haz vectorial $\pi : E \to X$ considere el haz $\pi' : \pi^*(E) \to E$. Muestre que si $\pi : E \to X$ no es orientable entonces tampoco $\pi' : \pi^*(E) \to E$ es orientable.

Ejercicio 15. Dados los haces $\pi : E \to X$, $\pi' : E' \to X$ sea $E \oplus E' = \{(e, e') : \pi(e) = \pi'(e')\}$ Definamos $\pi'' : E \oplus E' \to X$ por $\pi''(e, e') = \pi(e) = \pi'(e')$.

a) Muestre que $\pi'' : E \oplus E' \to X$ es un haz vectorial cuya fibra sobre p es la suma directa de las fibras $\pi^{-1}(p)$ y $\pi'^{-1}(p)$.

b) Muestre que si $f : Y \to X$ es continua $f^*(E \oplus E') \cong f^*(E) \oplus f^*(E')$

c) Dados los haces $\pi_i : E_i \to X_i, i = 1, 2$, muestre que $\pi_1 \times \pi_2 : E_1 \times E_2 \to X_1 \times X_2$ es un haz vectorial.

d) Si $\Delta : X \to X \times X$ es la transformación diagonal $\Delta(x) = (x, x)$, muestre que $E \oplus E' \cong \Delta^*(E \times E')$.

e) Si E es orientable, entonces E' es orientable si y sólo si $E \oplus E'$ es orientable.

g) Para cada espacio vectorial V defina una orientación natural de $V \oplus V$ y pruebe que $E \oplus E$ siempre es orientable.

Ejercicio 16. Sean M_1, M_2 variedades diferenciables

a) Si $\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i$ son las proyecciones naturales, muestre que $T(M_1 \times M_2) \cong \pi_1^*(TM_1) \oplus \pi_2^*(TM_2)$.

b) Si M_1, M_2 son orientables, entonces también $M_1 \times M_2$ lo es.

Ejercicio 17. Muestre que el haz tangente de una variedad diferenciable siempre es una variedad orientable.

Ejercicio 18. Una matriz simétrica $S \in M(n, n)$ es semidefinida positiva si $\langle Sv, v\rangle \geq 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$. Muestre que

a) Si $A \in M(n, n)$, A^tA es semidefinida positiva.

b) Toda matriz semifinida positiva S puede escribirse como $S = B^2$ para alguna B.

c) Toda $A \in Gl(n, \mathbb{R})$ puede escribirse de manera única como $A = RS$ con $R \in O(n)$ y S definida positiva.

d) Las matrices R y S son funciones continuas de A. **Sugerencia**: Si $A_n \to A$ y $A_n = R_nS_n$, entonces R_n tiene una subsucesión convergente.

e) $Gl(n, \mathbb{R})$ es difeomorfo a $O(n) \times \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$.

Ejercicio 19. Sean $(M, \langle,\rangle)$, $(M', \langle,\rangle')$ variedades riemannianas. Una isometría local es un difeomorfismo $F : U \subset M \to M'$ sobre su imagen tal que $F^*\langle,\rangle' = \langle,\rangle$. Un campo vectorial en $(M, \langle,\rangle)$ se llama campo de Killing si su flujo local $\{\varphi_t\}$ consiste de isometrías locales. Pruebe que

a) Un campo lineal en $\mathbb{R}^n$ definido por la matriz A es de Killing si y sólo si A es antisimétrica.

b) Sea $F : M \to M'$ una isometría, entonces $X \in \mathfrak{X}(M)$ es de Killing $\iff F_*X \in \mathfrak{X}(M')$ es de Killing.

c) $X \in \mathfrak{X}(M)$ es de Killing $\iff \langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle Y, \nabla_Z X\rangle = 0$ $\forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. **Sugerencia:** X es de Killing $\iff L_X\langle,\rangle$.

Ejercicio 20. Sea $(M, \langle,\rangle)$ n-variedad riemanniana.

a) Muestre que para cada $p \in M$ existe una base ortonormal local $\{E_1, \dots, E_n\}$ alrededor de p tal que $\nabla_{E_i}E_j(p) = 0$. $\{E_1, \dots, E_n\}$ se llama *marco geodésico* en p.

b) Sea $\{E_1, \dots, E_n\}$ marco geodésico en p. Pruebe que

$$\operatorname{grad} f(p) = \sum_{i=1}^{n} E_i(f)E_i(p).$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_iE_i \Rightarrow \operatorname{div} X(p) = \sum_{i=1}^{n} E_i(f_i)(p).$$

Ejercicio 21. Una acción del grupo de Lie G sobre la variedad M es una transformación diferenciable $G \times M \to M$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$ tal que $gh \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$. La órbita de un punto x bajo la acción es el conjunto $G \cdot x = \{g \cdot x : g \in G\}$. El grupo de isotropía de un punto x es el conjunto $G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$. La acción se llama transitiva si M es la órbita de un punto.

a) $O(n)$ actúa de forma natural en $\mathbb{R}^n$. Si $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, entonces $\mathbb{S}^n = O(n)\cdot x$ y el grupo de isotropía de $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ es el conjunto

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} : B \in 0(n-1)\right\} \cong 0(n-1).$$

La acción de $SO(n) = \{A \in 0(n) : \det A = 1\}$ en $\mathbb{S}^{n-1}$ es también transitiva y $SO(n)_{e_1} \cong S0(n-1)$.

b) Como $SO(n)$ actúa linealmente en $\mathbb{R}^n$, induce una acción transitiva en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^{n-1}$ y el grupo de isotropía de $\mathbb{R}e_1$ es el conjunto

$$\left\{\begin{pmatrix} \det B^{-1} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} : B \in O(n-1)\right\} \cong O(n-1).$$

c) El grupo unitario $U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : A\overline{A^t} = I\}$ actúa transitivamente en $\mathbb{S}^{2n-1} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$ y $U(n)_{e_1} \cong U(n-1)$.

d) El grupo $SU(n) = \{A \in U(n) : \det A = 1\}$ actúa linealmente en C^n y por lo tanto induce una acción en el espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^{n-1}$ de lineas complejas a traves del origen de C^n. La acción es transitiva y el grupo de isotropía de $\mathbb{C}e_1$ es el conjunto

$$\left\{\begin{pmatrix}\det B^{-1} & 0\\ 0 & B\end{pmatrix} : B \in U(n-1)\right\} \cong U(n-1).$$

e) El grupo $Sl(2,\mathbb{R})$ actúa transitivamente en el semiplano superior $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ mediante transformaciones fraccionales lineales

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

El grupo de isotropía de i es $O(2)$. El grupo

$$SU(1,1) = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\ \overline{b} & \overline{a}\end{pmatrix} : |a|^2 - |b|^2 = 1\right\}$$

actúa transitivamente en el disco unitario $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ mediante transformaciones fraccionales lineales y $SU(1,1)_0 \cong U(1)$.

Ejercicio 22. Sea V un espacio vectorial. Para $v \in V$, $\omega \in \bigwedge^r V^*$, definimos la *contracción* $i(v)\omega \in \bigwedge^{r-1} V^*$ mediante

$$i(v)\omega(v_1,\dots,v_{r-1}) = \omega(v,(v_1,\dots,v_{r-1}).$$

a) Muestre que $i(v)(i(w)\omega) = -i(w)(i(v)\omega)$.

b) Muestre que si $\omega \in \bigwedge^k V^* \eta \in \bigwedge^r V^*$, entonces

$$i(v)(\omega\wedge\eta) = (i(v)\omega)\wedge\eta + (-1)^k\omega\wedge(i(v)\eta)$$

Ejercicio 23. Sea V un espacio vectorial. Un elemento $\omega \in \bigwedge^r V^*$ se llama descomponible si existen $\phi_1,\dots,\phi_r \in V$ tales que

$$\omega = \phi_1\wedge\cdots\wedge\phi_r.$$

a) Demuestre que si $\dim V \le 3$, todo elemento de $\bigwedge V^*$ es descomponible.

b) Si $\dim V > 3$ dé un ejemplo de un elemento indescomponible.

El anulador de $\omega \in \bigwedge^r V^*$ es el conjunto

$$\mathrm{an}(\omega) = \{\phi \in V^* : \phi\wedge\omega = 0\}.$$

c) Muestre que $\dim \mathrm{an}(\omega) \le r$ y que la igualdad se da si y sólo si ω es descomponible.

d) Si $\dim V = n$, todo elemento de $\bigwedge^{n-1} V^*$ es descomponible.

Ejercicio 24. Sea V un espacio vectorial real de dimensión n con producto escalar. Extendemos el producto escalar a toda el algebra exterior $\bigwedge V$ definiendo

$$\langle v_1\wedge\cdots\wedge v_k, w_1\wedge\cdots\wedge w_k\rangle = \det(\langle v_i, w_j\rangle)$$

y extendiendo bilinealmente.

a) Pruebe que si $e_1, \ldots, e_n$ es una base ortonormal de V entonces la base $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$ de $\bigwedge^k V$ es ortonormal.

Eligiendo una orientación $\mathcal{O}$ en V definamos $* : \bigwedge V \to \bigwedge V$ tal que si $(e_1, \ldots, e_n)$ es una base ortonormal

$$*(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = \pm 1, *(1) = \pm e_1 \wedge \cdots \wedge e_n, *(e_1 \wedge \cdots \wedge e_p) = \pm e_{p+1} \wedge \cdots \wedge e_n$$

donde el signo es + si $(e_1, \ldots, e_n) \in \mathcal{O}$ y - en caso contrario.

b) Pruebe que $**|\bigwedge^p V = (-1)^{p(n-p)}$ y que si $\omega, \eta \in \bigwedge^p V$, entonces

$$\langle \omega, \eta \rangle = *(\omega \wedge *\eta) = *(\eta \wedge *\omega).$$

c) Para $v \in V$ defina $\gamma : \bigwedge^{p+1} V \to \bigwedge^p V$ por

$$\langle \gamma(\omega), \xi \rangle = \langle \omega, v \wedge \xi \rangle$$

para $\omega \in \bigwedge^{p+1} V, \xi \in \bigwedge^p V$. Pruebe que

$$\gamma(\omega) = (-1)^{np} * (v \wedge *\omega).$$

Ejercicio 25. Lema de Cartan.

Sea M variedad diferenciable. Sean $\omega_1, \ldots, \omega_r$ 1-formas linealmente independientes en cada punto de M. Sean $\theta_1, \ldots, \theta_r$ 1-formas tales que

$$\sum_{i=1}^{r} \theta_i \wedge \omega_i = 0.$$

Pruebe que existen $A_{ij} \in C^\infty(M)$ con $A_{ij} = A_{ji}$ tales que

$$\theta_i = \sum_{i=1}^{r} A_{ij} \omega_j, \ i = 1, \ldots, r$$

Ejercicio 26. Pruebe las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
L_X(\omega_1 \wedge \omega_2) &= L_X\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge L_X\omega_2. \\
X(\omega(X_1, , \ldots, X_r)) &= L_X\omega(X_1, \ldots, X_r) \\
&+ \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j+1} \omega([X, X_i], X_1, \ldots, \hat{X}_i \ldots, X_r). \\
d\omega(X_1, \ldots, X_{r+1}) &= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} L_{X_i}\omega(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{r+1}) \\
&+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1} \omega([X_i, X_j], \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{r+1}). \\
L_X\omega &= i(X)d\omega + d(i(X)\omega).
\end{aligned}$$

$$2d\omega(X_1,\ldots,X_{r+1}) =$$
$$\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i+1}(X_i(\omega(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_{r+1}))+L_{X_i}\omega(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_{r+1})).$$

Ejercicio 27. Sea M una n-variedad riemanniana con orientación $\mathcal{O}$. Defina el elememto de volumen riemanniano por

$$\nu(v_1,\ldots,v_n) = \pm\sqrt{\det(\langle v_i, v_j\rangle)}$$

donde el signo es $+$ si $(v_1,\ldots,v_n) \in \mathcal{O}$ y - en caso contrario. Pruebe que

$$L_X\nu = d(i(X)\nu) = \operatorname{div} X\, \nu$$

Sugerencia: Sea $p \in M$ y sea $\{E_i : i = 1,\ldots,n\}$ un marco geodésico en p. Sean $\{\omega_i : i = 1,\ldots,n\}$ las 1-formas duales. Muestre que $\nu = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$ y que si

$$\theta_i = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega}_i \wedge \cdots \wedge \omega_n,$$

$$\begin{aligned} i(X)\nu &= \sum_{i=1}^{n}\omega_i(X)\theta_i,\\ d\omega_i(p) = 0 \quad &, \quad d\theta_i(p) = 0,\\ d(i(X)\nu)(p) &= \sum_{i=1}^{n} E_i(\omega_i(X))(p)\nu(p) = \operatorname{div} X(p)\nu(p) \end{aligned}$$

Ejercicio 28. Sea M una variedad riemannianna. Definimos una métrica riemanniana en TM de la siguiente manera. Si $v \in T_pM$, $V, W \in T_v(TM)$, escojamos curvas $\alpha, \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to TM$ con $\alpha(0) = \beta(0) = v$, $\alpha'(0) = V$, $\beta'(0) = W$, entonces

$$\langle\langle V, W\rangle\rangle v = \langle \pi_* V, \pi_* W\rangle_p + \langle \frac{D\alpha}{dt}(0), \frac{D\beta}{ds}(0)\rangle_p$$

a) Pruebe que $\langle\langle , \rangle\rangle$ esta biendefinida.

b) Un vector $V \in T_v(TM)$ ortogonal a la fibra $\pi^{-1}(\pi(v))$ se llama *horizontal*. Si $\alpha : (a,b) \to TM$, pruebe que $\alpha'(t)$ es horizontal $\forall t \iff \alpha$ es paralelo a lo largo de la curva $\pi\alpha : (a,b) \to M$.

c) Pruebe que el campo geodésico $G \in \mathfrak{X}(TM)$ es horizontal en cada punto.

d) Pruebe el *Teorema de Liouville*: $\operatorname{div} G = 0$.

Ejercicio 29. Sea M una variedad riemanniana tal que para cualquier par de puntos el transporte paralelo entre ellos no depende de la curva escogida para unirlos. Pruebe que la curvatura es idénticamente nula. **Sugerencia**: Considere una superficie parametrizada $f : (-\varepsilon, 1+\varepsilon)^2 \to M$ tal que $f(s,0) = f(0,0) \forall s \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Si $V_0 \in T_{f(0,0)}M$ definamos un campo V a lo largo de f por $V(s,0) = V_0$ y como el transporte paralelo de V_0 a lo largo de la curva $t \mapsto f(s,t)$. Entonces

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}V + R(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s})V = \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}V = 0$$

Como el transporte paralelo no depende de la curva escogida, $V(s,1)$ es el transporte paralelo de $V(0,1)$ a lo largo de la curva $s \mapsto f(s,1)$, de donde $\frac{D}{\partial s}V(s,1) = 0$ ya así

$$R_{f(0,1)}(\frac{\partial f}{\partial t}(0,1), \frac{\partial f}{\partial s}(0,1))V(0,1) = 0.$$

La arbitrariedad de V_0 y f demuestran que $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M),\ R(X,Y)Z = 0$.

Ejercicio 30. Una variedad riemanniana M es un *espacio localmente simétrico* si el tensor de curvatura R satisface $\nabla R = 0$.

a) Sea M un espacio localmete simétrico y sea $\gamma : [0,l] \to M$ una geodésica. Sean X, Y, Z campos paralelos a lo largo de γ. Pruebe que $R(X,Y)Z$ también es paralelo a lo largo de γ.

b) Pruebe que si $\dim M = 2$ y M es un espacio localmente simétrico, conexo, entonces la curvatura (seccional o escalar) es constante.

c)Si M tiene curvatura (seccional) constante entonces es un espacio localmente simétrico.

Ejercicio 31. Teorema de Schur.

Sea M una variedad riemanniana conexa con $\dim M \geq 3$. Supongamos que M es *isotrópica*, es decir si la curvatura seccional $K(p,\sigma)$ no depende del plano $\sigma \subset T_pM$. Pruebe que $K(p,\sigma)$ tampoco depende del punto $p \in M$.

Ejercicio 32. Una variedad riemanniana es una *variedad de Einstein* si existe $\lambda \in C^\infty(M)$ tal que $Ric(,) = \lambda\langle,\rangle$. Pruebe que

a) Si M es conexa y de Einstein con $\dim M \geq 3$, entonces λ es constante.

b) Si M es conexa y de Einstein con $\dim M = 3$, entonces M tiene curvatura seccional constante.

Bibliografía

[1] Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry* Volúmenes I-II. Publish or Perish.

[2] Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics 94. Springer

[3] Bott - Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology*. Graduate Texts in Mathematics 82. Springer

[4] DoCarmo, M. *Geometría Riemanniana* , Projeto Euclides IMPA, 1988.

[5] Kobayashi,S. Nomizu, K. *Foundations of Differential Geometry*, Interscience, 1963.

[6] Lang, S. *Differential and Riemannian Manifolds*, Springer Verlag, 1995.

[7] OÑeill, B. *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, 1983.

[8] Petersen, P. *Riemannian Geometry*, GTM Springer, 1997.