

EJERCICIO 1. Envuentre las líneas tangentes a las ramas del nivel crítico correspondiente a un máximo de la energía potencial $E = U(\xi)$.

SOLUCIÓN: Las ramas $y = y(x)$ del nivel crítico satisfacen

$$\frac{1}{2}y(x)^2 + U(x) = E.$$

Derivando implícitamente, tenemos para $x \neq \xi$

$$y'(x) = -\frac{U'(x)}{y(x)}.$$

Por la regla de L'Hopital

$$y'(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} -\frac{U'(x)}{y(x)} = -\frac{U''(\xi)}{y'(\xi)}, \quad y'(\xi)^2 = -U''(\xi)$$

o sea que las líneas tangentes en $(\xi, 0)$ tienen pendientes $\pm\sqrt{-U''(\xi)}$.

EJERCICIO 2. Sea $S(E)$ el área encerrada por la curva fase cerrada correspondiente al nivel de energía E . Muestre que el período de movimiento a lo largo de esta curva es

$$T = \frac{dS}{dE}$$

SOLUCIÓN: Sean $(x_i(E), 0)$, $i = 1, 2$, las intersecciones de la curva fase con el eje x . Entonces $U(x_i(E)) = E$

$$\begin{aligned} S(E) &= 2 \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} y_E(x) dx = 2 \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \sqrt{2(E - U(x))} dx, \\ \frac{dS}{dE} &= 2 \sqrt{2(E - U(x_i(E)))} x'_i(E) \Big|_{i=1}^{i=2} + 2 \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{d}{dE} \sqrt{2(E - U(x))} dx \\ &= 2 \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}} = 2T(E). \end{aligned}$$

EJERCICIO 3. Sea E_0 el valor de la función potencial en un punto de mínimo ξ . Encuentre el período $T_0 = \lim_{E \rightarrow E_0} T(E)$ de pequeñas oscilaciones alrededor de ξ .

SOLUCIÓN: Por el lema de Morse hay un cambio de coordenadas $x = \phi(y)$ tal que $\phi(0) = \xi$ y

$$U(\phi(y)) = U(\xi) + y^2, \quad U''(\phi(y))\phi'(y)^2 + U'(\phi(y))\phi''(y) = 2$$

$$\phi'(0)^2 = \frac{2}{U''(\xi)}$$

$$\begin{aligned} T(E) &= 2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}} = \sqrt{2} \int_{-a}^a \frac{\phi'(y)dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} \\ &= \sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \phi'(a \sin u) du, \end{aligned}$$

donde $a^2 = E - U(\xi) = E - E_0$. Así

$$\lim_{E \rightarrow E_0} T(E) = \pi \sqrt{2} \phi'(0) = \frac{2\pi}{\sqrt{U''(\xi)}}.$$

EJERCICIO 4. Un campo vectorial en el plano se llama **central** con centro en O si es invariante bajo el grupo de movimientos del plano que fijan O .

Muestre que un campo central es radial respecto al centro y que su magnitud solo depende de la distancia al centro.

SOLUCIÓN: La acción de un difeomorfismo g sobre un campo F está dada por

$$g_*F(x) = Dg(g^{-1}(x)) \cdot F(g^{-1}(x)),$$

que cuando g es lineal se reduce a $g_*F(x) = g \cdot F(g^{-1} \cdot x)$.

Identificamos el plano con el plano complejo. Si $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es un campo central con centro en el origen, entonces

$$F(\bar{z}) = \overline{F(z)}, \quad F(e^{i\varphi}z) = e^{i\varphi}F(z).$$

Por lo tanto, si $r \in \mathbb{R}$ entonces $F(r) \in \mathbb{R}$ y

$$F(e^{i\varphi}r) = e^{i\varphi}F(r).$$

EJERCICIO 5. Para que valores de α es el movimiento a lo largo de una órbita circular en el campo con energía potencial $U = r^\alpha$, $\alpha \geq -2$, estable en el sentido de Liapunov.

SOLUCIÓN: El potencial efectivo y su derivada están dados por

$$V(r) = r^\alpha + \frac{M^2}{2r^2}, \quad V'(r) = \alpha r^{\alpha-1} - \frac{M^2}{r^3}$$

Para que haya órbitas circulares se requiere que existan puntos críticos de V y entonces $\alpha > 0$. En tal caso la circunferencia de radio R es una órbita periódica con momento angular dado por $M^2 = \alpha R^{\alpha+2}$ y así la velocidad angular al recorrer esa órbita está dada por

$$\dot{\varphi}^2 = M^2 R^{-4} = \alpha R^{\alpha-2}.$$

Para que una órbita circular sea (Liapunov) estable se requiere que las órbitas circulares cercanas se recorran con la misma velocidad angular y por lo tanto α debe ser 2.

EJERCICIO 6. Muestre que el ángulo entre el pericentro y el apocentro es igual al semiperiodo de una oscilación en el sistema unidimensional con energía potencial $W(x) = U(M/x) + (x^2/2)$.

SOLUCIÓN: Haciendo el cambio de variable $r = M/x$ tenemos

$$\Phi = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{Mr^{-2} dr}{\sqrt{2(E - V(r))}} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(M/x))}}$$

Pero $V(M/x) = U(M/x) + (x^2/2)$.

EJERCICIO 7. Encuentre el ángulo Φ para una órbita cercana a la circunferencia de radio r .

SOLUCIÓN: Por el Ejercicio 6, $\Phi_{cir} = \lim_{E \rightarrow E_0} \Phi(E)$ donde $\Phi(E)$ es el semiperiodo de una oscilación en el sistema 1-dimensional con energía

$$W(x) = V(M/x), \quad V(r) = E_0, \quad V'(r) = 0.$$

Por el Ejercicio 3, $\Phi_{cir} = \frac{\pi}{\sqrt{W''(M/r)}}$. Pero

$$0 = V'(r) = -W'(M/r)\frac{M}{r^2}, \quad V''(r) = W''(M/r)\frac{M^2}{r^4} + W'(M/r)\frac{M}{r^3}$$

$$\Phi_{cir} = \frac{M\pi}{r^2\sqrt{V''(r)}}$$

$$0 = V'(r) = U'(r) - \frac{M^2}{r^3}, \quad V''(r) = U''(r) + \frac{3M^2}{r^4}, \quad rV''(r) = rU''(r) + 3U'(r)$$

$$\Phi_{cir} = \pi\sqrt{\frac{U'(r)}{rU''(r) + 3U'(r)}}$$

EJERCICIO 8. Para que valores de U la magnitud Φ_{cir} es independiente de r

SOLUCIÓN: For $k > 0$

$$\Phi_{cir} = \frac{\pi}{\sqrt{k}}, \quad \iff \quad rU'' = (k-3)U' \iff$$

$$U' = br^{k-3} \iff U = \begin{cases} ar^{k-2} + c & k \neq 2 \\ b \log r + c & k = 2 \end{cases}$$

EJERCICIO 9. Supongamos que $U(r) \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow \infty$. Encuentre $\lim_{E \rightarrow \infty} \Phi(E)$.

SOLUCIÓN:

$$\frac{x_{\min}^2}{2} + U\left(\frac{M}{x_{\min}}\right) = \frac{x_{\max}^2}{2} + U\left(\frac{M}{x_{\max}}\right) = E$$

$$W^*(y) = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{x_{\max}^2} U\left(\frac{M}{yx_{\max}}\right)$$

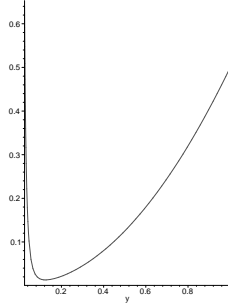
$$W^*(1) = W^*(y_{\min}) = \frac{E}{x_{\max}^2}$$

Suponemos que $\lim_{r \rightarrow 0} r^2 U(r) = 0$. Para $y > 0$, $\lim_{E \rightarrow \infty} W^*(y) = y^2/2$.

$$W^{*'}(y) = y - U'\left(\frac{M}{yx_{\max}}\right) \frac{M}{y^2 x_{\max}^3}$$

$$W^{*'}(\bar{y}) = 0 \iff \bar{y} = \frac{M}{r_0 x_{\max}}, \quad r_0^3 U'(r_0) = M^2.$$

$$W^*(\bar{y}) = \frac{1}{x_{\max}^2} \left(\frac{M^2}{2r_0^2} + U(r_0) \right)$$



Para $y_{\min} < y < \bar{y}$ tenemos

$$\frac{W^*(y_{\min}) - W^*(y)}{y - y_{\min}} > \frac{W^*(y_{\min}) - W^*(\bar{y})}{\bar{y} - y_{\min}} = m$$

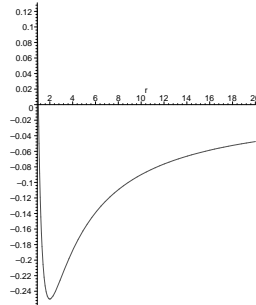
$$\int_{y_{\min}}^{\bar{y}} \frac{dy}{\sqrt{2(W^*(y_{\min}) - W^*(y))}} < \frac{1}{\sqrt{2m}} \int_{y_{\min}}^{\bar{y}} \frac{dy}{\sqrt{y - y_{\min}}}$$

$$\int_{y_{\min}}^{\bar{y}} \frac{dy}{\sqrt{2(W^*(y_{\min}) - W^*(y))}} = \sqrt{\frac{2(\bar{y} - y_{\min})}{m}} = \frac{\sqrt{2(\bar{y} - y_{\min})}}{\sqrt{W^*(y_{\min}) - W^*(\bar{y})}} \rightarrow 0$$

cuando $E \rightarrow \infty$ y

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \int_{\bar{y}}^1 \frac{dy}{\sqrt{2(W^*(y_{\min}) - W^*(y))}} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

EJERCICIO 10. Sea $U(r) = -kr^{-\beta}$, $0 < \beta < 2$. Encuentre $\lim_{E \rightarrow -0} \Phi(E)$



SOLUCIÓN:

$$V(r_0) = -kr_0^{-\beta} + \frac{M^2}{2r_0^2} = 0 \Rightarrow r_0^{\beta-2} M^2 = 2k$$

Como en el Ejercicio 9

$$W^*(y) = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{x_{\max}^2} U\left(\frac{M}{yx_{\max}}\right) = \frac{y^2}{2} - \frac{ky^{\beta} x_{\max}^{\beta-2}}{M^{\beta}}$$

Cuando $E \rightarrow -0$,

$$r_{\max} \rightarrow \infty, x_{\min} \rightarrow 0, r_{\min} \rightarrow r_0, x_{\max}^{\beta-2} \rightarrow \frac{M^{\beta}}{2k}, y_{\min} \rightarrow 0,$$

$$\int_{y_{\min}}^1 \frac{dy}{\sqrt{2(E - W^*(y))}} \rightarrow \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y^{\beta} - y^2}}$$

Utilizando la sustitución $y = (\sin \theta)^{2/(2-\beta)}$ obtenemos que el valor de esta integral es $\frac{\pi}{2-\beta}$

EJERCICIO 11. Muestre que si un campo es axialmente simétrico y conservativo, entonces su energía potencial tiene la forma $U = U(r, z)$ donde r, φ, z son coordenadas cilíndricas. En particular los vectores del campo yacen en planos a través del eje z .

SOLUCIÓN: Suponemos que el eje de simetría del campo conservativo $F = (\text{grad } U)^t$ es el eje z . Sea R_{φ} la rotación por el ángulo φ alrededor del eje z . Entonces

$$\begin{aligned} (\text{grad}(U \circ R_{\varphi})(x))^t &= (\text{grad } U(R_{\varphi} \cdot x) \cdot R_{\varphi})^t = R_{-\varphi} \cdot (\text{grad } U(R_{\varphi} \cdot x))^t \\ &= R_{-\varphi}^* (\text{grad } U)^t(x) = (\text{grad } U(x))^t \end{aligned}$$

Por lo tanto $\text{grad}(U \circ R_{\varphi} - U) = 0$ y así, hay un $c(e^{i\varphi}) \in \mathbb{R}$ tal que $U \circ R_{\varphi} - U = c(e^{i\varphi})$. Como $R_{\theta+\varphi} = R_{\theta} \circ R_{\varphi}$, tenemos que $c : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ es un homomorfismo continuo y por lo tanto constante.

Así, $U \circ R_{\varphi} = U \forall \varphi$ y entonces $\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$ □

EJERCICIO 12. Sea $|\cdot|$ la norma euclidiana. Muestre que las líneas rectas son mínimos de las acciones

$$I_1 = \int_a^b |\dot{q}|^2, \quad I_2 = \int_a^b |\dot{q}|^2$$

SOLUCIÓN: Sea $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x = q(a), y = q(b)$ y sea $p(t) = \frac{(b-t)x + (t-a)y}{b-a}$. Entonces $\dot{p} = \frac{y-x}{b-a}$,

$$|y-x|^2 = \int_a^b \langle \dot{q}, y-x \rangle \leq \int_a^b |\dot{q}| |y-x|,$$

$$|y-x| \leq \int_a^b |\dot{q}| \leq \sqrt{(b-a) \int_a^b |\dot{q}|^2},$$

$$\int_a^b |\dot{p}|^2 = \frac{|y-x|^2}{b-a} \leq \int_a^b |\dot{q}|^2.$$

EJERCICIO 13.

$$\varphi_t(\boldsymbol{\theta}) = t\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\theta} \pmod{1}$$

Por el teorema de recurrencia de Poincaré, $\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_m(B_\varepsilon(\mathbf{0})) \cap B_\varepsilon(\mathbf{0}) \neq \emptyset$. Si $\boldsymbol{\theta}$ es un punto de la intersección

$$|m\boldsymbol{\alpha}| \pmod{1} = |\varphi_m(\boldsymbol{\theta}) - \boldsymbol{\theta}| \pmod{1} < 2\varepsilon.$$

DEFINICIÓN 1. $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ son racionalmente independientes si

$$m_1\alpha_1 + \dots + m_k\alpha_k = 0, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{Z} \Rightarrow m_1 = \dots = m_k = 0$$

PROPOSICIÓN 1. Para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple

(A_k) Si $1, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ son racionalmente independientes, entonces $\{n\boldsymbol{\alpha} : n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en \mathbb{T}^k .

(B_k) Si $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ son racionalmente independientes, entonces $\{t\boldsymbol{\alpha} : t \in \mathbb{R}\}$ es denso en \mathbb{T}^k .

Demostración. Por inducción. B_1 es trivialmente cierto.

(B_k) \Rightarrow (A_k).

Sean $1, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ racionalmente independientes. Sean $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{T}^k, \varepsilon > 0$. Por el teorema de recurrencia $\exists m \in \mathbb{N}, \mathbf{r} \in \mathbb{Z}^k$ tal que $|m\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{r}| < \varepsilon$.

Como $m\alpha_1 - r_1, \dots, m\alpha_k - r_k$ son racionalmente independientes, $\{t(m\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{r}) : t \in \mathbb{R}\}$ es denso en \mathbb{T}^k . Así existe $s \in \mathbb{R}$ tal que

$$|\boldsymbol{\theta} - s(m\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{r})| \pmod{1} < \varepsilon, \quad n \leq s < n+1.$$

$$|\boldsymbol{\theta} - n(m\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{r})| \pmod{1} \leq |\boldsymbol{\theta} - s(m\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{r})| \pmod{1} + (s-n)|m\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{r}| < 2\varepsilon.$$

$(A_k) \Rightarrow (B_{k+1})$.

Si $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}$ son racionalmente independientes, $1, \frac{\alpha_1}{\alpha_{k+1}}, \dots, \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}}$ son racionalmente independientes.

Sean $\theta \in \mathbb{T}^k, \varepsilon > 0$, entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$|(\theta_1, \dots, \theta_k) - \frac{\theta_k}{\alpha_{k+1}}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) - \frac{n}{\alpha_{k+1}}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)| \pmod{1} < \varepsilon.$$

Como $\theta_{k+1} - \frac{\theta_k + n}{\alpha_{k+1}} \alpha_{k+1} = 0 \pmod{1}$,

$$|\theta - \frac{\theta_k + n}{\alpha_{k+1}} \alpha| \pmod{1} < \varepsilon.$$

EJERCICIO 14. Considere el primer dígito de los números de la sucesión $2^n : 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, \dots$. Aparece el dígito 7? Que dígito aparece mas frecuentemente, 7 u 8? Con cuánta mas frecuencia?

SOLUCIÓN: El primer dígito de 2^n es m , precisamente cuando

$$m 10^k \leq 2^n < (m+1)10^k, k \in \mathbb{N}.$$

Tomando logaritmo de base 10

$$k + \log m \leq n \log 2 < k + \log(m+1),$$

o sea

$$n \log 2 \in (\log m, \log(m+1)) \pmod{1}.$$

Por el teorema de recurrencia de Poincaré la sucesión $\{n \log 2 \pmod{1}\}$ es densa en \mathbb{T}^1 . De hecho la frecuencia con la que los términos de la sucesión caen en cualquier intervalo (a, b) es precisamente $b - a$. Un esbozo de la demostración de la última afirmación es como sigue:

Se prueba que para cualquier $f \in L^2(\mathbb{T}^1)$, la sucesión de promedios a lo largo de la órbita

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x + k\alpha)$$

converge casi dondequiera a una $\hat{f} \in L^2(\mathbb{T}^1)$. Es fácil ver que $\hat{f}(x) = \hat{f}(x + \alpha)$ casi dondequiera y que

$$\int_0^1 f = \int_0^1 \hat{f}.$$

Desarrollando en serie de Fourier

$$\hat{f}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \exp(2\pi i k x)$$

tenemos que $a_k = a_k \exp(2\pi i k \alpha) \forall k \in \mathbb{Z}$. Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, entonces $a_k = 0$ si $k \neq 0$, o sea que $\hat{f} = \text{constante} = \int_0^1 f$. Utilizando $f = \chi_{(a,b)}$ tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{0 \leq k < n : x + k\alpha \in (a, b) \pmod{1}\} = b - a.$$

EJERCICIO 15. Muestre que $S0(3)$ es difeomorfo al espacio proyectivo \mathbb{P}^3 .

SOLUCIÓN: Definimos el conjunto de cuaterniones como

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Identificamos a \mathbb{C} con el subespacio de \mathbb{H} de matrices diagonales. Sean $j := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $k = ij := \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$. Entonces

$$\mathbb{H} = \{a + jb : a, b \in \mathbb{C}\} = \{x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k : x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Definiendo $\bar{x} = x_0 - x_1i - x_2j - x_3k$ tenemos que $x\bar{x} = |x|^2$. Así, $\forall x \in \mathbb{H} - \{0\}$ hay un inverso $x^{-1} = \bar{x}/|x|^2$.

El conjunto de cuaterniones unitarios

$$S^3 = \{a + jb : |a|^2 + |b|^2 = 1\} = \{u \in \mathbb{H} : \sum_{i=0}^3 u_i^2 = 1\},$$

actúa sobre $\mathbb{R}^3 = \{x \in \mathbb{H} : x_0 = 0\}$ mediante

$$u \cdot x = \bar{u}xu.$$

Así, cada $u \in S^3$ define un elemento $h(u)$ de $S0(3)$. Note que $h(u)$ es la identidad si y sólo si $u = \pm 1$ y que $h(u) = h(v)$ si y sólo si $h(u\bar{v})$ es la identidad, o sea $u = \pm v$. Por lo tanto $S0(3)$ es difeomorfo al espacio proyectivo \mathbb{P}^3 .

EJERCICIO 16. Muestre que en un espacio vectorial la integral de una forma cerrada sobre cualquier ciclo es cero.

SOLUCIÓN: Sea c un k -cubo. Consideremos el cono pc sobre c con vertice en cero o sea el el $k+1$ cubo $pc(t, x) = tc(x)$. Extendemos la definición del cono a cualquier cadena por linealidad.

$$\partial c = \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha=0,1}}^k (-1)^{i+\alpha} c_{i,\alpha}$$

donde $c_{i,\alpha}(x^1, \dots, x^{n-1}) = c(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \dots, x^{n-1})$. Probemos que

$$p\partial + \partial p = id$$

$$p(c_{i,\alpha})(t, x^1, \dots, x^{n-1}) = tc(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \dots, x^{n-1}),$$

$$(pc)_{1,\alpha}(t, x^1, \dots, x^{n-1}) = pc(\alpha, t, x^1, \dots, x^{n-1}) = \alpha c(t, x^1, \dots, x^{n-1})$$

$$\begin{aligned} (pc)_{i,\alpha}(t, x^1, \dots, x^{n-1}) &= (pc)(t, x^1, \dots, x^{i-2}, \alpha, x^{i-1}, \dots, x^{n-1}) \\ &= tc(t, x^1, \dots, x^{i-2}, \alpha, x^{i-1}, \dots, x^{n-1}), \quad i > 1 \end{aligned}$$

Así

$$(pc)_{i,\alpha} = \begin{cases} 0 & i = 1, \alpha = 0 \\ c & i = 1, \alpha = 1, \\ p(c_{i-1,\alpha}) & i > 1 \end{cases}$$

$$p\partial c + \partial pc = \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha=0,1}}^k (-1)^{i+\alpha} p(c_{i,\alpha}) + \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha=0,1}}^{k+1} (-1)^{i+\alpha} (pc)_{i,\alpha} = c - 0.$$

Si $d\omega = 0$ y $\partial c = 0$, entonces

$$\int_c \omega = \int_{\partial pc} \omega = \int_{pc} d\omega = 0$$

EJERCICIO 17. Muestre que toda forma cerrada en un espacio vectorial es exacta

SOLUCIÓN: Para ω k forma diferencial en \mathbb{R}^n definimos la $k-1$ forma $p\omega$ por

$$\int_c p\omega = \int_{pc} \omega.$$

Entonces

$$\int_c pd\omega + dp\omega = \int_{pc} d\omega + \int_{\partial pc} p\omega = \int_{\partial pc} \omega + \int_{pc} \omega = \int_c \omega,$$

$$pd\omega + dp\omega = \omega.$$

Si $d\omega = 0$, entonces $\omega = dp\omega$.

Para dar una fórmula para $p\omega$ sean $v_1, \dots, v_{k-1} \in \mathbb{R}^n$ y consideremos el paralelogramo

$$c_\varepsilon(s_1, \dots, s_{k-1}) = x + s_1 v_1 + \dots + s_{k-1} v_{k-1}, \quad s_i \in [0, \varepsilon]$$

$$\begin{aligned}
p\omega_x(v_1, \dots, v_{k-1}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1-k} \int_{[0, \varepsilon]^{k-1}} \omega_{c_\varepsilon(s)}(v_1, \dots, v_{k-1}) ds = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1-k} \int_{c_\varepsilon} p\omega \\
\int_{c_\varepsilon} p\omega &= \int_{p c_\varepsilon} \omega = \int_{[0, \varepsilon]^{k-1}} \int_0^1 \omega_{tc_\varepsilon(s)}(c_\varepsilon(s), tv_1, \dots, tv_{k-1}) ds dt \\
p\omega_x(v_1, \dots, v_{k-1}) &= \int_0^1 \omega_{tx}(x, tv_1, \dots, tv_{k-1}) dt.
\end{aligned}$$

EJERCICIO 18. Sea X un campo vectorial en M y sea ω una k forma diferencial. Definimos la $k-1$ forma $i_X\omega$ por

$$i_X\omega(v_1, \dots, v_{k-1}) = \omega(X, v_1, \dots, v_{k-1}).$$

Pruebe la fórmula

$$i_X d + di_X = L_X.$$

SOLUCIÓN: Sea g_t el flujo definido por el X . Para c una l cadena definamos la $l+1$ cadena Hc mediante $Hc(t, x) = g_t c(x)$. Entonces

$$g_1 c - c = \partial Hc + H\partial c.$$

$$\begin{aligned}
\int_{Hc} \eta &= \int_{[0,1]^l} \eta(X(g_t c), g_{t*} D_1 c, \dots, g_{t*} D_{k-1} c) \\
&= \int_{[0,1]^l} g_t^*(i_X \eta)(D_1 c, \dots, D_{k-1} c) = \int_0^1 \left(\int_c g_t^*(i_X \eta) \right) dt
\end{aligned}$$

Como $g_t^* L_X \omega = \frac{dg_t^* \omega}{dt}$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_c g_t^* L_X \omega \right) dt &= \int_c g_1^* \omega - \omega = \int_{g_1 c - c} \omega = \int_{\partial Hc + H\partial c} \omega = \\
\int_{Hc} d\omega + \int_0^1 \left(\int_{\partial c} g_t^*(i_X \omega) \right) dt &= \int_0^1 \left(\int_c g_t^*(i_X d\omega) + g_t^* d(i_X \omega) \right) dt
\end{aligned}$$

Así

$$\int_c L_X \omega = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_0^s \left(\int_c g_t^* L_X \omega \right) dt = \int_c i_X d\omega + g_t^* di_X \omega$$

EJERCICIO 19. Muestre que la transformación $A : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, $(p, q) \mapsto (P, Q)$, es canónica si y sólo si el corchete de Poisson de cualesquiera dos funciones en las variables (p, q) y (P, Q) coinciden:

$$\{F \circ A, H \circ A\} = \{F, H\} \circ A$$

SOLUCIÓN: Sea ω la forma simpléctica canónica de \mathbb{R}^{2n} . Supongamos que A es canónica, o sea $A^*\omega = \omega$. Sean $x, v \in \mathbb{R}^{2n}$, entonces

$$\begin{aligned}\omega_x(\text{Id}(F \circ A)_x, v) &= -d(F \circ A)_x v = -dF_{A(x)} A_{*x} v = \omega_{A(x)}(\text{Id}F_{A(x)}, A_{*x} v) \\ &= (A^*\omega)_x(A_{*x}^{-1} \text{Id}F_{A(x)}, v) = \omega((A_*^{-1} \text{Id}F)_x, v)\end{aligned}$$

O sea que $\text{Id}(F \circ A) = A_*^{-1} \text{Id}F$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\{F \circ A, H \circ A\} &= \omega(\text{Id}(H \circ A), \text{Id}(F \circ A)) = (A^*\omega)(\text{Id}(H \circ A), \text{Id}(F \circ A)) \\ &= (A^*\omega)(A_*^{-1} \text{Id}H, A_*^{-1} \text{Id}F) = \omega(\text{Id}H, \text{Id}F) \circ A = \{F, H\} \circ A\end{aligned}$$

Recíprocamente, si $\{P_i, P_j\} = \{Q_i, Q_j\} = 0$, $\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}$, entonces

$$dP_1, \dots, dP_n, dQ_1, \dots, dQ_n$$

es en cada x una base de $T_x^* \mathbb{R}^{2n}$ y como $dF(\text{Id}H) = \{F, H\}$, la base dual de $T_x \mathbb{R}^{2n}$ es

$$-IdQ_1, \dots, -IdQ_n, IdP_1, \dots, IdP_n.$$

Como $\omega(\text{Id}P_i, \text{Id}P_j) = \omega(\text{Id}Q_i, \text{Id}Q_j) = 0$, $\omega(\text{Id}P_i, \text{Id}Q_j) = \delta_{ij}$, tenemos que

$$\omega = \sum_{i < j} dP_i \wedge dQ_j = A^*\omega$$

EJERCICIO 20. Pruebe que el corchete de Poisson en una variedad simpléctica satisface la identidad de Jacobi.

Sean A, B, C funciones reales y sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ los campos hamiltonianos correspondientes. Entonces

$$\begin{aligned}\{\{A, B\}, C\} + \{\{C, A\}, B\} &= \mathbf{C}(\mathbf{B}(A)) - \mathbf{B}(\mathbf{C}(A)) = [\mathbf{C}, \mathbf{B}](A) \\ \{\{C, A\}, B\} + \{\{B, C\}, A\} &= [\mathbf{B}, \mathbf{A}](C) \\ \{\{B, C\}, A\} + \{\{A, B\}, C\} &= [\mathbf{A}, \mathbf{C}](B),\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}0 &= d\omega(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = \mathbf{A}(\omega(\mathbf{B}, \mathbf{C})) - \mathbf{B}(\omega(\mathbf{A}, \mathbf{C})) + \mathbf{C}(\omega(\mathbf{A}, \mathbf{B})) \\ &\quad - \omega([\mathbf{A}, \mathbf{B}], \mathbf{C}) + \omega([\mathbf{A}, \mathbf{C}], \mathbf{B}) - \omega([\mathbf{B}, \mathbf{C}], \mathbf{A}) = \\ &\{\{C, B\}, A\} - \{\{C, A\}, B\} + \{\{B, A\}, C\} - [\mathbf{A}, \mathbf{B}](C) + [\mathbf{A}, \mathbf{C}](B) - [\mathbf{B}, \mathbf{C}](A) \\ &= \{\{C, B\}, A\} - \{\{C, A\}, B\} + \{\{B, A\}, C\} + \{\{C, A\}, B\} \\ &+ \{\{B, C\}, A\} + \{\{A, B\}, C\} + \{\{C, A\}, B\} + \{\{B, C\}, A\} + \{\{A, B\}, C\} \\ &= \{\{C, A\}, B\} + \{\{B, C\}, A\} + \{\{A, B\}, C\}.\end{aligned}$$