Introducción a la Geometría Simpléctica y la Dinámica Hamiltoniana

Héctor Sánchez Morgado

Instituto de Matemáticas, UNAM, Ciudad Universitaria
C. P. 04510, Cd. de México, México.

Índice general

Capítulo 1

Algebra lineal simpléctica

1. Formas simplécticas

DEFINICIÓN 1.1. Sea V espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una forma **simpléctica** en V es una función bilineal $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ que

- Es **antisimétrica** o sea $\omega(v,w) = -\omega(w,v)$ o equivalentemente $\omega(v,v) = 0$.
- No es **degenerada** o sea que

$$\omega(v.w) = 0\, \forall w \in V \to v = 0$$

Si ω es una forma simpléctica en V decimos que (V,ω) es un espacio lineal simpléctico.

Dada una base $\boldsymbol{e} = \{e_1,\ldots,e_n\}$ de V defina la matriz $\omega_{\boldsymbol{e}} = (\omega_{ij}) = (\omega(e_i,e_j)$. Entonces ω es una forma simpléctica si y sólo si $\omega_{\boldsymbol{e}}$ es antisimétrica e invertible.

PROPOSICIÓN 1.1. *Sea $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ una funcion bilineal antisimétrica. Entonces hay una base* **e** *de V tal que*

$$\omega_{\boldsymbol{e}} = \begin{bmatrix} 0 & E_m & 0 \\ -E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde E_m es la matriz identidad $m \times m$.

Por lo tanto, si ω es simpléctica entonces hay una base **e** *llamada* **simpléctica** *tal que*

$$\omega_{\boldsymbol{e}} = \begin{bmatrix} 0 & E_m \\ -E_m & 0 \end{bmatrix}$$

y $\dim V = 2m$.

Demostración.. Si $\omega \neq 0$ escogemos $e_1, f_1 \in V$ tal que $\omega(e_1, f_1) = 1$. Sea

$$V_1 = \{v \in V : \omega(v,e_1) = \omega(v,f_1) = 0\}$$

Si $\omega|V_1 \times V_1$ no es cero escogemos $e_2, f_2 \in V_1$ tal que $\omega(e_2,f_2) = 1$. Continuando el proceso construimos vectores linealmente independientes $e_1,\ldots e_m, f_1 \ldots f_m$ tales que poniendo $e_{m+j} = f_j, j = 1,\ldots m$ y

$$V_k = \{v \in V : \omega(v,e_j) = 0, j = 1,\ldots 2k\}$$

tenemos que $\omega|V_k \times V_k = 0$. Si $V_k = \{0\}$, ω es simpléctica. En otro caso escogemos $\{e_{2m+1}, \dots e_n\}$ base de V_k. $\square$

Para el espacio vectorial V, denotemos por V^* al espacio dual, por $V^* \otimes V^*$ al espacio de funciones bilineales y por $\wedge^2(V)$ al espacio de funciones bilineales antisimétricas. Analogamente definimos el espacio $\wedge^k(V)$ de funciones multilineales antisimétricas $\omega : V^k \to \mathbb{R}$. Dados $h, g \in V^*$ definimos $g \otimes h \in V^* \otimes V^*$ y $g \wedge h \in \wedge^2(V)$ mediante

$$g \otimes h(v, w) = g(v)h(w)$$

$$g \wedge h(v, w) = g(v)h(w) - h(w)g(v)$$

Dada la base $\boldsymbol{e}$ consideremos la base dual $= \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ definida por

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Si $\omega \in \wedge^2(V)$ entonces

$$\omega = \sum_{i<j} \omega(e_i, e_j) e_i^* \wedge e_j^*.$$

La Proposición 1.1 dice que hay una base $\boldsymbol{e}$ tal que

$$\omega = \sum_i e_i^* \wedge e_{i+m}^*.$$

Si $\phi_1 \dots, \phi_k \in V^*$, definimos la función multilineal $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k : V^k \to \mathbb{R}$ mediante

$$\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k(v_1, \dots, v_k) = \det\Big(\phi_i(v_j)\Big).$$

Ejemplo 1.1. Sea $V = \mathbb{R}^3$ con el producto escalar $\langle , \rangle$ y el producto vectorial $\times$ usuales. Para $A \in V$, definimos $\omega_A^1 \in V^*, \omega_A^2 \in \wedge^2 V^*$ mediante

$$\omega_A^1(v) = \langle A, v\rangle, \quad \omega_A^2(v, w) = \langle A, v \times w\rangle = \det(A, v, w)$$

Sean $A, B \in V$.

$$\begin{aligned} \omega_A^1 \wedge \omega_B^1(v, w) &= \omega_A^1(v)\omega_B^1(w) - \omega_A^1(w)\omega_B^1(v) = \langle A, v\rangle\langle B, w\rangle - \langle A, w\rangle\langle B, v\rangle \\ &= \langle A, B \times (v \times w)\rangle = \langle A \times B, v \times w\rangle = \omega_{A\times B}^2(v, w), \end{aligned}$$

por lo tanto $\omega_A^1 \wedge \omega_B^1 = \omega_{A\times B}^2$.

Sea e_1, e_2, e_3 la base canónica de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}\omega_A^1 \wedge \omega_B^2(e_1, e_2, e_3) &= \frac{1}{2}\sum_{\sigma\in S_3} \operatorname{sgn}\sigma\, \omega_A^1(e_{\sigma(1)})\omega_B^2(e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}) = \\ &\omega_A^1(e_1)\omega_B^2(e_2, e_3) + \omega_A^1(e_2)\omega_B^2(e_3, e_1) + \omega_A^1(e_3)\omega_B^2(e_1, e_2) = \\ &\quad \langle A, e_1\rangle\langle B, e_1\rangle + \langle A, e_2\rangle\langle B, e_2\rangle + \langle A, e_3\rangle\langle B, e_3\rangle = \langle A, B\rangle,\end{aligned}$$

por lo tanto $\omega_A^1 \wedge \omega_B^2 = \langle A, B\rangle$ det.

Corolario 1.1. *Sean V un espacio vectorial de dimensión $2k$ y $\omega \in \wedge^2(V)$. Entonces ω es simpléctica si y sólo si $\omega^k\omega \wedge \cdots \wedge \omega \neq 0$.*

Demostración. Si $\omega \in \wedge^2(V)$, por la Proposición 1.1 hay una base $\boldsymbol{e}$ de V tal que $\omega = \sum_{i\leq m} e_i^* \wedge e_{i+1}^*$. Así

$$\omega^m = c_m e_1^* \wedge \cdots \wedge e_{2m}^*$$

donde $c_m \neq 0$. Si $m < k$ entonces $\omega^k = 0$. Si $m = k$ entonces $\omega^k \neq 0$. $\square$

Si $F : W \to V$ es lineal definimos $F^* : \wedge^k(V) \to \wedge^k(W)$ mediante

$$F^*\eta(w_1, \ldots, w_k) = \eta(F(w_1), \ldots, F(w_k)).$$

Notemos que $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$ para $F : W \to V, G : U \to W$ lineales.

Sea (V, ω) un espacio simpléctico, una transformación lineal $F : V \to V$ se llama simpléctica si preserva ω, es decir $F^*\omega = \omega$. El conjunto $\mathrm{Sp}(V, \omega)$ de transformaciones simplécticas es un grupo llamado grupo simpléctico.

Ejemplo 1.2. En $\mathbb{R}^{2m}$ consideremos la forma simpléctica canónica

$$\omega_0(x, y) = x \cdot J_m y \quad J_m = \begin{bmatrix} 0 & E_m \\ -E_m & 0 \end{bmatrix}$$

Denotaremos Simp(m)=Sp($\mathbb{R}^{2m}, \omega_0$), entonces $F \in$ Simp(m) si y sólo si para toda pareja $x, y \in \mathbb{R}^{2m}$

$$x \cdot J_m y = (Fx) \cdot J_m y = x \cdot F^T J_m F y$$

si y sólo si $F^T J_m F = J_m$. Escribiendo $F = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, la igualdad $F^T J_m F = J_m$ queda

$$\begin{bmatrix} 0 & -E_m \\ E_m & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -E_m \\ E_m & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^TC - A^TC & C^TB - A^TD \\ D^TA - B^TC & D^TB - B^TD \end{bmatrix}$$

que dice que A^TC, B^TC sean simétricas y $D^TA - B^TC = E_m$.

Ejemplo 1.3. Sea W un espacio vectorial cualquiera que llamaremos espacio de **configuragión**. Consideremos el espacio **fase** $V = W \oplus W^* = \{(v,h) : v \in W, h \in W^*\}$. Definamos la forma simpléctica ω en V mediante

$$\omega((v_1,h_1),(v_2,h_2)) = h_1(v_2) - h_2(v_1).$$

Cualquier isomorfismo lineal $f : W \to W$ induce una transformación simpléctica $F : V \to V$ dada por $F(v,h) = (f(v), h \circ f^{-1})$.

2. Subespacios de un espacio simpléctico

Definición 1.2. Sea (V,ω) un espacio lineal simpléctico y sea W un subespacio vectorial de V. Definimos

$$W^\perp = \{v \in V : \omega(v,w) = 0 \forall w \in W\}, \quad \operatorname{rad} W = W \cap W^\perp.$$

Si $W \subset W^\perp$ decimos que W es **isotrópico**.
Si $W^\perp \subset W$ decimos que W es **coisotrópico**.
Si $W^\perp = W$ decimos que W es **lagrangiano**.
Si $\operatorname{rad} W = \{0\}$ decimos que W es **simpléctico**.

Corolario 1.2.

- $(W^\perp)^\perp = W$
- *Si* $W_1 \subset W_2$, *entonces* $W_2^\perp \subset W_1^\perp$
- $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$, $W_1^\perp \cap W_2^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.
- $\dim W^\perp = \dim V - \dim W$.
- $W/\operatorname{rad} W$ *con* $\omega^*(v + \operatorname{rad}, w + \operatorname{rad}) = \omega(v,w)$ *es un espacio simpléctico.*

Proposición 1.2. *Sea (V,ω) un espacio lineal simpléctico y sea W un subespacio vectorial de V. Sea U subespacio simpléctico tal que*

$$W = \operatorname{rad} W \oplus U.$$

Sea $\{e_1, \dots e_r\}$ base de $\operatorname{rad} W$, entonces existen $f_1, \dots f_r \in U^\perp$ tales que $\{e_1, \dots e_r, f_1, \dots f_r\}$ es una base simpléctica del subespacio que genera. Así

$$\langle f_1, \dots f_r \rangle \oplus W$$

es un subespacio simpléctico.

Demostración. (Por inducción). Supongamos que hemos escogido $\{f_1, \dots f_r\} \in U$ tales que $\{e_1, \dots e_r, f_1, \dots f_s\}$ es una base simpléctica del subespacio que genera. Sea

$$X = \langle e_1, \dots e_s \rangle \oplus U \subset W.$$

Como $e_{s+1} \in \operatorname{rad} W \subset W^\perp \subset X^\perp$ y $e_{s+1} \notin X \supset \operatorname{rad} X = \operatorname{rad} X^\perp$, hay un $f_{s+1} \in X^\perp \subset U^\perp$ con $\omega(e_{s+1}, f_{s+1}) = 1$. $\square$

Corolario 1.3. *Sea (V,ω) un espacio lineal simpléctico y sea W un subespacio lagrangiano. Entonces existe un subespacio lagrangiano U tal que*

$$V = W \oplus U.$$

Demostración. Sea $\{e_1,\dots e_m\}$ base de $W = \operatorname{rad} W$. Entonces existen $\{f_1,\dots f_m\}$ tales que $\{e_1,\dots e_m, f_1,\dots f_m\}$ es una base simpléctica de V. □

Sea (V,ω) un espacio lineal simpléctico. Denotaremos por $\mathcal{L}(V)$ la colección de subespacios lagrangianos de V. El grupo simpléctico actúa en $\mathcal{L}(v)$. Mas aún, se sigue del Corolario 1.3 que dados $L_0, L_1 \in \mathcal{L}(V)$ existe $g\in$Sp(V,ω) tal que $g(L_0) = L_1$. Dado $L_0 \in \mathcal{L}(V)$ consideremos el subgrupo de isotropía

$$G_0 = \{g \in \mathrm{Sp}(W,\omega) : g(L_0) = L_0\}$$

con el cual establecemos la identificación $\mathrm{Sp}(V,\omega)/G_0 \cong \mathcal{L}(V)$.

Consideremos el subespacio lagrangiano $L_0 = \mathbb{R}^m \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^{2m}$, entonces $g = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in$ Sp(m) pertenece a G_0 si y sólo si $C = 0$. Así

$$G_0 = \{\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & (A^{-1})^T \end{bmatrix} : A^{-1}B \,\text{es simétrica}\}.$$

Consideremos $\mathbb{R}^{2m}$ con la estructura simpléctica canónica

$$\omega_0(x,y) = x \cdot J_m y \quad J_m = \begin{bmatrix} 0 & E_m \\ -E_m & 0 \end{bmatrix}$$

Identificando $\mathbb{R}^{2m}$ con $\mathbb{C}^m$ escribamos $(x,y) = x+iy$. Como $i(x+iy) = -y+ix$ tenemos que multiplicar por i corresponde a aplicar $-J_m$.

Una transformacion lineal $T : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$ es $\mathbb{C}$ lineal si y sólo si $T(iz) = iT(z)$ o sea $TJ_m = J_mT$. Escribiendo $T(x,y) = (Bx+Ey, Cx+Dy)$ tenemos que T es $\mathbb{C}$ lineal si y sólo si $B = D, E = -C$ y la matriz compleja de T es $D+iC$.

Para A matriz real $2m \times 2m$ tenemos que

$$\begin{aligned} A \in \mathrm{Sp(m)} &\iff A^T J_m A = JA_m \\ A \in \mathrm{O(2m)} &\iff A^T A = E_{2m} \\ A \in \mathrm{GL(n,\mathbb{C})} &\iff AJ_m = J_m A, \det A \neq 0 \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que
Sp(m) $\cap$ O(2m) = Sp(m) $\cap$ GL(n,$\mathbb{C}$) = GL(n,$\mathbb{C}$) $\cap$ O(2m).

Por otra parte

$$A = \begin{bmatrix} D & -C \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathrm{O(2m)} \iff D^TD + C^TC = E_m, C^TD = D^TC$$
$$\iff (D^T - iC^T)(D + iC) = E_m.$$

Por lo tanto podemos escribir GL(n,$\mathbb{C}$) $\cap$ O(2m) = U(m).

Consideremos ahora un subespacio $L \subset \mathbb{R}^{2m}$ de dimensión. Con una base $\{v_1, \ldots, v_m\}$ de L construímos un matriz $2m \times m$ $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ que representa una transformación lineal $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{2m}$ cuya imagen es L. Así L es un subespacio lagrangiano si y sólo si

$$[X^TY^T]J_m \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = J_m$$

o sea que X^TY es simétrica. Si además suponemos que la base es ortonormal tenemos $X^TX + Y^TY = E_m$ y entonces el subespacio lagrangiano L es la imagen bajo $X + iY \in$ U(m) del subespacio horizontal $H = \mathbb{R}^m + i\{0\}$. Por otra parte, una transformación $D + iC \in$ U(m) deja fijo H si y sólo si $C = 0$ y así $D \in$ O(m). Tenemos entonces la representación del conjunto de subespacios lagrangianos de $\mathbb{R}^{2m}$

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2m}) \cong \mathrm{U(m)/O(m)}.$$

Definición 1.3. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, un isomorfismo $J : V \to V$ se llama *estructura compleja* en V si $J^2 = I$. Cuando (V, ω) es un espacio simpléctico, decimos que la estructura compleja J es compatible con ω si J es simpléctica. En tal caso, la forma bilineal

$$g(v, w) = \omega(v, Jw)$$

satisface

$$\begin{aligned} g(Jv, w) &= \omega(v, w) \\ g(v, w) &= g(w, v) \end{aligned}$$
$$g(Jv, Jw) = g(v, w).$$

Si además $g(v, v) \geq 0$, decimos que J es una estructura compleja compatible positiva.

Teorema 1.4. *Todo espacio simpléctico* (V, ω) *posee una estructura compleja compatible positiva.*

Demostración. Sea γ un producto escalar en V y definamos el isomorfismo A de V mediante

$$\gamma(Av, w) = \omega(v, w).$$

Por la antisimtría de ω tenemos

$$\gamma(Av, w) = -\gamma(v, Aw)$$
$$\gamma(A^2 v, w) = -\gamma(Av, Aw) = \gamma(v, A^2 w)$$

o sea que A^2 es autoadjunto y $\gamma(A^2 v, v) \leq 0$. Por lo tanto V tiene una base γ ortogonal $\boldsymbol{e}$ formada por eigenvectores de A^2 con eigenvalores $-\lambda_j^2$, $\lambda_j > 0$. Sea B el isomorfismo de V cuya la matriz en la base $\boldsymbol{e}$ es $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Entonces B es el único operador positivo autoadjunto tal que $B^2 = -A^2$. Se puede también definir B por

$$B = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha \sqrt{z}(zE + A^2)^{-1} dz \tag{1.1}$$

donde α es una curva cerrada en el semiplano $\Re z > 0$ que encierra los valores $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$. La exprsión (1.1) implica que $AB = BA$. Definiendo $J = AB^{-1}$ tenemos

$$\begin{aligned} J^2 &= A^2 B^{-2} = -E \\ \omega(Jv, Jw) &= \gamma(AJv, Jw) = -\gamma(Bv, Jw) = -\gamma(v, Aw) = \omega(v, w) \\ g(v, v) &= \omega(v, Jv) = \gamma(Av, Jw) = -\gamma(v, AJw) = \gamma(v, Bv) \geq 0 \end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 2

Variedades Simplécticas

1. Variedades Simplécticas

DEFINICIÓN 2.1. Sea M una variedad, una estructura simpléctica en M es una 2-forma que no es degenerada (en ningún punto) y que es **cerrada** o sea $d\omega = 0$. En tal caso decimos que (M, ω) es una variedad simpléctica. Si (M, ω) una variedad simpléctica, la transformación diferenciable $\varphi : M \to M$ se llama simpléctica si $\varphi^*\omega = \omega$. El campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ es simpléctico si su flujo consiste de transformaciones simplécticas o equivalentemente $L_X\omega = 0$ o lo que es lo mismo $d(i(X)\omega) = 0$.

DEFINICIÓN 2.2. Sea ω una 2-forma no degenerada en la variedad M. Dada $H : M \to \mathbb{R}$ hay un único $X_H \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $i(X_H)\omega = dH$ y se conoce como el campo **hamiltoniano** correspondiente a H. Para $H, K : M \to \mathbb{R}$ diferenciables definimos el corchete de Poisson

$$\{H, K\} = \omega(X_K, X_H) = dK(X_H) = X_H(K)$$

PROPOSICIÓN 2.1. *Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ son simplécticos entonces $[X, Y]$ es el campo hamiltoniano correspondiente a $\omega(Y, X)$. En particular $X_{\{H,K\}} = [X_H, X_K]$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
X(i(Y)\omega(Z)) &= L_X(i(Y)\omega)(Z) + i(Y)\omega(L_X Z) \\
&= d(\omega(Y, X))(Z) + i(X)d(i(Y)\omega)(Z) + \omega(Y, L_X Z) \\
&= d(\omega(Y, X))(Z) + \omega(Y, L_X Z) \\
X(\omega(Y, Z)) &= L_X\omega(Y, Z) + \omega(L_X Y, Z) + \omega(Y, L_X Z) \\
&= \omega([X, Y], Z) + \omega(Y, L_X Z).
\end{aligned}$$

Entonces $d(\omega(Y, X))(Z) = \omega([X, Y], Z)$. □

PROPOSICIÓN 2.2. *Sea ω una 2-forma no degenerada en la variedad M. Sean $A, B, C : M \to \mathbb{R}$ diferenciables y sean X_A, X_B, X_C los campos hamiltonianos correspondientes. Entonces*

$$d\omega(X_A, X_B, X_C) = \{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\}$$

Así, ω es cerrada si y só;o si $\{,\}$ satisface la identidad de Jacobi.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\{B,\{C,A\}\}+\{C,\{A,B\}\} &= X_B(X_C(A)-X_C(X_B(A))) = [X_B,X_C](A)\\
\{A,\{B,C\}\}+\{B,\{C,A\}\} &= [X_A,X_B](C)\\
\{C,\{A,B\}\}+\{A,\{B,C\}\} &= [X_C,X_A](B),
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
d\omega(X_A,X_B,X_C) &= X_A(\omega(X_B,X_C)) - X_B(\omega(X_A,X_C)) + X_C(\omega(X_A,X_B))\\
&\quad - \omega([X_A,X_B],X_C) + \omega([X_A,X_C],X_B) - \omega([X_B,X_C],X_A)\\
&= \{A,\{C,B\}\} - \{B,\{C,A\}\} + \{C,\{B,A\}\}\\
&\quad + [X_A,X_B](C) - [X_A,X_C](B) + [X_B,X_C](A)\\
&= \{A,\{C,B\}\} - \{B,\{C,A\}\} + \{C,\{B,A\}\} + \{A,\{B,C\}\}\\
&\quad +\{B,\{C,A\}\} + \{C,\{A,B\}\} + \{A,\{B,C\}\} + \{B,\{C,A\}\} + \{C,\{A,B\}\}\\
&= \{A,\{B,C\}\} + \{B,\{C,A\}\} + \{C,\{A,B\}\}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.1. $\mathbb{R}^{2m}$ con la estructura canónica $\omega_0(x,y) = x \cdot J_m y$, $x,y \in T_p\mathbb{R}^{2m} \cong \mathbb{R}^{2m}$, es una variedad simpléctica

Ejemplo 2.2. El haz cotangente de una variedad es el conjunto

$$T^*M = \bigcup_{q\in M} T_qM^* = \{(q,p) : q \in M, p \in T_qM^*\}$$

con la proyeccion $\pi : TM \to M$, $\pi(q,p) = q$.

Dada una carta de coordenadas $\varphi : U \subset M \to \mathbb{R}^m$, $\varphi = (x^1,\dots,x^m)$, para cada $q \in U$, $dx^1_q,\dots,dx^m_q$ es una base de T_qM^*. Así cualquier $p \in T_qM^*$ se esccribe $p = \sum_i y_i dx^i_q$ y entonces $(x^1,\dots,x^m,y^1,\dots,y^m) : T^*U \to \mathbb{R}^{2m}$ es una carta de coordenadas.

La 1-forma natural de $\eta : T^*M \to T^*(T^*M)$ se define por $\eta_{(q,p)} = p \circ D\pi_{(q,p)}$. Definimos $\omega = -d\eta$.

Escribiendo $w \in T_{(q,p)}(T^*M)$ en coordenadas locales

$$w = \sum_{i=1}^m a_i\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_{(q,p)} + b_i\Big(\frac{\partial}{\partial y_i}\Big)_{(q,p)}, \tag{2.1}$$

$$D\pi_{(q,p)}w = \sum_{i=1}^m a_i\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_q \tag{2.2}$$

$$\eta_{(q,p)}(w) = \sum_{i=1}^m y_i a_i = (\sum_{i=1} y_i dx^i_{(q,p)})(w) \tag{2.3}$$

$$\omega = \sum_{i=1}^m dx^i \wedge dy^i. \tag{2.4}$$

Por lo tanto ω es simpléctica.
Sean $H, K : T^*M \to \mathbb{R}$ diferenciables. Escribiendo

$$\begin{aligned}
X_H &= \sum_{j=1}^{m} A_j \frac{\partial}{\partial x_j} + B_j \frac{\partial}{\partial y_j}; \\
dH = i(X_H)\omega &= \sum_{i=1}^{m} dx^i \wedge dy^i (\sum_{j=1}^{m} A_j \frac{\partial}{\partial x_j} + B_j \frac{\partial}{\partial y_j}, \cdot) \\
\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial y_i} &= \sum_{i=1}^{m} A_i dy^i - B dx^i; \\
X_H &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i}; \\
\{H, K\} &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{\partial K}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial K}{\partial y_i}
\end{aligned}$$

2. Grupos de Lie

Definición 2.3. Un grupo $(G, \cdot)$ es un grupo de Lie si es una variedad diferenciable y la transformación $\mu : G \times G \to G$ dada por $\mu(g, h) = g \cdot h^{-1}$ es diferenciable.

Sea G un grupo de Lie. Denotaremos por e la identidad de G. Para cada $a \in G$ definimos las traslaciones izquierda y derecha $L_a, R_a : G \to G$ y el automorfismo interior I_a mediante $L_a(g) = a \cdot g$, $R_a(g) = g \cdot a$, $I_a(g) = aga^{-1}$. Un campo $X \in \mathfrak{X}(G)$ se llama invariante por la izquierda si $L_{a*}X = X$ para todo $a \in G$. Denotaremos por $\mathfrak{g}$ el conjunto de campos invariantes por la izquierda.

Observaciones 2.1. Si $X, Y \in \mathfrak{g}$ entonces $[X, Y] \in \mathfrak{g}$ ya que

$$L_{a*}[X, Y] = [L_{a*}X, L_{a*}Y] = [X, Y] \ \forall a \in G.$$

Si $X \in \mathfrak{g}$, entonces $X(g) = (L_{g*}X)(g) = L_{g*e}(X(g^{-1}g)) = L_{g*e}(X(e))$. Así hay un isomorfismo $T_eG \cong \mathfrak{g}$, $x \mapsto X$ donde $X(g) = L_{g*e}(x)$. Si $X \in \mathfrak{g}$ con $X(e) = x$, denotaremos por $t \mapsto e^{tx} = \exp(tx)$ a la solución de $g' = X(g)$ con $0 \mapsto e$. Entonces el flujo de X esta dado por $\varphi_t(g) = g \cdot e^{tx} = R_{\exp(tx)}(g)$ ya que

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g \cdot e^{tx} = L_{g*e}(x) = X(g).$$

Definimos $Ad(a) = D(I_a)_e$ y $ad_x = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad_{\exp(tx)}$. Si $X, Y \in \mathfrak{g}$ con $X(e) = x$, $Y(e) = y$ definiremos $[x, y] = [X, Y](e)$. Así

$$\begin{aligned}
[x,y] &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(R_{\exp(-tx)*}Y)(e) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} DR_{\exp(-tx)}(Y(e^{tx})) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} DR_{\exp(-tx)}DL_{\exp(tx)}(y) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(D(I_{\exp(tx)})_e(y) = ad_x y.
\end{aligned}$$

Como $h_{*e}(y) = d/ds|_{s=0}h(e^{sy})$ para $h \in C^\infty(G, G)$, tenemos

$$[x, y] = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\Big|_{(0,0)} e^{tx}e^{sy}e^{-tx} = -[y, x] = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\Big|_{(0,0)} e^{-sy}e^{tx}e^{sy}.$$

La aparente diferencia entre las dos derivadas se explica con

$$[x, y] = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\Big|_{(0,0)} e^{-sy}e^{tx}e^{sy}e^{-tx}$$

Definición 2.4. Sea G un grupo de Lie. Cualquiera de $\mathfrak{g}$ ó T_eG con la correspondiente operación $[,]$ se llama el *álgebra de Lie* de G y la tansformación $T_eG \to G$, $x \mapsto e^x$ se conoce como la *transformación exponencial.*

Observaciones 2.2. Si $x_1, \ldots, x_k$ es una base de T_eG, entonces los campos $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{g}$ con $X_i(e) = x_i$, forman una base de T_gG en cada punto $g \in G$. Por lo tanto G es paralelizable mediante el difeomeorfismo $G \times \mathfrak{g} \cong TG$, $(g, X) \to X(g)$.

Siempre podemos definir en G una métrica riemanniana invariante por la izquierda. De hecho sea $\langle , \rangle_e$ cualquier métrica en T_eG y definamos $\forall g \in G$

$$\langle , \rangle_g = (L^*_{g^{-1}})_g(\langle , \rangle_e).$$

Para $\langle , \rangle$ invariante por la derecha y por la izquierda y $X, Y \in \mathfrak{g}$, tenemos que $L_X\langle , \rangle = 0$ y $\langle X, Y\rangle$ es constante.

$$Z\langle X, Y\rangle = L_Z\langle , \rangle(X, Y) + \langle [Z, X], Y\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle \tag{2.5}$$

$$\langle [Z, X], Y\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle = 0. \tag{2.6}$$

Ejemplo 2.3. Consideremos el grupo SO(3) de las matrices ortogonales 3×3 con determinante 1. Sea $A : (-\varepsilon, \varepsilon) \to$SO(3) una curva difrenciable con $A(0) = E_3$. Así $A(t)A(t)^T = E_3$ y derivando $A'(0) + A'(0)^T = 0$. Por lo tanto el algebra de Lie correspondiente so(3) es el conjunto de matrices antisimétricas 3×3. Hay un isomorfismo $F : \mathbb{R}^3 \to$so(3) dado por

$$F\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_1 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

el cual satisface

$$F(x)a = x \times a, \forall a \in \mathbb{R}^3$$

Sea $g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}$ $\in$SO(3), entonces

$$\begin{aligned} Ad(g)X &= gXg^t = g(x \times g_1^T, x \times g_2^T, x \times g_3^T) \\ &= (gx \times gg_1^T, gx \times gg_2^T, gx \times gg_3^T) \\ &= F(gx)(gg_1^T, gg_2^T, gg_3^T) = gXgg^T = F(gx). \end{aligned}$$

Así, para $Y = F(y)$ $\in$so(3)

$$[Y, X] = YX - XY = F(Yx) = F(y \times x).$$

Por lo tanto $F : (\mathbb{R}^3, \times) \rightarrow$(so(3),[,]) es unisomorfismo de algebras de Lie y la acción Ad de SO(3) en su algebra de Lie corresponde a la acción natural en $\mathbb{R}^3$. Las órbitas de la acción son esferas centradas en el origen (o el propio origen).

Para un grupo de Lie G consideremos la acción Ad^* de G en $\mathfrak{g}^*$ definida por $Ad^*(g) = Ad(g^{-1})^*$. Para $\xi \in \mathfrak{g}^*$ consideremos su órbita

$$O_\xi = \{Ad(g)^*\xi : g \in G\}$$

para la cual el espacio tangente $T_\xi O_\xi$ consiste de los vectores

$$ad_x(\xi) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} Ad(e^{-tx})^*\xi, \quad x \in \mathfrak{g}.$$

En O_ξ definimos la 2-forma ω mediante

$$\omega_\xi(ad_x^*(\xi), ad_y^*(\xi)) = \xi([x, y]).$$

Para probar que ω es cerrada consideremos $x, y, z \in \mathfrak{g}$. Como

$$\begin{aligned} ad_x^*(\omega(ad_y^*, ad_z^*))(\xi) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \omega_{Ad(e^{-tx})^*\xi}(ad_y^*(Ad(e^{-tx})^*\xi), ad_z^*(Ad(e^{-tx})^*\xi)) \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} Ad(e^{-tx})^*\xi)([y, z]) \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \xi(Ad(e^{-tx})[x, y]) = -\xi([x, [y, z]]) \end{aligned}$$

$$d\omega(ad_x^*, ad_y^*, ad_z^*)(\xi) = -2\xi([x, [y, z]]) - 2\xi([y, [z, x]]) - 2\xi([z, [x, y]]) = 0$$

Observación 2.3. Cuando el algebra de lie $\mathfrak{g}$ posee una forma bilineal no degenerada $\langle , \rangle$ que satisface (2.6), $\langle , rip$ permite identificar $\mathfrak{g}$ con su dual y definir una estructura simpléctica en las órbitas de la acción adjunta mediante $\omega_x(ad_x y, ad_x z = \langle x, [y, z] \rangle$.

Ejemplo 2.4. Por medio del producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$ identificamos el algebra de Lie so(3) con su dual. Dicho producto escalar satisface (2.6) ya que $x \cdot (y \times z) = y \cdot (z \times x)$. Como observamos, las órbitas O de la acción adjunta son esferas. Además

$$T_w O = \{ad_x w = x \times w : x \in \mathbb{R}^3\},$$

como todo mundo sabe. La forma simpléctica en O esta dada por

$$\omega(x \times w, z \times w) = w \cdot (x \times y)$$

Ejemplo 2.5. Consideremos ahora el grupo euclidiano E(3) que es el producto semidirecto de SO(3) y $\mathbb{R}^3$, a saber si $A, B \in$SO(3) $a, b \in R^3$ la operacion está definida por

$$(A, a)(B, b) = (AB, Ab + a) \tag{2.7}$$

y así

$$(A, a)^{-1} = (A^T, -A^T a) \tag{2.8}$$

$$I_{(A,a)}(B, b) = (ABA^T, -AB^T a + Ab + a) \tag{2.9}$$

Identificando el álgebra de Lie $e(3)$ con $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, considerando una curva $(B(t), b(t)) \in$E(3) y calculando la derivada de (2.9) en $t = 0$ tenemos

$$Ad(A, a)(X, x) = (AX, -(AX) \times a + Ax). \tag{2.10}$$

Como $|AX| = |X|$ y $AX \cdot (Ax - (AX) \times a) = X \cdot x$, las órbitas adjuntas son de la forma

$$\mathcal{O} = \{(Y, y) : |Y| = c_1, Y \cdot y = c_2\}$$

Considerando ahora una curva $(A(t), a(t)) \in$E(3) y calculando la derivada de (2.10) en $t = 0$

$$ad_{(Y,y)}(X, x) = [(Y, y), (X, x)] = (Y \times X, -X \times y + Y \times x) \tag{2.11}$$

La función bilineal no degenerada en $e(3)$ definida por

$$\langle (X, x), (Y, y) \rangle = X \cdot y + x \cdot Y$$

satisface (2.6) y entonces permite definir una estructura simpléctica en las órbitas adjuntas.

Consideremos el movimiento de un cuerpo rígido en el campo gravitacional. En el sistema de coordenadas fijo al cuerpo, la ecuaciones de movimiento son las ecuaciones de Euler

$$A\dot{\omega} = (A\omega + \lambda) \times \omega + \nu \times C \tag{2.12}$$

$$\dot{\nu} = \nu \times \omega \tag{2.13}$$

donde A es la matriz de inercia, C es el centro de masa, ν es el vector unitario vertical visto desde el cuerpo. Las función $f_1 = |\nu|^2$, la componente vertical del momento angular $f_2 = (A\omega + \lambda) \cdot \nu$, y la energía

$H = \frac{1}{2}A\omega \cdot \omega + \nu \cdot C$ son primeras integrales de movimiento, o sea que a lo largo de soluciones de (2.12), (2.13), $\dot{f}_1 = \dot{f}_2 = \dot{H} = 0$ y por consiguiente para cualquier solución $(\nu(t), \omega(t))$ de (2.12) (2.13), la curva $(Y(t), y(t)) = (\nu(t), A\omega(t) + \lambda)$ permanece en la misma órbita adjunta en $e(3)$. Tenemos

$$\dot{y} = y \times A^{-1}(y - \lambda) + Y \times C \tag{2.14}$$

$$H = \frac{1}{2}(y - \lambda) \cdot A^{-1}(y - \lambda) + Y \cdot C \tag{2.15}$$

El campo vectorial X_H correspondiente a la restriccion de H a una órbita adjunta está dado por $X_H(\xi) = [v(\xi), \xi]$ donde

$$dH(\xi)(ad_\eta \xi) = \langle \xi, [v(\xi), y] \rangle = \langle v(\xi), ad_\eta \xi \rangle$$

Como

$$dH(\xi)(Z, z) = \frac{\partial H}{\partial Y} Z + \frac{\partial H}{\partial x} z = \langle (\frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial Y}), (Z, z) \rangle$$

Así

$$\begin{aligned} X_H(Y, y) &= \big[(\frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial Y}), (Y, y) \big] \\ &= (Y \times \frac{\partial H}{\partial y}, y \times \frac{\partial H}{\partial y} + Y \times \frac{\partial H}{\partial Y}) \end{aligned}$$

Como

$$\frac{\partial H}{\partial y} = A^{-1}(y - \lambda), \quad \frac{\partial H}{\partial Y} = C,$$

$$\dot{\xi} = X_H(\xi)$$

resulta ser (2.13), (2.14)

Ejemplo 2.6. Sean G un grupo de Lie y $\langle , \rangle$ una métrica riemanniana en G invariante por la izquierda. La conexión definida por $\nabla_X Y = [X, Y]/2$ para $X, Y \in \mathfrak{g}$, es la conexión de Levi-Civita ya que es compatible con la métrica por (2.6) y

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = \frac{1}{2}[X, Y] - \frac{1}{2}[Y, X] = [X, Y].$$

Como $\nabla_X X = 0$ para $X \in \mathfrak{g}$, tenemos que las curvas $t \mapsto e^{tx}$ son geodésicas.

3. El teorema de Darboux

TEOREMA 2.1. *Sean (M,ω) variedad simpléctica y $p \in M$. Entonces existe una vecindad coordenada (U,ϕ), $\phi = (x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$ tal que*

$$\omega|U = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$$

Demostración. Consideremos $\omega_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$. Escojamos una base simpléctica $\{f_1,\dots,f_{2n}\}$ de T_pM.

Sea $(V,\tilde{\psi})$ vecindad coordenada alrededor de p. Sea L el automorfismo lineal de $\mathbb{R}^{2n}$ que manda la base $\{d\tilde{\psi}_p(f_i)\}$ en la base canónica y sea $\psi = L \circ \tilde{\psi}$. Entonces la transformación $d\psi_p$ manda la forma simpléctica ω_p en la forma simpléctica canónica Ω de $\mathbb{R}^{2n}$. En V tenemos dos formas simplécticas ω y $\omega^0 = \psi^*\Omega$. Vamos a demostrar que hay una deformación diferenciable φ_t, $t \in [0,1]$ de una vecindad U de p tal que $\varphi_0 = id$ y $\varphi_1^*\omega = \omega^0$. Entonces la transformación $\phi = \psi \circ \varphi_1^{-1}$ satisfará $\phi^*\Omega = \omega$ y así (U,ϕ) es la vecindad coordenada buscada. Definamos la familia de 2-formas cerradas

$$\omega^t = \omega_0 + t(\omega - \omega^0) \quad t \in [0,1],$$

Como $(\omega^t)_p = \omega_p$ para todo $t \in [0,1]$, hay una vecindad U' de p donde ω^t no es degeneradad para ningún $t \in [0,1]$.

Obtendremos la deformación φ_t como la solución de una ecuación diferencial

$$\dot{x} = X_t(x).$$

Ya que

$$\varphi_1^*\omega - \omega^0 = \int_0^1 \frac{d}{dt}(\varphi_t^*\omega^t)dt,$$

queremos que $\frac{d}{dt}(\varphi_t^*\omega^t)$ se anule, pero como

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^*\omega^t) = \varphi_t^*(i(X_t)d\omega^t + d(i(X_t)\omega^t) + \frac{d\omega^t}{dt}),$$

y $d\omega^t = 0$, queremos $d(i(X_t)\omega^t) = \omega^0 - \omega$. Por el Lema de Poincaré 2.1, hay una vecindad $U \subset U'$ de p donde existe una 1-forma β tal que $d\beta = \omega^0 - \omega$. Luego, podemos escoger X_t $t \in [0,1]$ tal que $i(X_t)\omega^t = \beta$. □

LEMA 2.1. Poincaré. *Sea A una r-forma cerrada en un convexo $W \subset \mathbb{R}^m$. Entonces existe una $r-1$-forma en W tal que $A = dB$.*

Demostración. Fijemos $q \in W$ y definamos

$$h_t(x) = q + t(x-q),\ Y(x) = x - q,\ x \in W.$$

Entonces $h_0(x) = q, h_1(x) = x$ y así $h_0^*A = 0, h_1^*A = A$,

$$A = \int_0^1 h_t^*(i(Y)dA + d(i(Y)A))dt = d\int_0^1 h_t^* i((Y)A)dt$$

□

A continuación presentamos generalizaciones del Lema de Poincaré y el Teorema de Darboux.

Sea M una variedad riemanniana y sea $P \subset M$ una subvariedad compacta. Consideremos el haz normal de P

$$N(P) = \{(x,v) \in TM : v \perp T_xN\}.$$

Hay una $\varepsilon > 0$ tal que

$$\phi : \{(x,v) \in N(P) : |v| < \varepsilon\} \to M,\ \phi(x,v) = \exp_x(v)$$

es un difeomorfismo sobre su imagen $V(P)$ a la que llamaremos **vecindad tubular**.

Proposición 2.3. *Sea ω una r-forma cerrada en la vecindad tubular $V(P)$ tal que $\omega|P = 0$. Entonces existe una $r-1$-forma η en $V(P)$ tal que $\eta|P = 0$ y $\omega = d\eta$.*

Demostración. Para $t \in [0,1]$ consideremos la deformación

$$h_t : N(P) \to N(P),\ h_t(\exp_x(v)) = \exp_x(tv)$$

y para $t > 0$ definamos

$$X_t = (\frac{dh_t}{dt}) \circ h_t^{-1}.$$

Entonces

$$h_t^*\omega = 0,\ h_t^*\omega = \omega,\ h_t|P = id_Q,$$

$$\frac{d}{dt}h_t^*\omega = d(h_t^* i(X_t)\omega) = d\sigma^t$$

donde la familia de $r-1$ formas σ^t dada por

$$\sigma_q^t(v_1, \ldots, v_{r-1}) = \omega_{h_t(q)}(\frac{d}{dt}h_t(q), dh_t(q)v_1, \ldots, dh_t(q)v_{r-1})$$

es diferenciable para $t \geq 0$ y se anula en P. Entonces

$$\omega = \int_0^1 \frac{d}{dt}(h_t^*\omega)dt = d\int_0^1 \sigma^t dt$$

□

Observación 2.4. Sea (M,ω) una variedad simpléctica. Por el Teorema 1.4, para cada $p \in M$ hay una estructura compleja J_p de T_pM compatible con ω_p y posotiva. De la demostración de dicho Teorema se sigue que J_p varia diferenciablemente con p. Sea g la métrica riemanniana dada por $g_p(v,w) = \omega_p(v, J_pw)$. Sea $L \subset T_pM$ subespacio lagrangiano, entonces

$$\begin{aligned} L &= \{v \in T_pM : \omega_p(v,w) = 0, \forall w \in L\} \\ &= \{v \in T_pM : g_p(v, J_pw) = 0, \forall w \in L\} \\ L^{\perp_g} &= J(L) \end{aligned}$$

Teorema 2.2. *Sea N una subvariedad lagrangiana de la variedad simpléctica (M,ω). Hay vecindades $U \subset T^*N$ y $V \subset M$ de N y una transformación $U \to V$ tales que $\psi(x,0) = x$ $\forall x \in N$ y $\psi^*\omega = -d\eta$ es la estructura simpléctica natural de T^*n*

Demostración. De acuerdo con la observación 2.4 tenemos un difeomorfismo $\alpha : TN^\perp \to T^*N$ dada por

$$\alpha(x,z) = (x,z^*) = (x, g_x(J_xz,\cdot))$$

Entonces $D\alpha_{(x,0)}(v,0) = (v,0)$ y $D\alpha_{(x,0)}(0,z) = (0,z^*)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} -(\alpha^*d\eta)_{(x,0)}((v,z),(w,y)) &= y^*(v) - z^*(w) = g_x(J_xy,v) - g_x(J_xz,w) \\ &= \omega_x(v,y) - \omega_x(w,z) \end{aligned}$$

Consideremos también una vecindad tubular

$$\varphi : \{(x,v) : x \in N, v \in J_x(T_xN), |v| < \varepsilon\} \to V(N), \quad \varphi(x,v) = \exp_x(v).$$

Entonces $D\varphi_{(x,0)}(v,z) = v + z$ y así

$$(\varphi^*\omega)_{(x,0)}((v,z),(w,y)) = \omega_x(v+z, w+y) = \omega_x(v,y) + \omega_x(z,w)$$

ya que $v, w \in T_xN$, $z, y \in J_x(T_xN)$.

Así $-[(\alpha \circ \varphi^{-1})^*d\eta]_x = \omega_x$ para $x \in N$. Por lo tanto hay vecindades W, V de N y un difeomorfismo $\phi : W \to V$ tales que

$$\phi^*\omega = -(\alpha \circ \varphi^{-1})^*d\eta.$$

Sea $\psi = \phi \circ \varphi \circ \alpha^{-1}$. □

Ejemplo 2.7. Sea (M,ω) variedad simpléctica y sea $\phi : M \to M$. Consideremos $M \times M$ con la estructura simpléctica $-\omega \oplus \omega$. Como $\phi^*\omega = \omega$ si y sólo si $(I,\phi)^*(-\omega \oplus \omega) = 0$, tenemos que ϕ es simpléctica si y sólo si graf ϕ es una subvariedad lagrangiana de $M \times M$.

La diagonal $\Delta = \{(x,x) : x \in M\}$ es una subvariedad lagrangiana de $M \times M$ difeomorfaa M. Por el Teorema 2.2 hay vecindades U de Δ en $M \times M$, V de M en T^*M y un difeomorfismo $\psi : V \to U$ tal que $\psi^*(-\omega \oplus \omega) = -d\lambda$.

Si $\phi : M \to M$ es un simplectomorfismo C^1 cercano a la identidad, hay una 1-forma λ en M tal que $\psi^{-1}(x, \phi(x)) = \lambda(x)$ y $\operatorname{graf}\phi$ es una subvariedad lagrangian si y sólo si $d\lambda = 0$. Los puntos fijos de ϕ corresponden a las intersecciones de Δ con $\operatorname{graf}\phi$ y así, a los ceros de λ.

4. Acciones simplécticas

Sean (M, ω) variedad simpléctica y G un grupo de Lie. Una acción $\Phi : G \times M \to M$, $\Phi_g(x) = \Phi(g, x)$ se llama simpléctica si para todo $g \in G$, Φ_g es simpléctica. La órbita de $x \in M$ es

$$G \cdot x = \{\Phi_g(x) : g \in G\}.$$

Cada $\xi \in \mathfrak{g}$ genera un campo vectorial simpléctico X_ξ tangente a las órbitas

$$X_\xi = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi_{e^{t}\xi}.$$

Tenemos que $d(i_{X_\xi}\omega) = L_{X_\xi}\omega = 0$ y nos restrigiremos a acciones donde cada X_ξ es hamiltoniano es decir que $i_{X_\xi}\omega = dH_\xi$ para una funcion difrenciable $H_\xi : M \to \mathbb{R}$. Fijando una base $\xi_1, \ldots, \xi_n$ y escogiendo $H_{\xi_1}, \ldots H_{\xi_n}$ por linealidad extendemos la definición de H_ξ para todo $\xi \in \mathfrak{g}$. Como $\exp(tAd(g)\xi) = ge^{t\xi}g^{-1}$,

$$X_{Ad(g)\xi}(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi(ge^{t\xi}g^{-1}, x) = D\Phi_g X_\xi(\Phi_g^{-1}(x)) = (\Phi_{g*}X_\xi)(x) \tag{2.16}$$

$$[X_\eta, X_\xi] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi_{\exp(-t\eta)*}X_\xi = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} X_{Ad(\exp(-t\eta)\xi)} = -X_{[\eta,\xi]} \tag{2.17}$$

Por la Proposición 2.1 si X, Y son campos vectoriales simplécticos,

$$i([X, Y])\omega = d(\omega(Y, X))$$

Así

$$dH_{[\eta,\xi]} = i(X_{[\eta,\xi]})\omega = i([X_\xi, X_\eta])\omega = d\{H_\xi, H_\eta\}$$

y entonces hay un número real $c(\xi, \eta)$ tal que

$$H_{[\eta,\xi]} = \{H_\xi, H_\eta\} + c(\xi, \eta)$$

Definición 2.5. Una acción simplectica se llama acción de Poisson si para cada $\xi \in \mathfrak{g}$ el campo X_ξ es hamiltoniano y es posible escoger el hamiltoniano H_ξ de tal forma que

$$H_{[\eta,\xi]} = \{H_\xi, H_\eta\}.$$

Para una acción de Poisson definimos la transformación de **momento** $\Psi : M \to \mathfrak{g}^*$ mediante $\langle \Psi(x), \xi \rangle = H_\xi(x)$.

Ejemplo 2.8. Sea N una variedad y sea $\phi : G\times N \to N$ una acción suave del grupo de Lie G. Extendemos la acción a $M = T^*N$ mediante

$$\Phi_g(x,p) = (\phi_g(x), D\phi^*_{g^{-1}}p)$$

Recordemos que la 1-forma natural λ de M esta dada por

$$\lambda_{(x,p)}(v,w) = p(v)$$

y así

$$\Phi^*_g\lambda(x,p)(v,w) = \lambda_{\Phi_g(x,p)}(D\Phi_g(x,p)(v,w)) = D\phi^*_{g^{-1}}p(D\phi_g(x)v) = p(v)$$

o sea que $\Phi^*_g\lambda = \lambda$. Por lo tanto

$$L_{X_\xi}\lambda = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Phi^*_{\exp(t\xi)}\lambda = 0$$

y entonces

$$d(\lambda(X_\xi)) = -i(X_\xi)d\lambda = i(X_\xi)\omega.$$

Así, el campo

$$X_\xi(x,p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Phi_{\exp(t\xi)}(x,p) = (\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\phi_{\exp(t\xi)}(x), -) = (Y_\xi(x), -)$$

tiene hamiltoniano

$$H_\xi(x,p) = \lambda_{(x,p)}(X_\xi(x,p)) = p(Y_\xi(x))$$

Por ejemplo, consideremos la acción natural del grupo euclidiano $E(3)$ sobre un sistema de n partículas $\phi : E(3)\times\mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}^{3n}$

$$\begin{aligned}
\phi_{(A,a)}(x_1,\dots,x_n) &= (Ax_1 + a, \dots, Ax_n + a)\\
Y_{(Z,z)}(x) &= (Z\times x_1 + z, \dots, Z\times x_n + z)\\
H_{(Z,z)}(x,p) &= p_1\cdot(Z\times x_1 + z) + \cdots + p_n\cdot(Z\times x_1 + z)\\
&= Z\cdot(x_1\times p_1 + \cdots + x_n\times p_n) + z\cdot(p_1 + \cdots + p_n)
\end{aligned}$$

y así la transformacion de momento

$$\Psi(x,p) = (x_1\times p_1 + \cdots + x_n\times p_n, p_1 + \cdots + p_n)$$

consiste del momento angular y lineal totales del sistema.

Proposición 2.4. *La transformación momento es equivariante, es decir*

$$\Psi\circ\Phi_g = Ad^*(g)\circ\Psi$$

para todo $g\in G$

Por (2.16)

$$\begin{aligned} dH_{Ad(g)^{-1}\xi}(x)v &= \omega(X_{Ad(g)^{-1}\xi}(x), v) = \omega(\Phi_{g^{-1}*}X_\xi(x), v) \\ &= \omega(X_\xi(\Phi_g(x)), D\Phi_g(x)v) = dH_\xi(\Phi_g(x))(D\Phi_g(x)v) \\ &= d(H_\xi \circ \Phi_g)(x)v \end{aligned} \tag{2.18}$$

Así

$$H_\xi(\Phi_g(x)) = H_{Ad(g)^{-1}\xi}(x) = \langle \Psi(x), Ad(g^{-1})\xi \rangle \tag{2.19}$$

$$\langle \Psi(\Phi_g(x)), \xi \rangle = \langle Ad^*(g)(\Psi(x)), \xi \rangle \tag{2.20}$$

Sea η un valor regular de la transformación de momento. Consideremos el subgrupo de isotropía

$$G_\eta = \{g \in G : Ad(g)^*\eta = \eta\}$$

Si $x \in \Psi^{-1}(\eta)$ y $g \in G_\eta$, se sigue de la Proposición 2.4 que $\Psi(\Phi_g(x)) = Ad(g^{-1})^*\eta = \eta$ y así, el subgrupo G_η actúa en $\Psi^{-1}(\eta)$. Haremos alguna suposición técnica que asegure que $M_\eta = \Psi^{-1}(\eta)/G_\eta$ es una variedad, por ejemplo

- G_η es compacto
- Para $g \in G_\eta$, Φ_g no tiene puntos fijos

LEMA 2.2. *Para $x \in \Psi^{-1}(\eta)$ el espacio ortogonal simpléctico a $T_xG\cdot x$ es precisamente $T_x\Psi^{-1}(\eta)$*

Demostración. Como

$$T_xG \cdot x = \{X_\xi(x) : \xi \in \mathfrak{g}\},$$

tenemos que v es ortogonal a $T_xG\cdot x$ si y sólo si para todo $g \in \mathfrak{g}$ tenemos

$$\langle d\Psi(x)v, \xi \rangle = dH_\xi(x)v = \omega(v, X_\xi(x)) = 0,$$

o sea $v \in \ker d\Psi(x) = T_x\Psi^{-1}(\eta)$. □

Para $x \in \Psi^{-1}(\eta)$ denotemos por $[x]$ su imagén bajo la proyección canónica $\Psi^{-1}(\eta) \to M_\eta$.

$$T_[x]M_\eta = T_x\Psi^{-1}(\eta)/T_x\Psi^{-1}(\eta) \cap T_xG \cdot x$$

Para $\bar{u}, \bar{v} \in T_[x]M_\eta$, escojamos $u, v \in T_x\Psi^{-1}(\eta)$ que proyecten en $\bar{u}, \bar{v}$ respectivamente y definamos

$$\bar{\omega}_{[x]} = \omega_x(u, v).$$

La definición no depende de la elección de los vectores u, v porque si $\alpha, \beta \in T_x\Psi^{-1}(\eta) \cap T_xG \cdot x$ entonces

$$\omega_x(\alpha, v) = \omega_x(u, v) = \omega_x(\alpha, \beta) = 0.$$

Tampoco depende del representante $x \in \Psi^{-1}(\eta)$, porque si $y = \Phi_g(x)$ con $g \in G_\eta$ entonces $d\Phi_g(u), d\Phi_g(v) \in d\Phi_g(T_x\Psi^{-1}(\eta)) = T_y\Psi^{-1}(\eta)$ y

$$\omega_y(d\Phi_g(u), d\Phi_g(v)) = \omega_x(u, v).$$

Tenemos que $\bar{\omega}$ **no es degenerada** porque si $u \in T_x\Psi^{-1}(\eta)$ es tal que $\omega_x(u, v) = 0$ para todo $v \in T_x\Psi^{-1}(\eta)$ tenemos que $u \in T_xG \cdot x$ y asi $\bar{u} = 0$. Por lo tanto M_η es una variedad simpléctica llamada el **cociente simpléctico** definido por la acción hamiltoniana Φ.

Ejemplo 2.9. Consideremos la acción de $\mathbb{S}^1$ sobre $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ dada por $w \cdot (z_1, \ldots, z_n) = (wz_1, \ldots, wz_n)$. El campo

$$X(z_1, \ldots, z_n) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(e^{it}z_1, \ldots, e^{it}z_n) = (iz_1, \ldots, iz_n)$$

es hamiltoniano con función hamiltoniana $H = \frac{1}{2}(|z_1|^2 + \cdots |z_n|^2)$ y H^{-2} es la esfera unitaria. El cociente simpléctico

$$H^{-2}/\mathbb{S}^{-1} = \mathbb{C}^n/\mathbb{C} - \{0\}$$

es el espacio proyectivo.

Capítulo 3

El formalismo canónico

1. Las ecuaciones de Hamilton

LEMA 3.1. *Sea A un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$. Las curvas solución de* $\operatorname{rot} A$ *se laman las líneas de vorticidad de A. Si γ_1 es una curva cerrada, las líneas de vorticidad que pasan por γ_1 forman un tubo σ llamado de vorticidad. Sea γ_2 otra curva cerrada en el mismo tubo de vorticidad, entonces*

$$\int_{\gamma_1} \langle A, dr \rangle = \int_{\gamma_2} \langle A, dr \rangle$$

Demostración. Por el teorema de Stokes

$$\int_{\gamma_2} \langle A, dr \rangle - \int_{\gamma_1} \langle A, dr \rangle = \int_{\sigma} \langle \operatorname{rot} A, n \rangle dS = 0$$

ya que $\operatorname{rot} A$ es tangente a σ. $\square$

LEMA 3.2. *Sea Ω una forma bilineal antisimétrica en $\mathbb{R}^{2n+1}$. Entonces $\exists X \neq 0$ tal que $\forall Y \in \mathbb{R}^{2n+1}, \Omega(X, Y) = 0$.*

Demostración. Hay una matriz antisimétrica $\mathbb{Q}$ tal que

$$\Omega(X, Y) = \langle \mathbb{Q}X, Y \rangle.$$

$$\det \mathbb{Q} = \det \mathbb{Q}^t = \det(-\mathbb{Q}) = (-1)^{2n+1} \det \mathbb{Q} \Rightarrow \det \mathbb{Q} = 0.$$

Por lo tanto $\exists X \neq 0$ tal que $\mathbb{Q}X = 0$. $\square$

OBSERVACIÓN 3.1. Si $\ker \Omega := \ker \mathbb{Q}$ es unidimensional, decimos que Ω no es singular.

DEFINICIÓN 3.1. Sea ω una 1-forma diferencial en $\mathbb{R}^{2n+1}$. Si $d\omega$ no es singular, $\ker d\omega$ se llama dirección característica de ω y las curvas integrales del campo de direcciones características se llaman líneas de vorticidad. Sea γ_1 una curva cerrada, las líneas de vorticidad que pasan por γ_1 forman un tubo σ llamado de vorticidad.

LEMA 3.3. *Si las curvas cerradas γ_1, γ_2 encierran el mismo tubo de vorticidad para la 1-forma diferencial ω en $\mathbb{R}^{2n+1}$, entonces*

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

Demostración. Podemos parametrizar el tubo de vorticidad mediante $c : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ de tal manera que $c([0,1] \times \{i-1\}) = \gamma_i, i = 1, 2$ y $\dfrac{\partial c}{\partial v}$ es una dirección de vorticidad. Por el teorema de Stokes

$$\int_{\gamma_2} \omega - \int_{\gamma_1} \omega = \int_c d\omega = \int_{[0,1]^2} \omega(\frac{\partial c}{\partial u}, \frac{\partial c}{\partial v}) = 0$$

□

Consideremos ahora una función diferenciable real

$$H(q, p, t) = H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$$

y la 1-forma diferencial

$$\omega = pdq - Hdt = p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n - Hdt,$$

de tal manera que

$$\begin{aligned} d\omega &= dp \wedge dq - dH \wedge dt = dp_1 \wedge dq_1 + \dots + dp_n \wedge dq_n - dH \wedge dt, \\ dH &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt = H_p \, dp + H_q \, dq + \frac{\partial H}{\partial t} \, dt \end{aligned}$$

Teorema 3.1. *Las líneas de vorticidad de $\omega = pdq - Hdt$ son las curvas integrales del sistema de ecuaciones diferenciales de Hamilton*

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \ \ H_p \\ \dot{p} &= -H_q \end{aligned} \tag{3.1}$$

Demostración.

$$d\omega(X, Y) = \langle \mathbb{Q} X, Y \rangle, \quad \mathbb{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} & H_q \\ -\mathbb{I} & 0 & H_p \\ -H_q^t & -H_p^t & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz $\mathbb{Q}$ es $2n$ ya que $\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}$ es invertible y

$$\mathbb{Q} \begin{pmatrix} H_p \\ -H_q \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así, $(X_H^t, 1) = (H_p^t, -H_q^t, 1)$ genera la dirección de vorticidad de ω. Pero $(H_p^t, -H_q^t, 1)$ es tangente a las curvas integrales del sistema (3.1). □

Corolario 3.2. *Si las curvas cerradas γ_1, γ_2 encierran el mismo tubo formado por (segmentos de) curvas integrales del sistema* (3.1) *entonces*

$$\int_{\gamma_1} pdq - Hdt = \int_{\gamma_2} pdq - Hdt.$$

En particular, si $g_t(q,p) = \varphi_{t_1}^t(q,p)$ *denota la solución a* (3.1) *que satisface* $g_{t_1} = I$*, entonces para cualquier curva cerrada* α *en* $\mathbb{R}^{2n}$ *se tiene*

$$\int_\alpha pdq = \int_{g_t\circ\alpha} pdq = \int_\alpha g_t^*(pdq) = \int_\alpha P_t dQ_t$$

donde $g_t = (Q_t, P_t)$*.*

De acuerdo al Corolario 3.2 si σ es una superficie bidimensional con frontera, por el Teorema de Stokes tenemos

$$\int_\sigma dp \wedge dq = \int_\sigma g_t^*(dp \wedge dq) = \int_\alpha dP_t \wedge dQ_t,$$

es decir que g_t preserva la forma $\Omega = dp \wedge dq$.

Definición 3.2. Una transformación $g : U \subset \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ se llama **simpléctica** o **canónica** si preserva la forma $\Omega = dp \wedge dq$ o sea si

$$Dg(x)^t\, \mathbb{J}\, Dg(x) = \mathbb{J} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Así, la transformación $g = (Q,P)$ es canónica si y sólo si la forma $PdQ - pdq$ es cerrada. En el caso en que U es simplemente conexa, esta condición es equivalente a que $PdQ - pdq$ sea exacta o a que

$$\int_\gamma pdq = \int_{g\circ\gamma} pdq$$

para cualquier curva cerrada γ en U.

Una transformación canónica preserva las formas $\Omega^k, k \in \mathbb{N}$. Como Ω^n es un múltiplo de la forma de volumen $dp_1 \wedge dq_1 \wedge \cdots \wedge dp_n \wedge dq_n$, tenemos

Corolario 3.3. *Las transformaciones canónicas presevan el volumen.*

Teorema 3.4. *Sean* $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ *abierto y* $H : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *diferenciable. Una transformación canonica* $g = (Q,P) : U \to \mathbb{R}^{2n}$ *transforma el sistema hamiltoniano* (3.1) *en el sistema*

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= K_P \\ \dot{P} &= -K_Q \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde $K(g(q,p),t) = H(q,p,t)$*. Más generalmente si* U *es simplemente conexo, una familia diferenciable*

$$g_t(q,p) = (Q(q,p,t), P(q,p,t)),\ t \in \mathbb{R}$$

de transformaciones canónicas, transforma el sistema (3.1) *en el sistema* (3.2) *donde*

$$K(g_t(q,p),t) = H(q,p,t) - \frac{\partial S}{\partial t}$$

y $S : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es diferenciable.*

Demostración. Como $g = (Q, P)$ es canónica, $d(PdQ - pdq) = 0$. Por lo tanto

$$d(pdq - Hdt) = d(PdQ - K(Q,P,t)dt) = G^* d(pdq - Kdt).$$

donde $G(q,p,t) = (g(q,p),t)$. Así, G transforma las líneas de vorticidad de $pdq - Hdt$ en las líneas de vorticidad de $pdq - Kdt$. □

2. Hamiltoninos Autónomos

Supongamos que la función $H(q,p)$ no depende de t. Si $\alpha(t) = (q(t), p(t))$ es una solucion del sistema (3.1) entonces

$$\frac{d}{dt}H(\alpha(t)) = \langle H_p, \dot{p}\rangle + \langle H_q, \dot{q}\rangle = -\langle H_p, H_q\rangle + \langle H_q, H_p\rangle = 0$$

y así α yace en una superficie de nivel $M_h = \{(q,p) : H(q,p) = h\}$.

Sea $\gamma(t) = (\alpha(t), t)$ una curva integral del sistema (3.1). Entonces γ es una línea de vorticidad de

$$\omega = pdq - Hdt.$$

Como $dH(\dot{\gamma}) = dH(\dot{\alpha}) = 0$,

$$0 = d\omega(\dot{\gamma}, \cdot) = dp \wedge dq(\dot{\alpha}, \cdot) + dH.$$

Luego, la curva α es una línea de vorticidad de pdq sobre M_h.

Supongamos que en alguna región $H_{p_1} \neq 0$ y que podemos resolver la ecuación $H(q,p) = h$ para p_1:

$$p_1 = K(q_2, \ldots, q_n, p_2, \ldots, p_n, -q_1) = K(Q,P,T)$$

de tal forma que en dicha región, Q, P, T es un sistema de coordenadas para M_h y $pdq = PdQ - KdT$. Como $\dot{q}_1 = H_{p_1} \neq 0$, podemos parametrizar las líneas de vorticidad de pdq por T. Así

Teorema 3.5. *Las soluciones del sistema* (3.1) *satisfacen en* M_h *el sistema*

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dT} &= K_P \\ \frac{dP}{dT} &= -K_Q \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde $P = (p_2, \ldots, p_n)$, $Q = (q_2, \ldots, q_n)$ *y la función* $K(Q,P,T)$ *está definida por la ecuación* $H(-T, Q, K, P) = h$.

3. Principios variacionales

Para $q, Q \in \mathbb{R}^n$ y $a, b \in \mathbb{R}$ consideremos

$\Omega(q,Q,a,b) = \{\alpha \in C^2([a,b],\mathbb{R}^{2n}) : \alpha(a) \in \{q\}\times\mathbb{R}^n, \alpha(b) = \{Q\}\times\mathbb{R}^n\}$

y definimos la funcional de acción $A : \Omega(q,Q,a,b) \to \mathbb{R}$ mediante

$$A(\alpha) = \int_a^b (p(t)\dot{q}(t) - H(\alpha(t),t))dt$$

donde $\alpha(t) = (q(t), p(t))$.

Teorema 3.6. *La curva α es un punto crítico de A si y sólo si es una solución de las ecuaciones de Hamilton* (3.1)

Demostración. Sea $s \mapsto \alpha_s, |s| < \varepsilon$ una curva diferenciable en $\Omega(q,Q,a,b)$ con $\alpha_0 = \alpha$.

$$\begin{aligned}
\frac{dA(\alpha_s)}{ds} &= \int_a^b \Big(\frac{dp}{ds}\dot{q} + p\frac{d\dot{q}}{ds} - H_p\frac{dp}{ds} - H_q\frac{dq}{ds}\Big)dt \\
&= \Big[p\frac{dq}{ds}\Big]_a^b + \int_a^b \Big(\dot{q}\frac{dp}{ds} - \dot{p}\frac{dq}{ds} - H_p\frac{dp}{ds} - H_q\frac{dq}{ds}\Big)dt \\
\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} A(\alpha_s) &= \int_a^b \Big((\dot{q} - H_p)\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} p - (\dot{p} + H_q)\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} q\Big)dt
\end{aligned}$$

Por lo tanto α es un punto crítico de A si y sólo si es una solución de las ecuaciones de Hamilton (3.1). □

Sea $L : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ un lagrangiano tal que $L_{vv}(q,v)$ es positivo definido para todo (x,v). La función de energía se define por

$$E(q,v) = L_v(q,v)\,v - L(q,v)$$

La transformación de Legendre asociada está definida por

$$\mathcal{L}(q,v) = (q, L_v(q,v)).$$

Por la hipótesis de convexidad, $\mathcal{L}$ es invertible. La transformada de Legendre de L es $H = E \circ \mathcal{L}^{-1}$. Las ecuaciones de Euler- Lagrange

$$\frac{d}{dt}L_v(q,\dot{q}) = L_x(q,\dot{q}) \tag{3.4}$$

se transforman mediante $\mathcal{L}$ en el sistema hamiltoniano (3.1), y por consiguiente E es constante a lo largo de soluciones de (3.4)

Teorema 3.7. Principio de Maupertuis.

Sean e un valor regular de E. Para $q, Q \in \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$, sea $\Omega(q,Q,a,b:e)$ el conjunto de parejas de funciones C^2, $\tau : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\alpha : [\tau(a),\tau(b)] \to \mathbb{R}^n$ tales que

$$\tau' > 0,\ E(\alpha(\tau(t)), \alpha'(\tau(t))) = e,\ \alpha(\tau(a)) = q, \alpha(\tau(b)) = Q.$$

Definimos la funcional de acción reducida $A_h : \Omega(q,Q,a,b:e) \to \mathbb{R}$

$$A_e(\tau,\alpha) = \int_{\tau(a)}^{\tau(b)} L_v(\alpha,\alpha')\alpha'$$

Entonces (τ,α) *es un valor crítico de* A_e *si y sólo si* α *es una solución de las ecuaciones de Euler - Lagrange* (3.4)

Demostración. Dado que todas las curvas α tienen energía e

$$L_v(\alpha,\alpha')\alpha' = L(\alpha,\alpha') + e$$

Sea $s \mapsto (\tau_s,\alpha_s), |s| < \varepsilon$, una curva diferenciable en $\Omega(q,Q,a,b:e)$ Siguiendo el procedimiento en la demostración del Teorema 3.6

$$\begin{aligned}
\frac{dA_e(\tau_s,\alpha_s)}{ds} &= \Big[\frac{d\tau_s}{ds}(L(\alpha_s\circ\tau_s,\alpha_s'\circ\tau_s)+e)\Big]_a^b + \int_{\tau_s(a)}^{\tau_s(b)} \frac{dL(\alpha_s,\alpha_s')}{ds} \\
\int_{\tau_s(a)}^{\tau_s(b)} \frac{dL(\alpha_s,\alpha_s')}{ds} &= \Big[L_v(\alpha_s,\alpha_s')\frac{d\alpha_s}{ds}\Big]_{\tau_s(a)}^{\tau_s(b)} \\
&+ \int_{\tau_s(a)}^{\tau_s(b)} \Big(L_q(\alpha_s,\alpha_s') - \frac{dL_v(\alpha_s,\alpha_s')}{dt}\Big)\frac{d\alpha_s}{ds}
\end{aligned}$$

Como $\alpha_s(\tau_s(a)) = q$, $\alpha_s(\tau_s(b)) = Q$ y $E(\alpha_s\circ\tau_s,\alpha_s'\circ\tau) = e$,

$$\frac{d\alpha_s(\tau_s(a))}{ds} = \frac{d\alpha_s(\tau_s(a))}{ds} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Big[\frac{d\tau_s}{ds}\circ\tau_s^{-1}(L(\alpha_s,\alpha_s')+e) + L_v(\alpha_s,\alpha_s')\frac{d\alpha_s}{ds}\Big]_{\tau_s(a)}^{\tau_s(b)} \\
&\qquad = \Big[L_v(\alpha_s\circ\tau_s,\alpha_s'\circ\tau_s)\frac{d(\alpha_s\circ\tau_s)}{ds}\Big]_a^b = 0
\end{aligned}$$

Así,

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} A_e(\tau_s,\alpha_s) = \int_{\tau_0(a)}^{\tau_0(b)} \Big(L_q(\alpha_0,\alpha_0') - \frac{dL_v(\alpha_0,\alpha_0')}{dt}\Big)\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\alpha_s.$$

Por lo tanto (τ_0,α_0) es un punto crítico de A_e si y sólo si α_0 es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange (3.4). □

Ejemplo 3.1. Una función $q \mapsto G(q)$ que ascocia a cada punto de $\mathbb{R}^n$ una matriz simétrica positiva definida, define una métrica. Consideremos el lagrangiano mecánico

$$L(q,v) = \frac{1}{2}\langle G(q)v,v\rangle - V(q),$$

con energía
$$E(q,v) = \frac{1}{2}\langle G(q)v, v\rangle + V(q).$$
Entonces la funcional de acción reducida esta dada por
$$A_e(\tau,\alpha) = \int_{\tau(a)}^{\tau(b)} \langle G(\alpha)\alpha', \alpha'\rangle$$
La condición $E(\alpha,\alpha') = e$ implica que
$$\begin{aligned} \langle G(\alpha)\alpha', \alpha'\rangle &= 2(e - V\alpha) \\ \langle G(\alpha)\alpha', \alpha'\rangle &= \sqrt{2(e - V\alpha)}\sqrt{\langle G(\alpha)\alpha', \alpha'\rangle}. \end{aligned}$$
Considerando para cada $q \in V^{-1}(-\infty, e)$ la matriz positiva definida $J(q) = 2(e - V(q))G(q)$, definimos una nueva métrica en esa región, conocida como la métrica de Jacobi. Entonces la funcional de acción reducida esta dada por
$$\begin{aligned} A_e(\tau,\alpha) = \int_{\tau(a)}^{\tau(b)} \langle G(\alpha)\alpha', \alpha'\rangle &= \int_{\tau(a)}^{\tau(b)} \sqrt{\langle J(\alpha)\alpha', \alpha'\rangle} \\ &= \int_a^b \sqrt{\langle J(\alpha\circ\tau)(\alpha\circ\tau)', (\alpha\circ\tau)'\rangle}. \end{aligned}$$
Por el principio de Maupertuis, las geodésicas de la métrica J son las imagenes de las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange (3.4)

4. La función de acción. La ecuación de Hamilton-Jacobi

Sea $H : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$. Sea $g^t = (Q^t, P^t)$ la solución al sistema (3.1) tal que $g^0 = I$. Definimos la **función de acción**
$$\begin{aligned} S^\tau(x) &= \int_0^\tau (P^s(x)\frac{d}{ds}Q^s(x) - H(g^s(x), s))ds = \int_{g^{[0,\tau]}(x)} pdq - Hdt \\ &= \int_0^\tau (P^s(x)H_p(g^s(x), s) - H(g^s(x), s))ds \end{aligned}$$
Por el teorema fundamental del cálculo
$$\frac{\partial S^t(x)}{\partial t} = P^t(x)H_p(g^t(x), t) - H(g^t(x), t). \tag{3.5}$$

Consideremos una curva diferenciable $c(s) = (p(s), q(s)), |s| < \varepsilon$ y sea $\sigma(s,t) = g^t(c(s))$. Por el teorema de Stokes
$$\begin{aligned} \int_\sigma dp\wedge dq - dH\wedge dt &= S^\tau(c(0)) - S^\tau(c(s)) + \int_0^s c^*(P^\tau dQ^\tau) - \int_0^s c^*(pdq) \\ S^\tau(c(s)) - S^\tau(c(0)) &= \int_0^s c^*(P^\tau dQ^\tau - pdq). \end{aligned}$$

Por el teorema fundamental del cálculo

$$(S^\tau \circ c)' = c^*(P^\tau dQ^\tau - pdq) = (P^\tau dQ^\tau - pdq) \circ c',$$

o sea

$$dS^\tau = P^\tau dQ^\tau - pdq. \tag{3.6}$$

Supongamos que H_{pp} es invertible. La linealización Dg_t de g_t satisface la ecuación de variaciones

$$\frac{d}{dt}Dg^t = DX_H(g^t)Dg^t,\ Dg^0 = I$$

donde

$$DX_H = \begin{pmatrix} H_{pq} & H_{pp} \\ -H_{qq} & -H_{qp} \end{pmatrix}, \quad Dg^t = \begin{pmatrix} Q^t_q & Q^t_p \\ P^t_q & P^t_p \end{pmatrix}.$$

Como

$$P^0_p = I, Q^0_p = 0, \frac{d}{dt}Q^t_p = H_{pp}P^t_p + H_{pq}Q^t_p,$$

para $|t|$ peque no tenemos

$$Q^t_p = H_{pp}(I + O(t))t,\ \det Q^t_p = \det H_{pp}(1 + O(t))t^n.$$

Definiendo $\psi_t(q,p) = (q, Q^t(q,p))$, tenemos que

$$D\psi_t = \begin{pmatrix} I & 0 \\ Q^t_q & Q^t_p \end{pmatrix}.$$

Por lo que ψ_t es localmente invertible para $0 < |t| < \varepsilon$. Notemos que

$$g^t \circ \psi_t^{-1}(q,Q) = (Q, P(q,Q,t)),$$

y definamos la función de acción en las variables (q,Q,t)

$$S(q,Q,t) = S^t(\psi_t^{-1}(q,Q)).$$

Por (3.6) tenemos

$$p = -\frac{\partial S}{\partial q}(\psi_t(q,p),t),\ P = \frac{\partial S}{\partial Q}. \tag{3.7}$$

Se sigue de $S(\psi_t(q,p),t) = S^t(q,p)$ que

$$\frac{\partial S}{\partial t}(\psi_t(q,p),t) + \frac{\partial S}{\partial Q}(\psi_t(q,p),t)\frac{d}{dt}Q^t(q,p) = \frac{\partial S^t(x)}{\partial t}$$

que comparando con (3.5) da $\partial S/\partial t = -H(Q,P,t)$. Sustituyendo P de (3.7), tenemos que S satisface la ecuación de Hamilton - Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\Big(Q, \frac{\partial S}{\partial Q}, t\Big) = 0. \tag{3.8}$$

5. El método de Hamilton - Jacobi. Funciones generatrices

La idea del método de Hamilton - Jacobi es la siguiente. Bajo una transformación canónica, la forma hamiltoniana de las ecuaciones de movimiento se preserva así como el hamiltoniano (Teorema 3.4). Si somos capaces de encontrar una transformación canónica tal que el nuevo sistema hamiltoniano puede integrarse, entonces habremos integrado el sistema hamiltoniano original. Resulta que el problema de construir tal transformación canónica se reduce a encontrar una cantidad suficientemente grande de soluciones de la ecuación de Hamilton - Jacobi. Sea $g = (Q, P) : U \to \mathbb{R}^{2n}$ una transformación canónica donde U es una región simplemente conexa de $\mathbb{R}^{2n}$. Entonces existe $S : U \to \mathbb{R}$ tal que

$$dS = PdQ - pdq \tag{3.9}$$

Decimos que la transformación canónica g es **libre** en (q_0, p_0) si hay una vecindad de (q_0, p_0) donde la transformación $\psi(q, p) = (q, Q(q, p))$ es invertible. Es decir, supongamos que

$$\det D\psi(q_0, p_0) = \det \frac{\partial Q}{\partial p}(q_0, p_0) \neq 0.$$

La función $S_1 = S \circ \psi^{-1}$ se llama **función generatriz** de la transformación canónica g. Se sigue de (3.9) que

$$p = -\frac{\partial S_1}{\partial q} \circ \psi(q, p), \quad P = \frac{\partial S_1}{\partial Q} \circ \psi \tag{3.10}$$

TEOREMA 3.8. *Sea S_1 una funcion real definida en la vecindad del punto $(q_0, Q_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Si $\det \frac{\partial^2 S_1}{\partial Q \partial q}(q_0, Q_0) \neq 0$, entonces S_1 es la función generatriz de una transformación libre en $\Big(q_0, -\frac{\partial S_1}{\partial q}(q_0, Q_0)\Big)$.*

Demostración. Consideremos la transformación

$$G(q, Q) = \big(q, -\frac{\partial S_1}{\partial q}(q, Q)\big).$$

$$DG = \begin{bmatrix} I & 0 \\ * & \dfrac{\partial^2 S_1}{\partial Q \partial q} \end{bmatrix}.$$

Por el teorema de la función inversa, G es invertible en una vecindad de (q_0, Q_0). Definiendo

$$f(q, Q) = \big(Q, \frac{\partial S_1}{\partial Q}(q, Q)\big), \quad g = f \circ G^{-1},$$

tenemos que

$$Dg = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \dfrac{\partial^2 S_1}{\partial Q \partial q} & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ * & -\Big(\dfrac{\partial^2 S_1}{\partial Q \partial q}\Big)^{-1} \end{bmatrix} \circ G^{-1} = \begin{bmatrix} * & -\Big(\dfrac{\partial^2 S_1}{\partial Q \partial q}\Big)^{-1} \\ * & * \end{bmatrix} \circ G^{-1}.$$

Así, g es libre en (p_0, q_0) y de las definiciones de G y f se sigue que las ecuaciones (3.10) se satisfacen con $\psi = G^{-1}$, por lo que S_1 es una función generatriz de g. □

Si el hamiltoniano no depende de la coordenada p, o sea $H_p = 0$, entonces el sistema (3.1) resulta

$$\dot{q} = 0,\ \dot{p} = -H_q$$

y se integra inmediatamente

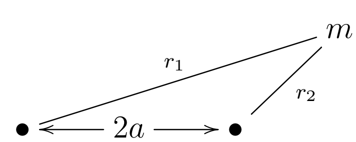
$$q(t) = q(0),\ p(t) = p(0) - \int_0^t H_q(q(0), s) ds.$$

Buscaremos una transformación canónica que transforma el hamiltoniano autónomo $H(q,p)$ en uno de la forma $K(Q)$. De hecho buscaremos una transformación libre con función generatriz S. De (3.10) obtenemos la condición

$$H(q, -\frac{\partial S}{\partial q}(q,Q)) = K(Q) \tag{3.11}$$

Teorema 3.9. (Jacobi) *Si se encuentra una solución $S(q,Q)$ de la ecuación* (3.11) *dependiendo de n parámetros $Q_1, \ldots, Q_n$, y tal que* $\det \dfrac{\partial^2 S}{\partial Q \partial q} \neq 0$, *entonces el sistema* (3.1) *puede resolverse explícitamente por cuadraturas. Las funciones $Q_i(q,p), i = 1, \ldots, n$ determinadas por $\dfrac{\partial S}{\partial q}(q,Q) = -p$, son primeras integrales del sistema.*

Ejemplo 3.2. **Problema de atracción con dos centros fijos.** Considere el problema plano de atracción hacia dos puntos fijos de igual masa. Supongamos que la distancia entre los puntos fijos es $2a$ y que las distancias de una masa movil hacia esos puntos son r_1 y r_2.



Las coordenadas elípticas se definen como $\xi = r_1 + r_2$, $\eta = r_1 - r_2$.

Si las coordenadas cartesianas de los puntos fijos son $(-a, 0), (a, 0)$ y las de la masa movil son (x, y) entonces

$$\begin{aligned}
r_1^2 = (x+a)^2 + y^2 \quad &, \quad r_2^2 = (x-a)^2 + y^2 \\
\xi\eta = r_1^2 - r_2^2 &= (x+a)^2 + (x-a)^2 = 4ax \\
y^2 = r_1^2 - (x+a)^2 &= \frac{(\xi+\eta)^2}{4} - \left(\frac{\xi\eta}{4a} + a\right)^2 = -\frac{(\xi^2-4a^2)(\eta^2-4a^2)}{2^4a^2} \\
\dot{x} = \frac{\xi\dot{\eta} + \eta\dot{\xi}}{4a} \quad &, \quad y\dot{y} = -\frac{\xi\dot{\xi}(\eta^2-4a^2) + \eta\dot{\eta}(\xi^2-4a^2)}{2^4a^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= \frac{\dot{\xi}^2\eta^2 + 2\dot{\xi}\xi\dot{\eta}\eta + \dot{\eta}^2\xi^2}{2^4a^2} \\
&- \frac{\xi^2\dot{\xi}^2(\eta^2-4a^2)^2 + 2\dot{\xi}\xi\dot{\eta}\eta(\eta^2-4a^2)(\xi^2-4a^2) + \dot{\eta}^2\eta^2(\xi^2-4a^2)^2}{2^4a^2(\xi^2-4a^2)(\eta^2-4a^2)} \\
&= \frac{\dot{\xi}^2\eta^2 + \dot{\eta}^2\xi^2}{2^4a^2} - \frac{\xi^2\dot{\xi}^2(\eta^2-4a^2)}{2^4a^2(\xi^2-4a^2)} - \frac{\eta^2\dot{\eta}^2(\xi^2-4a^2)}{2^4a^2(\eta^2-4a^2)} \\
&= \frac{\xi^2-\eta^2}{4(\xi^2-4a^2)}\dot{\xi}^2 + \frac{\eta^2-\xi^2}{4(\eta^2-4a^2)}\dot{\eta}^2.
\end{aligned}$$

Por comodidad suponemos que los centros fijos tienen masa unitaria

$$\begin{aligned}
L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{k}{r_1} + \frac{k}{r_2} &= \frac{\xi^2-\eta^2}{8(\xi^2-4a^2)}\dot{\xi}^2 + \frac{\eta^2-\xi^2}{8(\eta^2-4a^2)}\dot{\eta}^2 + \frac{4k\xi}{\xi^2-\eta^2} \\
p_\xi = L_{\dot{\xi}} = \frac{\xi^2-\eta^2}{4(\xi^2-4a^2)}\dot{\xi} \quad &, \quad p_\eta = L_{\dot{\eta}} = \frac{\eta^2-\xi^2}{8(\eta^2-4a^2)}\dot{\eta} \\
H = p_\xi\dot{\xi} + p_\eta\dot{\eta} - L &= 2p_\xi^2\frac{\xi^2-4a^2}{\xi^2-\eta^2} + 2p_\eta^2\frac{4a^2-\eta^2}{\xi^2-\eta^2} - \frac{4k\xi}{\xi^2-\eta^2}
\end{aligned}$$

La ecuacion de Hamilton-Jacobi (3.11)

$$H(\xi, \eta, -\frac{\partial S}{\partial \xi}, -\frac{\partial S}{\partial \eta}) = K$$

Puede escribirse

$$2\frac{\partial S}{\partial \xi}^2(\xi^2-4a^2)+2\frac{\partial S}{\partial \eta}^2(4a^2-\eta^2)-4k\xi=K(\xi^2-\eta^2)$$

y por lo tanto podemos separar variables, haciendo $K=2c_2$ y

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial \xi}^2(\xi^2-4a^2)-2k\xi-c_2\xi^2 &= c_1\\ \frac{\partial S}{\partial \eta}^2(4a^2-\eta^2)+c_2\eta^2 &= -c_1.\end{aligned}$$

Que podemos integrar como

$$S(\xi,\eta,c_1,c_2)=\int\sqrt{\frac{c_1+c_2+2k\xi}{\xi^2-4a^2}}d\xi+\int\sqrt{\frac{-c_1-c_2\eta^2}{4a^2-\eta^2}}d\eta.$$

Capítulo 4

Teoría de Aubry-Mather

1. Transformaciones twist del anillo

En este capítulo consideraremos transformaciones del anillo $\mathbb{A} = \mathbb{S}^1 \times [a,b]$ donde $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Más generalmente, dadas funciones continuas $u_\pm : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ podriamos pensar que

$$\mathbb{A} = \{(p,z) : u_-(z) \leq p \leq u_+(z)\}.$$

Tenemos la transformación $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dada por $\exp(q) = e^{2\pi i q}$ y denotando por $\mathcal{A}$ la banda $\mathbb{R} \times [a,b]$, la transformación cubriente

$$\mathrm{proj} : \mathcal{A} \to \mathbb{A}, \mathrm{proj}(q,p) = (\exp(q), p).$$

Dada una transformación continua $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ hay una transformación continua $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, llamada levantamiento de f tal que

$$f \circ \mathrm{proj} = \mathrm{proj} \circ F. \tag{4.1}$$

Se sigue de (4.1) que $F(q+1,p) = F(q,p) + (n,0)$ con n entero, el cual es independiente de (q,p) por la continuidad de F. Si G es otro levantamineto de F se sigue de (4.1) que $G(q,p) = F(q,p) + (m,0)$ con m entero, que por la continuidad de F y G no depende de (q,p). Por consiguiente el número n no depende del levantamiento y se conoce como el grado $\deg f$ de f. Nosotros supondremos que f es un difeomorfismo que preserva la orientación y por lo tanto $\deg f = 1$, o sea que para cualquier levantamiento F de f, $F(q+1,p) = F(q,p) + (1,0)$. Es decir que si $T(q,p) = (q+1,p)$ entonces $F \circ T = T \circ F$.

Definición 4.1. Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $F = (Q,P)$ un difeomorfismo que satisface

1. F preserva las fronteras de $\mathcal{A}$: $P(q,a) = a$, $P(q,b) = b$.
2. F es canónica, o sea $dP \wedge dQ = dp \wedge dq$, o bien $\det DF = 1$.
3. La función $p \to Q(q_0, p)$ es monótona para cada $q_0 \in \mathbb{R}$.
4. $F \circ T = T \circ F$.

Entonces F define una transformación **twist** $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$.

La condición 3 en la definición 4.1 se puede escribir como $\dfrac{\partial Q}{\partial p} \neq 0$. Si esta derivada es positiva (negativa) decimos que f es una transformación twist positiva (negativa). Como vimos en la sección 4 del Capítulo 3, esta forma de la condición 3 implica que la transformación $\psi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\psi(q,p) = (q, Q(q,p))$ es un difeomorfismo local, y por la condición 3 misma tenemos que ψ es un encaje.

Observación 4.1. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación canónica tal que $F \circ T = T \circ F$. Existe $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $dS = PdQ - pdq$.

La definición de T dice que $p \circ T = p$, $q \circ T = q + 1$ y la condicion 4 en la definición 4.1 significa que $P \circ T = P$ y $Q \circ T = Q + 1$. Así

$$d(S \circ T) = P \circ T d(Q \circ T) - p \circ T d(q \circ T) = PdQ - pdq = dS$$

y entonces $S \circ T - S$ es una constante que denotamos por $\operatorname{flux} F$. Sea $\beta : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ una curva tal que $\beta(1) = T(\beta(0))$ de tal forma que $\operatorname{proj} \circ \beta$ es una curva en el cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ que recorre una vez $\mathbb{S}^1$. Entonces

$$\operatorname{flux} F = S(\beta(1)) - S(\beta(0)) = \int_\beta PdQ - pdq = \int_{F(\beta)} pdq - \int pdq.$$

Así, $\operatorname{flux} F$ es el área neta, limitada por $\operatorname{proj} \circ \beta$ y su imagen bajo f, del cilindro definida por F.

Si F preserva las curvas frontera de algun anillo entonces $\operatorname{flux} F = 0$.

En virtud de esta observación damos la siguiente

Definición 4.2. Sea $F = (Q, P)$ un difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ tal que

1. F es isotópico a la identidad.
2. $\psi : (q,p) \mapsto (q, Q(q,p))$ es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$.
3. Existe $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $d(S \circ \psi) = PdQ - pdq$ y

$$S(q+1, Q+1) = S(q, Q).$$

Entonces F define una transformación **twist monótona** f del cilindro con función **generatriz** S.

Ejemplo 4.1. Consideremos la dinámica de una bola en una mesa de billar con frontera convexa $\mathcal{C}$. El movimiento esta sujeto a leyes simples: entre rebotes sucesivos la bola viaja en línea recta y en un rebote los ángulos de incidencia y reflexión son iguales. Sea x la longitud de arco con respecto a un punto fijo en la frontera, que supondremos orientada en el sentido antihorario. Sea θ el ángulo de reflexión en un punto de rebote $C(x) \in \mathcal{C}$ y sea $y = -\cos\theta$. Debido a la convexidad de $\mathcal{C}$, el par (x, y) determina su sucesor (X, Y) y visceversa. Si incrementamos y manteniendo x fijo, la convexidad de $\mathcal{C}$ implica que

$C(X)$ se mueve sobre $\mathcal{C}$ en la dirección positiva . O sea $\dfrac{\partial X}{\partial y} > 0$. Sea $S(x, X) = -\|C(X) - C(x)\|$ entonces, ya que $C'(x)$ es un vector tangente unitario,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x} &= \frac{C'(x) \cdot (C(X) - C(x))}{S(x, X)} = -y \\ \frac{\partial S}{\partial X} &= \frac{C'(X) \cdot (C(X) - C(x))}{-S(x, X)} = Y \end{aligned} \tag{4.2}$$

por lo que

$$Y dX - y dx = dS(x, X). \tag{4.3}$$

2. Un principio variacional

Una transformación twist da lugar a un sistema dinámico, cuyas órbitas estan dadas por las imagenes de puntos (z, p) bajo iteraciones sucesivas de f.

Lema 4.1. *Supongamos que $F : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^2$ define una transformación twist monónotona del anillo o el cilindro y sea S su función generatriz. Entonces hay una correspondencia biunívoca entre órbitas $\{(z_k, p_k) = f^k(z_0, p_0) : k \in \mathbb{Z}\}$ y sucesiones $\{q_k : k \in \mathbb{Z}\}$ que satisfacen*

$$\partial_1 S(q_k, q_{k+1}) + \partial_2 S(q_{k-1}, q_k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \tag{4.4}$$

estando la correspondencia dada por $z_k = \exp(q_k)$, $p_k = -\partial_1 S(q_k, q_{k+1})$.

Demostración. Si $\{(z_k, p_k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es una órbita de f, escojamos q_0 tal que $\exp(q_0) = z_0$ y $\forall k \in \mathbb{Z}$ definamos q_k por $(q_k, p_k) = F^k(q_0, p_0)$. Entonces $(q_k, p_k) = F(q_{k-1}, p_{k-1})$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ y de $d(S \circ \psi) = PdQ - pdq$ tenemos

$$p_k = -\partial_1 S(q_k, q_{k+1}) = \partial_2 S(q_{k-1}, q_k).$$

Reciprocamente si $\{q_k : k \in \mathbb{Z}\}$ satisface (4.4), hagamos $p_k = -\partial_1 S(q_k, q_{k+1}) \forall k \in \mathbb{Z}$ y así $(q_k, p_k) = \psi^{-1}(q_k, q_{k+1})$. De $d(S \circ \psi) = PdQ - pdq$ y (4.4) tenemos

$$\begin{aligned} F(q_{k-1}, p_{k-1}) &= F \circ \psi^{-1}(q_{k-1}, q_k) = (q_k, \partial_2 S(q_{k-1}, q_k)) \\ &= (q_k, -\partial_1 S(q_k, q_{k+1})) = (q_k, p_k) \end{aligned}$$

□

Las ecuaciones (4.4) pueden interpretarse como la “ecuaciones de Euler - Lagrange discretas” para una cierta función de acción. En realidad a un segmento dado de puntos $(q_N, \ldots, q_M)$ podemos asociarle su

acción definida por

$$W(q_N, \dots, q_M) = \sum_{k=N}^{M-1} S(q_k, q_{k+1})$$

Siguiendo la analogía, la "transformación de Legendre discreta" esta dada por la inversa $(q, Q) \mapsto (q, -\partial_1 S(q, Q))$ de ψ. Definiendo

$$V(q_N, p_N, \dots, q_M, p_{M-1}) = \sum_{k=N}^{M-1} p_k(q_{k+1} - q_k) - S(q_k, q_{k+1}),$$

tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial p_k} &= q_{k+1} - q_k, \quad N \leq k < M \\ \frac{\partial V}{\partial q_k} &= p_{k-1} - p_k - \partial_1 S(q_k, q_{k+1}) - \partial_2 S(q_{k-1}, q_k),\ N < k < M. \end{aligned}$$

Por lo tanto las ecuaciones (4.4) son equivalentes a las "ecuaciones de Hamilton discretas"

$$\begin{aligned} q_{k+1} - q_k &= \frac{\partial V}{\partial p_k} \\ p_k - p_{k+1} &= \frac{\partial V}{\partial q_{k+1}}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

COROLARIO 4.1. *El segmento $(q_N, \dots, q_M)$ es la proyección al eje horizontal de un segmento de órbita de F si y sólo si es un punto crítico de la restricción $\tilde{W}$ de W al conjunto de segmentos $(x_N, \dots, x_M)$ con puntos fijos $x_N = q_N, x_M = q_M$.*

Demostración. Dada $(q_N, \dots, q_M)$ definamos

$$p_k = -\partial_1 S(q_k, q_{k+1}),\ P_k = \partial_2 S(q_{k-1}, q_k))$$

de tal forma que $F(q_k, p_k) = (q_{k+1}, P_{k+1})$. Entonces

$$d\tilde{W}(q_N, \dots, q_M) = \sum_{k=N+1}^{M-1} (P_k - p_k) dq_k$$

Así $(q_N, \dots, q_M)$ es un punto crítico de $\tilde{W}$ si y sólo si $P_k = p_k$ que es otra manera de expresar (4.4) o sea que $((q_N, p_N), \dots, (q_M, p_M))$ es un segmento de órbita de F. $\square$

Si existen $m, n \in \mathbb{N}$ tales que la órbita $\{(q_k, p_k) : k \in \mathbb{Z}\}$ de F satisface

$$q_{k+n} = q_k + m \tag{4.6}$$

es decir $F^n(q_k, p_k) = T^m(q_k, p_k)$, entonces $f^n(\mathrm{proj}(q_k, p_k)) = \mathrm{proj}(q_k, p_k)$, o sea que la órbita $\{\mathrm{proj}(q_k, p_k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es periódica. Diremos que una sucesión $\{q_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es de tipo (m, n) si satisface (4.6) y denotaremos por X_{mn} al conjunto de ellas. Podemos identificar a X_{mn} con el subespacio afín de $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por la ecuación $q_{n+1} = q_1 + m$. Una órbita de F, cuya proyección en el eje q es una sucesión de tipo (m, n) se llamará (m, n) órbita. Después de n iteraciones de F una (m, n) órbita ha sido trasladada un entero m en la dirección q. En el anillo, podemos interpretar esto diciendo que después de n iteraciones de f, la órbita ha dado m vueltas.

Proposición 4.1. *Una sucesión de tipo (m, n) es la proyeccíon de una (m, n) orbita si y sólo si es un punto crítico de $W_{mn} : X_{mn} \to \mathbb{R}$*

$$W_{mn}(q_1, \ldots, q_n) = S(q_n, q_1 + m) + \sum_{k=1}^{n-1} S(q_k, q_{k+1})$$

Definición 4.3. Sea $\{(q_k, p_k) : k \in \mathbb{Z}\}$ una órbita de F. En caso de existir, el límite

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{k}$$

se llama **número de rotación** de la órbita.

Obviamente una (m, n) órbita tiene número de rotación m/n.

3. El teorema de Aubry - Mather

Si $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es el levantamiento de un homeomorfismo de la circunferencia que preserva orientación, entonces es estrictamente creciente y $G(q + 1) = G(q) + 1$. Así, si $\{q_k : k \in \mathbb{Z}\}$ es una órbita de G, debe satisfacer que

$$\forall k, j, m \in \mathbb{Z} \quad x_k \leq x_j + m \Rightarrow x_{k+1} \leq x_{j+1} + m. \tag{4.7}$$

Decimos que una sucesión de números reales $\{q_k : k \in \mathbb{Z}\}$ está **ordenada ciclicamente** si satisface (4.7). Claramente, el conjunto de sucesiones ordenadas ciclicamente, es un cerrado para la topología de la convergencia puntual en el conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$. El orden parcial en sucesiones de reales da tres tipos de estricticidad

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{q} &\iff x_k \leq q_k \forall k \in \mathbb{Z} \\ \boldsymbol{x} < \boldsymbol{q} &\iff \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{q} &\iff x_k < q_k \forall k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Definiendo $\tau_{mn} : \mathbb{R}^{Z} \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ por $(\tau_{mn}\boldsymbol{x})_k = x_{k+n} + m$, la condición (4.7) es equivalente a

$$\forall j, m \in \mathbb{Z} \quad \tau_{jm}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x} \quad \text{ó} \quad \boldsymbol{x} \leq \tau_{jm}\boldsymbol{x}.$$

Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el levantamiento de una transformación twist f del cilindro con función generatriz S. Un segmento $(q_N, \ldots, q_M)$ es **minimizante** (de la acción) si

$$W((q_N, \ldots, q_M) \leq W(x_N, \ldots, x_M)$$

para cualquier otro segmento $(x_N, \ldots, x_M)$ con los mismos puntos fijos $x_N = q_N, x_M = q_M$. Ya que segmentos minimizantes son puntos críticos de W, ellos corresponden a segmentos de órbita llamados **segmentos de órbita minimizantes**. Una sucesión $\{q_k : k \in \mathbb{Z}\}$ se llama **minimizante** (global de la acción) si todos sus segmentos son minimizantes. La órbita correspondiente se llama **minimizante**. El conjunto de minimizantes es un cerrado para la topología de la convergencia puntual.

Teorema 4.2. Aubry-Mather.

Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el levantamiento de una transformación twist C^2 del cilindro con función generatriz S que satisface

$$\lim_{|Q-q| \to \infty} S(q, Q) = \infty. \tag{4.8}$$

Entonces F tiene órbitas de todos los números de rotación. De hecho, podemos escoger estas órbitas $\{(q_k, p_k) : k \in \mathbb{Z}\}$ de tal forma que

1. *La sucesión $\{q_k : k \in \mathbb{Z}\}$ esta ordenada ciclicamente y es un minimizante global de la acción.*
2. *Ellas yacen en conjuntos cerrados Λ invariantes bajo F, llamados conjuntos de Aubry-Mather, los cuales son gráficas Lipschitz sobre su proyección $\boldsymbol{\pi}$ en la recta $p = 0$, con constante de Lipschitz que depende solo de $a = \inf_{\Lambda} \dfrac{\partial Q}{\partial p}$.*
3. *Todas las órbitas en Λ están ordenadas ciclicamente y tienen el mismo número de rotación.*
4. *La proyección $\boldsymbol{\pi}$ es un conjunto invariante del levantamiento G de un homeomorfismode la circunferencia y por lo tanto $F|\Lambda$ es conjugado a $G|\boldsymbol{\pi}$.*

Lema 4.2. *Sea $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una transformación twist $C^k, k \geq 2$ del anillo compacto. Entonces f puede extenderse a una transformación twist C^k del cilindro, de tal forma que coincide con la transformación* $\text{proj}(q, p) \mapsto \text{proj}(q + cp, p)$ *afuera de un compacto. En particular satisface la condición* (4.8)

TEOREMA 4.3. Aubry-Mather para el anillo.
Sea F el levantamiento de una transformación twist del anillo y sean ρ_-, ρ_+ los numeros de rotación de la restricciónes a las fronteras inferior y superior respectivamente. Entonces F tiene órbitas con cualquier número de rotación en $[\rho_-, \rho_+]$. Esas órbitas son minimizantes, recurrentes, están ordenadas ciclicamente y yacen en conjuntos invariantes compactos que forman gráficas Lipschitz. Esos conjuntos pueden ser órbitas periódicas, circunferencias invariantes o conjuntos de Cantor sobre los cuales la transformación es semiconjugada a rotaciones irracionales.

Esquema de la demostración. Minimizando W_{mn}, encontramos órbitas periódicas para todos los números racionales de rotación. El lema fundamental de Aubry 4.5 implica que los minimizantes de W_{mn} están ordenados ciclicamente, es decir, estan ordenados como órbitas de homemomorfismos de la circunferencia. Como el conjunto de sucesiones ordenadas ciclicamente es cerrado, al tomar límites de sucesiones de órbitas periódicas, obtenemos otras órbitas ordenadas ciclicamente. El número de rotación de estas órbitas límite existe de acuerdo al siguiente lema.

LEMA 4.3. *Supongamos que $\{q_k : k \in \mathbb{Z}\}$ está ordenada ciclicamente, entonces $\rho(\boldsymbol{q}) = \lim_{k\to\infty} \frac{q_k}{k}$ existe y de hecho*

$$|q_k - q_0 - k\rho(\boldsymbol{q})| \leq 1.$$

Una sucesión $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ es una función $\boldsymbol{q} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. Podemos interpolar esta función para obtener una función afín a trozos. La gráfica de esta función se conoce como el **diagrama de Aubry** de la sucesión. Decimos que dos sucesiones $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}$ se cruzan si sus correspondientes diagramas de Aubry lo hacen. El cruce pude darse en un entero k en cuyo caso $(q_{k-1} - x_{k-1})(q_{k+1} - x_{k+1}) < 0$ ó en un número no entero $t \in (k, k+1)$ en cuyo caso $(q_k - x_k)(q_{k+1} - x_{k+1}) < 0$. Observe que $\boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{x}$ nunca se cruzan si y sólo si $\boldsymbol{q} \leq \boldsymbol{x}$ ó $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{q}$ y que por lo tanto una sucesión $\boldsymbol{q}$ es ordenada ciclicamete si y sólo si no se cruza con ninguno de sus trasladados $\tau_{mn}\boldsymbol{q}$.

LEMA 4.4. *Supongamos que $(q - x)(Q - X) \leq 0$. Entonces*

$$S(q, Q) + S(x, X) - S(q, X) - S(x, Q) \geq 0,$$

y la igualdad se da si y sólo si $(q - x)(Q - X) = 0$.

LEMA 4.5. (Fundamental de Aubry) *Dos minimizantes distintos se pueden cruzar sólo una vez.*

COROLARIO 4.4. *Los minimizantes de* W_{mn} *están ordenados ciclicamante y el conjunto de sus trasladados está completamente ordenado respecto al orden parcial en* $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$.

PROPOSICIÓN 4.2. *Los minimizantes de* W_{mn} *son minimizantes globales.*

PROPOSICIÓN 4.3. *Sea* F *el levantamiento de una transformación twist del cilindro con función generatriz satisfaciendo* (4.8). *Entonces* W_{mn} *tiene un minimo para todo par* m, n.

Bibliografía

[AM] R. Abraham & J. Marsden *Foundations of Mechanics*. Perseus.

[Ar] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics Vol. 60, Spinger. New York 1989.

[Be] R. Berndt *An Introduction to Symplectic Geometry*. Graduate Studies in Mathematics Vol. 26 AMS

[Go] C. Golé *Symplectic Twist Maps*. Advanced Series in nonlinear dynamics Vol. 18. World Sientific

[McDS] D. Mc Duff & D. Salamon *Introduction to Symplectic Topology* . Oxford University Press.

[Sp] M. Spivak. *Calculo en Variedades*. Reverté.