

Introducción a la Geometría Simpléctica y la Dinámica Hamiltoniana

Héctor Sánchez Morgado

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM, CIUDAD UNIVERSITARIA
C. P. 04510, CD. DE MÉXICO, MÉXICO.

Índice general

Capítulo 1. Algebra lineal simpléctica	5
1. Formas simplécticas	5
2. Subespacios de un espacio simpléctico	8
Capítulo 2. Variedades	13
1. Campos vectoriales y flujos	13
2. Integración en cadenas	19
3. Conexiones y geodésicas	24
Capítulo 3. Variedades Simplécticas	29
1. Variedades Simplécticas	29
2. Grupos de Lie	31
3. El teorema de Darboux	36
4. Acciones simplécticas	39
Capítulo 4. El formalismo canónico	43
1. Las ecuaciones de Hamilton	43
2. Hamiltoninos Autónomos	46
3. Principios variacionales	47
4. La función de acción. La ecuación de Hamilton-Jacobi	49
5. El método de Hamilton - Jacobi. Funciones generatrices	51
Capítulo 5. Teoría de Aubry-Mather	55
1. Transformaciones twist del anillo	55
2. Un principio variacional	57
3. El teorema de Aubry - Mather	59
Bibliografía	63

CAPÍTULO 1

Algebra lineal simpléctica

1. Formas simplécticas

DEFINICIÓN 1.1. Sea V espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Una forma **simpléctica** en V es una función bilineal $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que

- Es **antisimétrica** o sea $\omega(v, w) = -\omega(w, v)$ o equivalentemente $\omega(v, v) = 0$.
- No es **degenerada** o sea que

$$\omega(v, w) = 0 \forall w \in V \rightarrow v = 0$$

Si ω es una forma simpléctica en V decimos que (V, ω) es un espacio lineal simpléctico.

Dada una base $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ de V defina la matriz $\omega_e = (\omega_{ij}) = (\omega(e_i, e_j))$. Entonces ω es una forma simpléctica si y sólo si ω_e es antisimétrica e invertible.

PROPOSICIÓN 1.1. Sea $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una función bilineal antisimétrica. Entonces hay una base e de V tal que

$$\omega_e = \begin{bmatrix} 0 & E_m & 0 \\ -E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde E_m es la matriz identidad $m \times m$.

Por lo tanto, si ω es simpléctica entonces hay una base e llamada **simpléctica** tal que

$$\omega_e = \begin{bmatrix} 0 & E_m \\ -E_m & 0 \end{bmatrix}$$

y $\dim V = 2m$.

Demostración. Si $\omega \neq 0$ escogemos $e_1, f_1 \in V$ tal que $\omega(e_1, f_1) = 1$. Sea

$$V_1 = \{v \in V : \omega(v, e_1) = \omega(v, f_1) = 0\}$$

Si $\omega|_{V_1 \times V_1}$ no es cero escogemos $e_2, f_2 \in V_1$ tal que $\omega(e_2, f_2) = 1$. Continuando el proceso construimos vectores linealmente independientes $e_1, \dots, e_m, f_1 \dots, f_m$ tales que poniendo $e_{m+j} = f_j, j = 1, \dots, m$ y

$$V_k = \{v \in V : \omega(v, e_j) = 0, j = 1, \dots, 2k\}$$

tenemos que $\omega|_{V_k \times V_k} = 0$. Si $V_k = \{0\}$, ω es simpléctica. En otro caso escogemos $\{e_{2m+1}, \dots, e_n\}$ base de V_k . \square

Para el espacio vectorial V , denotemos por V^* al espacio dual, por $V^* \otimes V^*$ al espacio de funciones bilineales y por $\wedge^2(V)$ al espacio de funciones bilineales antisimétricas. Análogamente definimos el espacio $\wedge^k(V)$ de funciones multilineales antisimétricas $\omega : V^k \rightarrow \mathbb{R}$. Dados $h, g \in V^*$ definimos $g \otimes h \in V^* \otimes V^*$ y $g \wedge h \in \wedge^2(V)$ mediante

$$g \otimes h(v, w) = g(v)h(w)$$

$$g \wedge h(v, w) = g(v)h(w) - h(w)g(v)$$

Dada la base e consideremos la base dual $= \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ definida por

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Si $\omega \in \wedge^2(V)$ entonces

$$\omega = \sum_{i < j} \omega(e_i, e_j) e_i^* \wedge e_j^*.$$

La Proposición 1.1 dice que hay una base e tal que

$$\omega = \sum_i e_i^* \wedge e_{i+m}^*.$$

Si $\phi_1, \dots, \phi_k \in V^*$, definimos la función multilineal $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k : V^k \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k(v_1, \dots, v_k) = \det(\phi_i(v_j)).$$

EJEMPLO 1.1. Sea $V = \mathbb{R}^3$ con el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y el producto vectorial \times usuales. Para $A \in V$, definimos $\omega_A^1 \in V^*$, $\omega_A^2 \in \wedge^2 V^*$ mediante

$$\omega_A^1(v) = \langle A, v \rangle, \quad \omega_A^2(v, w) = \langle A, v \times w \rangle = \det(A, v, w)$$

Sean $A, B \in V$.

$$\begin{aligned} \omega_A^1 \wedge \omega_B^1(v, w) &= \omega_A^1(v)\omega_B^1(w) - \omega_A^1(w)\omega_B^1(v) = \langle A, v \rangle \langle B, w \rangle - \langle A, w \rangle \langle B, v \rangle \\ &= \langle A, B \times (v \times w) \rangle = \langle A \times B, v \times w \rangle = \omega_{A \times B}^2(v, w), \end{aligned}$$

por lo tanto $\omega_A^1 \wedge \omega_B^1 = \omega_{A \times B}^2$.

Sea e_1, e_2, e_3 la base canónica de \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned}\omega_A^1 \wedge \omega_B^2(e_1, e_2, e_3) &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in S_3} \text{sgn } \sigma \omega_A^1(e_{\sigma(1)}) \omega_B^2(e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}) = \\ &\omega_A^1(e_1) \omega_B^2(e_2, e_3) + \omega_A^1(e_2) \omega_B^2(e_3, e_1) + \omega_A^1(e_3) \omega_B^2(e_1, e_2) = \\ &\langle A, e_1 \rangle \langle B, e_1 \rangle + \langle A, e_2 \rangle \langle B, e_2 \rangle + \langle A, e_3 \rangle \langle B, e_3 \rangle = \langle A, B \rangle,\end{aligned}$$

por lo tanto $\omega_A^1 \wedge \omega_B^2 = \langle A, B \rangle \det$.

COROLARIO 1.1. Sean V un espacio vectorial de dimensión $2k$ y $\omega \in \wedge^2(V)$. Entonces ω es simpléctica si y sólo si $\omega^k \omega \wedge \cdots \wedge \omega \neq 0$.

Demostración. Si $\omega \in \wedge^2(V)$, por la Proposición 1.1 hay una base e de V tal que $\omega = \sum_{i \leq m} e_i^* \wedge e_{i+1}^*$. Así

$$\omega^m = c_m e_1^* \wedge \cdots \wedge e_{2m}^*$$

donde $c_m \neq 0$. Si $m < k$ entonces $\omega^k = 0$. Si $m = k$ entonces $\omega^k \neq 0$. \square

Si $F : W \rightarrow V$ es lineal definimos $F^* : \wedge^k(V) \rightarrow \wedge^k(W)$ mediante

$$F^* \eta(w_1, \dots, w_k) = \eta(F(w_1), \dots, F(w_k)).$$

Notemos que $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$ para $F : W \rightarrow V, G : U \rightarrow W$ lineales.

Sea (V, ω) un espacio simpléctico, una transformación lineal $F : V \rightarrow V$ se llama simpléctica si preserva ω , es decir $F^* \omega = \omega$. El conjunto $\text{Sp}(V, \omega)$ de transformaciones simplécticas es un grupo llamado grupo simpléctico.

EJEMPLO 1.2. En \mathbb{R}^{2m} consideremos la forma simpléctica canónica

$$\omega_0(x, y) = x \cdot J_m y \quad J_m = \begin{bmatrix} 0 & E_m \\ -E_m & 0 \end{bmatrix}$$

Denotaremos $\text{Simp}(m) = \text{Sp}(\mathbb{R}^{2m}, \omega_0)$, entonces $F \in \text{Simp}(m)$ si y sólo si para toda pareja $x, y \in \mathbb{R}^{2m}$

$$x \cdot J_m y = (Fx) \cdot J_m y = x \cdot F^T J_m F y$$

si y sólo si $F^T J_m F = J_m$. Escribiendo $F = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, la igualdad

$F^T J_m F = J_m$ queda

$$\begin{bmatrix} 0 & -E_m \\ E_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -E_m \\ E_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^T C - A^T C & C^T B - A^T D \\ D^T A - B^T C & D^T B - B^T D \end{bmatrix}$$

que dice que $A^T C, B^T C$ sean simétricas y $D^T A - B^T C = E_m$.

EJEMPLO 1.3. Sea W un espacio vectorial cualquiera que llamaremos espacio de **configuración**. Consideremos el espacio **fase** $V = W \oplus W^* = \{(v, h) : v \in W, h \in W^*\}$. Definamos la forma simpléctica ω en V mediante

$$\omega((v_1, h_1), (v_2, h_2)) = h_1(v_2) - h_2(v_1).$$

Cualquier isomorfismo lineal $f : W \rightarrow W$ induce una transformación simpléctica $F : V \rightarrow V$ dada por $F(v, h) = (f(v), h \circ f^{-1})$.

2. Subespacios de un espacio simpléctico

DEFINICIÓN 1.2. Sea (V, ω) un espacio lineal simpléctico y sea W un subespacio vectorial de V . Definimos

$$W^\perp = \{v \in V : \omega(v, w) = 0 \forall w \in W\}, \quad \text{rad } W = W \cap W^\perp.$$

Si $W \subset W^\perp$ decimos que W es **isotrópico**.

Si $W \subset W^\perp$ decimos que W es **coisotrópico**.

Si $W^\perp = W$ decimos que W es **lagrangiano**.

Si $\text{rad } W = \{0\}$ decimos que W es **simpléctico**.

COROLARIO 1.2.

- $(W^\perp)^\perp = W$
- Si $W_1 \subset W_2$, entonces $W_2^\perp \subset W_1^\perp$
- $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$, $W_1^\perp \cap W_2^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.
- $\dim W^\perp = \dim V - \dim W$.
- $W/\text{rad } W$ con $\omega^*(v + \text{rad}, w + \text{rad}) = \omega(v, w)$ es un espacio simpléctico.

PROPOSICIÓN 1.2. Sea (V, ω) un espacio lineal simpléctico y sea W un subespacio vectorial de V . Sea U subespacio simpléctico tal que

$$W = \text{rad } W \oplus U.$$

Sea $\{e_1, \dots, e_r\}$ base de $\text{rad } W$, entonces existen $f_1, \dots, f_r \in U^\perp$ tales que $\{e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_r\}$ es una base simpléctica del subespacio que genera. Así

$$\langle f_1, \dots, f_r \rangle \oplus W$$

es un subespacio simpléctico.

Demostración. (Por inducción). Supongamos que hemos escogido $\{f_1, \dots, f_r\} \in U$ tales que $\{e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_s\}$ es una base simpléctica del subespacio que genera. Sea

$$X = \langle e_1, \dots, e_s \rangle \oplus U \subset W.$$

Como $e_{s+1} \in \text{rad } W \subset W^\perp \subset X^\perp$ y $e_{s+1} \notin X \supset \text{rad } X = \text{rad } X^\perp$, hay un $f_{s+1} \in X^\perp \subset U^\perp$ con $\omega(e_{s+1}, f_{s+1}) = 1$. \square

COROLARIO 1.3. *Sea (V, ω) un espacio lineal simpléctico y sea W un subespacio lagrangiano. Entonces existe un subespacio lagrangiano U tal que*

$$V = W \oplus U.$$

Demostración. Sea $\{e_1, \dots, e_m\}$ base de $W = \text{rad } W$. Entonces existen $\{f_1, \dots, f_m\}$ tales que $\{e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_m\}$ es una base simpléctica de V . \square

Sea (V, ω) un espacio lineal simpléctico. Denotaremos por $\mathcal{L}(V)$ la colección de subespacios lagrangianos de V . El grupo simpléctico actúa en $\mathcal{L}(V)$. Mas aún, se sigue del Corolario 1.3 que dados $L_0, L_1 \in \mathcal{L}(V)$ existe $g \in \text{Sp}(V, \omega)$ tal que $g(L_0) = L_1$. Dado $L_0 \in \mathcal{L}(V)$ consideremos el subgrupo de isotropía

$$G_0 = \{g \in \text{Sp}(V, \omega) : g(L_0) = L_0\}$$

con el cual establecemos la identificación $\text{Sp}(V, \omega)/G_0 \cong \mathcal{L}(V)$.

Consideremos el subespacio lagrangiano $L_0 = \mathbb{R}^m \times \{0\}$ de \mathbb{R}^{2m} , entonces $g = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \text{Sp}(m)$ pertenece a G_0 si y sólo si $C = 0$. Así

$$G_0 = \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & (A^{-1})^T \end{bmatrix} : A^{-1}B \text{ es simétrica} \right\}.$$

Consideremos \mathbb{R}^{2m} con la estructura simpléctica canónica

$$\omega_0(x, y) = x \cdot J_m y \quad J_m = \begin{bmatrix} 0 & E_m \\ -E_m & 0 \end{bmatrix}$$

Identificando \mathbb{R}^{2m} con \mathbb{C}^m escribamos $(x, y) = x + iy$. Como $i(x + iy) = -y + ix$ tenemos que multiplicar por i corresponde a aplicar $-J_m$.

Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ es \mathbb{C} lineal si y sólo si $T(iz) = iT(z)$ o sea $TJ_m = J_m T$. Escribiendo $T(x, y) = (Bx + Ey, Cx + Dy)$ tenemos que T es \mathbb{C} lineal si y sólo si $B = D, E = -C$ y la matriz compleja de T es $D + iC$.

Para A matriz real $2m \times 2m$ tenemos que

$$\begin{aligned} A \in \text{Sp}(m) &\iff A^T J_m A = J_m A \\ A \in \text{O}(2m) &\iff A^T A = E_{2m} \\ A \in \text{GL}(n, \mathbb{C}) &\iff A J_m = J_m A, \det A \neq 0 \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que

$$\text{Sp}(m) \cap \text{O}(2m) = \text{Sp}(m) \cap \text{GL}(n, \mathbb{C}) = \text{GL}(n, \mathbb{C}) \cap \text{O}(2m).$$

Por otra parte

$$A = \begin{bmatrix} D & -C \\ C & D \end{bmatrix} \in O(2m) \iff D^T D + C^T C = E_m, C^T D = D^T C$$

$$\iff (D^T - iC^T)(D + iC) = E_m.$$

Por lo tanto podemos escribir $GL(n, \mathbb{C}) \cap O(2m) = U(m)$.

Consideremos ahora un subespacio $L \subset \mathbb{R}^{2m}$ de dimensión m . Con una base $\{v_1, \dots, v_m\}$ de L construimos una matriz $2m \times m$ $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ que representa una transformación lineal $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ cuya imagen es L . Así L es un subespacio lagrangiano si y sólo si

$$[X^T Y^T] J_m \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = J_m$$

o sea que $X^T Y$ es simétrica. Si además suponemos que la base es ortonormal tenemos $X^T X + Y^T Y = E_m$ y entonces el subespacio lagrangiano L es la imagen bajo $X + iY \in U(m)$ del subespacio horizontal $H = \mathbb{R}^m + i\{0\}$. Por otra parte, una transformación $D + iC \in U(m)$ deja fijo H si y sólo si $C = 0$ y así $D \in O(m)$. Tenemos entonces la representación del conjunto de subespacios lagrangianos de \mathbb{R}^{2m}

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2m}) \cong U(m)/O(m).$$

DEFINICIÓN 1.3. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} , un isomorfismo $J : V \rightarrow V$ se llama *estructura compleja* en V si $J^2 = I$. Cuando (V, ω) es un espacio simpléctico, decimos que la estructura compleja J es compatible con ω si J es simpléctica. En tal caso, la forma bilineal

$$g(v, w) = \omega(v, Jw)$$

satisface

$$g(Jv, w) = \omega(v, w)$$

$$g(v, w) = g(w, v)$$

$$g(Jv, Jw) = g(v, w).$$

Si además $g(v, v) \geq 0$, decimos que J es una estructura compleja compatible positiva.

TEOREMA 1.4. *Todo espacio simpléctico (V, ω) posee una estructura compleja compatible positiva.*

Demostración. Sea γ un producto escalar en V y definamos el isomorfismo A de V mediante

$$\gamma(Av, w) = \omega(v, w).$$

Por la antisimetría de ω tenemos

$$\gamma(Av, w) = -\gamma(v, Aw)$$

$$\gamma(A^2v, w) = -\gamma(Av, Aw) = \gamma(v, A^2w)$$

o sea que A^2 es autoadjunto y $\gamma(A^2v, v) \leq 0$. Por lo tanto V tiene una base γ ortogonal \mathbf{e} formada por eigenvectores de A^2 con eigenvalores $-\lambda_j^2$, $\lambda_j > 0$. Sea B el isomorfismo de V cuya la matriz en la base \mathbf{e} es $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Entonces B es el único operador positivo autoadjunto tal que $B^2 = -A^2$. Se puede también definir B por

$$(1.1) \quad B = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \sqrt{z}(zE + A^2)^{-1} dz$$

donde α es una curva cerrada en el semiplano $\Re z > 0$ que encierra los valores $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$. La expresión (1.1) implica que $AB = BA$. Definiendo $J = AB^{-1}$ tenemos

$$J^2 = A^2B^{-2} = -E$$

$$\omega(Jv, Jw) = \gamma(AJv, Jw) = -\gamma(Bv, Jw) = -\gamma(v, Aw) = \omega(v, w)$$

$$g(v, v) = \omega(v, Jv) = \gamma(Av, Jv) = -\gamma(v, AJv) = \gamma(v, Bv) \geq 0$$

□

CAPÍTULO 2

Variedades

1. Campos vectoriales y flujos

DEFINICIÓN 2.1. Sea M una variedad diferenciable. Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ el conjunto de campo vectoriales diferenciables en M . Si $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ es una curva diferenciable, definimos el vector tangente a la curva en $\alpha(t)$ por $\alpha'(t) = \alpha_*(d/dt)_t$.

OBSERVACIÓN 2.1. Sea $h : M \rightarrow N$ un difeomorfismo y sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ consideremos el campo vectorial $h_*X \in \mathfrak{X}(N)$ definido por $h_*X(y) = h_*(X(h^{-1}(y)))$. Sean $\alpha : I \rightarrow M$ una curva diferenciable y $\beta = h \circ \alpha$. Entonces $\beta'(t) = h_* \circ \alpha_*(d/dt)_t = h_*(\alpha'(t))$. Así

$$\alpha'(t) = X(\alpha(t)) \iff \beta'(t) = h_*(X(\alpha(t))) = h_*X(\beta(t)),$$

o sea que α es una solución de la ecuación diferencial $x' = X(x)$ si y solo si $\beta = h \circ \alpha$ es una solución de la ecuación diferencial $y' = h_*(X)(y)$. Si $F : N \rightarrow L$ es otro difeomorfismo $(F \circ h)_*X = F_*(h_*X)$. En efecto

$$\begin{aligned} (F \circ h)_*X(F(h(x))) &= (F \circ h)_{*x}(X(x)) = F_{*h(x)}(h_{*x}(X(x))) \\ &= F_{*h(x)}(h_*X(h(x))) = F_*(h_*X)(F(h(x))). \end{aligned}$$

TEOREMA 2.1. *Sea M una variedad diferenciable y sea $X \in \mathfrak{X}(M)$.*

- *Dados $p \in M$, $t_0 \in \mathbb{R}$, existen $\varepsilon > 0$ y una única solución $\alpha : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow M$ a la ecuación diferencial*

$$(2.1) \quad x' = X(x)$$

que satisface $\alpha(t_0) = p$.

- *Para cada $x \in M$ sea $J(x)$ el intervalo maximal donde esta definida una solución $J(x) \rightarrow U$ a (2.1) que satisface $0 \mapsto x$. Escribiendo $t \mapsto \varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ tal solución, se tiene que el conjunto $\Omega = \{(t, x) : x \in M, t \in J(x)\}$ es abierto y la función $\varphi : \Omega \rightarrow M$ es diferenciable.*
- *Si se satisfacen dos de las condiciones $t \in J(x)$, $t + s \in J(x)$, $s \in J(\varphi_t(x))$, entonces se satisface la tercera y en tal caso*

$$\varphi_{t+s}(x) = \varphi_s(\varphi_t(x)).$$

OBSERVACIÓN 2.2. La función $\varphi : \Omega \rightarrow M$ es el flujo local definido por $X \in \mathfrak{X}(M)$. Se sigue de la Observación 2.1 y del Teorema 2.1 que si $h : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo $X \in \mathfrak{X}(M)$ entonces el flujo local de h_*X es $(t, y) \mapsto h \circ \varphi_t \circ h^{-1}$.

TEOREMA 2.2. Sean M variedad compacta y $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces $\Omega = \mathbb{R} \times M$.

DEFINICIÓN 2.2.

- Una k -forma diferencial en una variedad M es una función (diferenciable) ω que a cada $p \in M$ le asocia un elemento $\omega(p) \in \wedge^k(T_pM)$. Denotamos por $\Omega^k(M)$ al conjunto de k -formas diferenciales en M .
- Si $F : N \rightarrow M$ es diferenciable definimos $F^* : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(N)$ mediante $(F^*\omega)(p) = DF(p)^*\omega(F(p))$

EJEMPLO 2.1.

- Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Para cada $p \in M$, la derivada $df(p)$ es un elemento de T_p^* y así df es una 1-forma en M .
- Si $G : N \rightarrow M$ es diferenciable $G^*(df)(p) = df(G(p)) \circ DG(p)$ y así $G^*(df) = d(f \circ G)$.

En cada punto $p \in \mathbb{R}^n$, $\{dx_p^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_p^{i_k} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$ es base de $\wedge^k \mathbb{R}^{n*}$. Así, cualquier $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ se escribe

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \quad \alpha_{i_1 \dots i_n} \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Por brevedad, para $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ utilizaremos la notación $I = (i_1, \dots, i_n)$ y escribiremos $\omega = \sum_I \alpha_I dx^I$.

Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto $F = (F^1, \dots, F^m)$, $F^i \in C^\infty(U)$, $g \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, tenemos

$$\begin{aligned} F^*(g dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_k}) &= g \circ F F^* dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge F^* dy^{j_k} \\ &= g \circ F d(y^{j_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(y^{j_k} \circ F) = g \circ F dF^{j_1} \wedge \cdots \wedge dF^{j_k} \\ &= g \circ F \sum_I \det \left(\frac{\partial F^{j_r}}{\partial x^{i_s}} \right) dx^I. \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 2.3. Sean M variedad diferenciable, $X \in \mathfrak{X}(M)$ y φ_t el flujo local de X . Para $f \in C^\infty(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(M)$, $R \in \Omega^r(M)$ definimos la derivada de Lie L_X por

$$\begin{aligned} L_X f &= X(f) = df(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* f, \\ L_X Y &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_{-t})_* Y, \end{aligned}$$

$$L_X R = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* R.$$

PROPOSICIÓN 2.1. *Con la notación de la Definición 2.3 y $F : M \rightarrow N$ difeomorfismo.*

1. $L_X \circ F^* = F^* \circ L_{F_* X}$, $F_*(L_X Y) = L_{F_* X} F_* Y$.
2. $L_X(fY) = fL_X(Y) + L_X(f)Y$, $L_X(fR) = fL_X(Y) + L_X(f)R$
3. $d(L_X f) = L_X(df)$
4. Si $Y_1, \dots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$, entonces

$$L_X(R(Y_1, \dots, Y_r)) = L_X(R)(Y_1, \dots, Y_r) + \sum_{i=1}^r R(Y_1, \dots, L_X(Y_i), \dots, Y_r).$$

Demostración. (1) El flujo local de $F_* X$ es $F \circ \varphi_t \circ F^{-1}$. Así

$$\begin{aligned} L_X(F^* T) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* F^* T = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F^*(F^{-1})^* \varphi_t^* F^*(T) \\ &= F^* \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (F \circ \varphi_t \circ F^{-1})^* T \right) = F^*(L_{F_* X} T). \\ L_{F_* X} F_* Y &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (F \circ \varphi_{-t} \circ F^{-1})_* F_* Y = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F_*(\varphi_{-t})_* Y \\ &= F_* \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_{-t})_* Y \right) = F_*(L_X Y). \end{aligned}$$

Para demostrar (3) sean $x \in M, v \in T_x M$

$$\begin{aligned} (L_X df)_x(v) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_t^* df)_x(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (d\varphi_t^* f)_x(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} v(\varphi_t^* f) \\ &= v \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* f \right) = v(L_X f) = d(L_X f)_x(v). \end{aligned}$$

(4) Observemos que

$$\begin{aligned} \varphi_t^*(R(Y_1, \dots, Y_r))(x) &= R(Y_1, \dots, Y_r)(\varphi_t(x)) \\ &= R(\varphi_t(x))(Y_1(\varphi_t(x)), \dots, Y_r(\varphi_t(x))) \\ &= R(\varphi_t(x))(\varphi_{t*x}((\varphi_{-t*} Y_1)(x)), \dots, \varphi_{t*x}((\varphi_{-t*} Y_r)(x))) \\ &= (\varphi_t^* R)(x)((\varphi_{-t*} Y_1)(x), \dots, (\varphi_{-t*} Y_r)(x)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_X(R(Y_1, \dots, Y_r))(x) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_t^* R)(x)((\varphi_{-t*} Y_1)(x), \dots, (\varphi_{-t*} Y_r)(x)) \\ &= L_X R(x)(Y_1(x), \dots, Y_r(x)) + \sum_{i=1}^r R(x)(Y_1(x), \dots, L_X Y_i(x), \dots, Y_r(x)). \end{aligned}$$

La demostración de (2) es similar y más sencilla. \square

PROPOSICIÓN 2.2. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$. Entonces

$$(L_X Y)(f) = [X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Demostración. $f \circ \varphi(t, x) = f(x) + tg(t, x)$, donde

$$g(t, x) = \int_0^1 D_1(f \circ \varphi)(ts, x), \quad g(0, x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \varphi(t, x) = X(f)(x).$$

$$(L_X Y)(f)(x) = (L_X Y)(x)(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_{-t*} Y(x)(f), \text{ pero}$$

$$\begin{aligned} (\varphi_{-t*} Y)(x)(f) &= [\varphi_{-t*}(Y(\varphi_t(x)))](f) = Y(\varphi_t(x))(f \circ \varphi_{-t}) \\ &= Y(\varphi_t(x))(f - tg(-t, \cdot)) = (Y(f))(\varphi_t(x)) - tY(g(-t, \cdot))(\varphi_t(x)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_{-t*} Y)(x)(f) &= X(Y(f))(x) - Y(g(0, \cdot))(x) \\ &= (X(Y(f)) - Y(X(f)))(x). \end{aligned}$$

□

COROLARIO 2.3. Identidad de Jacobi

Si $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$.

Esta igualdad se puede escribir $L_{[X, Y]} = L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X$.

PROPOSICIÓN 2.3. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ con flujos locales φ_t, ψ_t . Entonces

$$[X, Y] = 0 \iff \varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$$

Demostración. El flujo local de $(\psi_{-s})_* X$ es $\psi_{-s} \circ \varphi_t \circ \psi_s$ y

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=t} (\psi_{-s})_* X &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\psi_{-(t+s)})_* X = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\psi_{-t})_* ((\psi_{-s})_* X) \\ &= (\psi_{-t})_* (L_Y X). \end{aligned}$$

Si $L_Y X = 0$ entonces $(\psi_{-s})_* X = \psi_{0*} X = X$ y así $\psi_{-s} \circ \varphi_t \circ \psi_s = \varphi_t$.

Recíprocamente si $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$, el flujo local de $(\psi_{-s})_* X$ es φ_t , o sea $(\psi_{-s})_* X = X$ y entonces $L_Y X = (d(\psi_{-s})_* X / ds)_{s=0} = 0$. □

DEFINICIÓN 2.4. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Definimos la derivada exterior $d : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$ para todo $k \geq 0$ por

$$d\left(\sum_I f_I dx^I\right) = \sum_I df_I \wedge dx^I.$$

PROPOSICIÓN 2.4. La derivada exterior tiene las siguientes propiedades

1. d es lineal
2. Si $\omega \in \Omega^k(U)$, $\eta \in \Omega^l(U)$, $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$.

3. Si $f \in C^\infty(U)$, $d(df) = 0$.

Demostración. (1) es obvia.

(2) Si $\omega = f dx^I, \eta = g dx^J, \omega \wedge \eta = f g dx^I \wedge dx^J$

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= (gdf + fdg) \wedge dx^I \wedge dx^J = df \wedge dx^I \wedge (g dx^J) + f dg \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i\right) = \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \wedge dx^i = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i \\ &= \sum_{j < i} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i - \sum_{j < i} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i = 0 \end{aligned}$$

□

COROLARIO 2.4. Si $\omega \in \Omega^k(U)$, entonces $d(d\omega) = 0$

Demostración. Por inducción. El caso $k = 0$ es (3) de la Proposición 2.4. Suponiendo que el resultado vale para $k - 1$,

$$\begin{aligned} d(d(f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})) &= d(df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = \\ d(df) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} &- df \wedge d(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\ &= -df \wedge d(dx^{i_1} dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = 0. \end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 2.5. Sea $d' : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$ un operador lineal para todo $k \geq 0$. Si d' satisface las propiedades de la Proposición 2.4 y $d'f = df$ para $f \in C^\infty(U)$, entonces $d = d'$.

Demostración.

$$d'(f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = d'f \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + f \wedge d'(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}).$$

Demostraremos que $d'(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = 0$ por inducción sobre k . Para $k = 1$, $d' dx^i = d' d' x^i = 0$.

$$\begin{aligned} d'(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) &= d' dx^{i_1} \wedge (dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\ &- dx^{i_1} \wedge d'(dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = 0. \end{aligned}$$

□

DEFINICIÓN 2.5. Para M variedad diferenciable y todo $k \geq 0$, definimos $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ tal que en cada carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$

$$\omega|_{U_\alpha} = \sum_I f_{\alpha,I} dx_\alpha^I \Rightarrow d\omega|_{U_\alpha} = \sum_I df_{\alpha,I} \wedge dx_\alpha^I.$$

Por la Proposición 2.5, la definición no depende de la carta.

TEOREMA 2.5. Sean $\omega \in \Omega^r(M)$, $X_1, \dots, X_{r+1} \in \mathfrak{X}(M)$, entonces

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{r+1}) &= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} X_i(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{r+1})) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{r+1}) \end{aligned}$$

Demostración. Sean $\Sigma_1, \Sigma_2 : \mathfrak{X}(M)^{r+1} \rightarrow C^\infty(M)$ las sumas en el miembro derecho y sea $d'\omega = \Sigma_1 + \Sigma_2$. Probaremos que $d'\omega$ es $C^\infty(M)$ lineal.

$$\begin{aligned} \Sigma_1(X_1, \dots, fX_l, \dots, X_{r+1}) &= (-1)^{l+1} fX_l(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_l, \dots, X_{r+1})) \\ &\quad + \sum_{l < i} (-1)^{i+1} X_i(f\omega(X_1, \dots, X_l, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{r+1})) \\ &\quad + \sum_{i < l} (-1)^{i+1} X_i(f\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_l, \dots, X_{r+1})) \\ &= f\Sigma_1(X_1, \dots, X_{r+1}) + \sum_{i \neq l} (-1)^{i+1} (X_i f)(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{r+1})) \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} [X_i, fX_l] &= f[X_i, X_l] + (X_i f)X_l \\ [fX_l, X_j] &= f[X_l, X_j] - (X_j f)X_l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_2(X_1, \dots, fX_l, \dots, X_{r+1}) &= f\Sigma_2(X_1, \dots, \dots, X_{r+1}) \\ &\quad - \sum_{l < j} (-1)^{l+j} (X_j f)\omega(X_l, \dots, \hat{X}_l, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{r+1}) \\ &\quad + \sum_{i < l} (-1)^{i+l} (X_i f)\omega(X_l, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_l, \dots, X_{r+1}) \\ &= f\Sigma_2(X_1, \dots, \dots, X_{r+1}) + \sum_{l < j} (-1)^j (X_j f)\omega(X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{r+1}) \\ &\quad + \sum_{i < l} (-1)^i (X_i f)\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{r+1}) \end{aligned}$$

Así $d'\omega(X_1, \dots, fX_l, \dots, X_{r+1}) = fd'\omega(X_1, \dots, X_{r+1})$.

$$d'\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_{r+1}} d'\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_{r+1}}}\right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{r+1}},$$

$$d'\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_{r+1}}}\right) = \sum_{s=1}^{r+1} (-1)^{s+1} \frac{\partial}{\partial x^{i_s}} \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\hat{\partial}}{\partial x^{i_s}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_{r+1}}}\right)$$

Para $\omega = gdx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_r}$, $j_1 < \dots < j_r$, tenemos que

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\hat{\partial}}{\partial x^{i_s}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_{r+1}}}\right) = \begin{cases} g & (i_1, \dots, i_{r+1}) = (j_1, \dots, i_s, \dots, j_r) \\ 0 & \{j_1, \dots, j_r\} \not\subseteq \{i_1, \dots, i_{r+1}\} \end{cases}$$

Así

$$d'\omega = \sum_{s \notin \{j_1, \dots, j_r\}} (-1)^{s+1} \frac{\partial g}{\partial x^s} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^s \wedge \dots \wedge dx^{j_r} = d\omega.$$

□

2. Integración en cadenas

DEFINICIÓN 2.6. Un k -cubo singular en M es una función diferenciable $c : [0, 1]^k \rightarrow M$. Si ω es una k -forma en M , $c^*\omega = gdx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$ y definimos

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^k} c^*\omega = \int_{[0,1]^k} g.$$

PROPOSICIÓN 2.6. Sean ω una k -forma en \mathbb{R}^k y c un k -cubo singular con $\det c \geq 0$. Entonces

$$\int_{[0,1]^k} c^*\omega = \int_{c([0,1]^k)} \omega.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \omega &= f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k \\ c^*\omega &= c \circ f \det Dc dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k \\ \int_{[0,1]^k} c^*\omega &= \int_{[0,1]^k} c \circ f \det Dc = \int_{c([0,1]^k)} f = \int_{c([0,1]^k)} \omega. \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 2.7. Sean c un k -cubo singular en M y $p : [0, 1]^k \rightarrow [0, 1]^k$ suprayectiva con $\det Dp \geq 0$. Entonces

$$\int_{c \circ p} \omega = \int_c \omega.$$

Demostración.

$$\int_{c \circ p} \omega = \int_{[0,1]^k} (c \circ p)^* \omega = \int_{[0,1]^k} p^*(c^* \omega) = \int_{p([0,1]^k)} c^* \omega = \int_c \omega.$$

DEFINICIÓN 2.7. Una k -cadena en M es una combinación formal entera de k -cubos singulares $c = \sum_{i=1}^r a_i c_i$, $a_i \in \mathbb{Z}$.

Sea $I^n : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la inclusión. Para $\alpha = 0, 1$ definimos $I_{i,\alpha}^n : [0, 1]^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $I_{i,\alpha}^n(x^1, \dots, x^{n-1}) = (x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \dots, x^{n-1})$.

$$\partial I^n = \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha=0,1}}^n (-1)^{i+\alpha} I_{i,\alpha}^n$$

Para c un n -cubo singular en M , definimos $c_{i,\alpha} = c \circ I_{i,\alpha}^n$ y

$$\partial c = \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha=0,1}}^n (-1)^{i+\alpha} c_{i,\alpha}$$

PROPOSICIÓN 2.8. Si c es un cubo singular en M , $\partial(\partial c) = 0$.

Demostración.

$$\partial(\partial c) = \sum_{i,\alpha} (-1)^{i+\alpha} \partial c_{i,\alpha},$$

$$\partial c_{i,\alpha} = \sum_{\substack{j=1 \\ \beta=0,1}}^{n-1} (-1)^{j+\beta} c_{i,\alpha} \circ I_{j,\beta}^{n-1} = \sum_{\substack{j=1 \\ \beta=0,1}}^{n-1} (-1)^{j+\beta} c \circ I_{i,\alpha}^n \circ I_{j,\beta}^{n-1}$$

Si $i \leq j \leq n-1$

$$\begin{aligned} I_{i,\alpha}^n \circ I_{j,\beta}^{n-1}(x^1, \dots, x^{n-2}) &= I_{i,\alpha}^n(x^1, \dots, x^{j-1}, \beta, x^j, \dots, x^{n-2}) \\ &= (x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \dots, x^{j-1}, \beta, x^j, \dots, x^{n-2}) \\ I_{j+1,\beta}^n \circ I_{i,\alpha}^{n-1}(x^1, \dots, x^{n-2}) &= I_{j+1,\beta}^n(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \dots, x^{n-2}) \\ &= (x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \dots, x^{j-1}, \beta, x^j, \dots, x^{n-2}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial(\partial c) &= \sum_{\substack{i \leq j \leq n-1 \\ \alpha, \beta=0,1}} (-1)^{i+j+\alpha+\beta} c \circ I_{i,\alpha}^n \circ I_{j,\beta}^{n-1} \\ &\quad + \sum_{\substack{i \leq j \leq n-1 \\ \alpha, \beta=0,1}} (-1)^{i+j+1+\alpha+\beta} c \circ I_{j+1,\beta}^n \circ I_{i,\alpha}^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

TEOREMA 2.6. Stokes Sean M una variedad diferenciable, c una k -cadena en M y ω una $k-1$ forma en M . Entonces

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Demostración. (1). Sea ω una $k-1$ forma en \mathbb{R}^k y $c = I^k$.

$$\begin{aligned} \omega &= f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^k \\ \partial I^k &= \sum_{\substack{j=1 \\ \alpha=0,1}}^k (-1)^{j+\alpha} I_{j,\alpha}^k \\ \int_{\partial I^k} \omega &= \sum_{\substack{j=1 \\ \alpha=0,1}}^k (-1)^{j+\alpha} \int_{[0,1]^{k-1}} I_{j,\alpha}^{k*} \omega \end{aligned}$$

$$I_{j,\alpha}^{k*} \omega = f \circ I_{j,\alpha}^k d(x^1 \circ I_{j,\alpha}^k) \wedge \dots \wedge d(x^{i-1} \circ I_{j,\alpha}^k) \wedge d(x^{i+1} \circ I_{j,\alpha}^k) \wedge \dots \wedge d(x^k \circ I_{j,\alpha}^k)$$

$$x^l \circ I_{j,\alpha}^k(t^1, \dots, t^{k-1}) = x^l(t^1, \dots, \alpha, t^j, \dots, t^{k-1}) = \begin{cases} t^l & l < j \\ \alpha & l = j \\ t^{l-1} & l > j \end{cases}$$

$$d(x^l \circ I_{j,\alpha}^k) = \begin{cases} dt^l & l < j \\ 0 & l = j \\ dt^{l-1} & l > j \end{cases}$$

$$I_{j,\alpha}^{k*} \omega = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ f \circ I_{j,\alpha}^k dt^1 \wedge \dots \wedge dt^{k-1} & j = i \end{cases}$$

$$\int_{\partial I^k} \omega = \int_{[0,1]^{k-1}} (-1)^i [f(t^1, \dots, 0, t^j, \dots, t^{k-1}) - f(t^1, \dots, 1, t^j, \dots, t^{k-1})] dt^1 \dots dt^{k-1}$$

$$d\omega = (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$$

$$\begin{aligned} \int_{I^k} d\omega &= \int_{[0,1]^k} (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \dots dx^k \\ &= \int_{[0,1]^{k-1}} (-1)^i [f(x^1, \dots, 0, x^j, \dots, x^{k-1}) - f(x^1, \dots, 1, x^j, \dots, x^{k-1})] dx^1 \dots dx^{k-1}. \end{aligned}$$

(2) Sea ω una $k-1$ forma en M y c un k -cubo singular.

$$\begin{aligned} \int_c d\omega &= \int_{[0,1]^k} c^*(d\omega) = \int_{[0,1]^k} d(c^*\omega) = \int_{\partial[0,1]^k} c^*\omega = \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha=0,1}}^n (-1)^{i+\alpha} \int_{[0,1]^{k-1}} I_{j,\alpha}^{k*} c^*\omega \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha=0,1}}^n (-1)^{i+\alpha} \int_{[0,1]^{k-1}} c_{j,\alpha}^*\omega = \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha=0,1}}^n (-1)^{i+\alpha} \int_{c_{j,\alpha}} \omega = \int_{\partial c} \omega. \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 2.2. Sea A un campo vectorial en \mathbb{R}^3 . Si $c : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un cubo singular

$$\int_c \omega_A^2 = \int_{[0,1]^2} \omega_A^2 \left(\frac{\partial c}{\partial u}, \frac{\partial c}{\partial v} \right) = \int_{[0,1]^2} \langle A \circ c, \frac{\partial c}{\partial u} \times \frac{\partial c}{\partial v} \rangle = \int_c \langle A, n \rangle dS.$$

Si c es una 2-cadena en \mathbb{R}^3 , el Teorema de Stokes da

$$\int_c \langle \text{rot } A, n \rangle dS = \int_c \omega_{\text{rot } A}^2 = \int_c d\omega_A^1 = \int_{\partial c} \omega_A^1 = \int_{\partial c} \langle A, dr \rangle.$$

Si c es una 3-cadena en \mathbb{R}^3 , el Teorema de Stokes da

$$\int_c \text{div } A \, dx \wedge dy \wedge dz = \int_c d\omega_A^2 = \int_{\partial c} \omega_A^2 = \int_{\partial c} \langle A, n \rangle dS.$$

EJEMPLO 2.3. Sea c un k -cubo. Consideremos el cono pc sobre c con vertice en cero o sea el el $k+1$ cubo $pc(t, x) = tc(x)$. Extendemos la definición del cono a cualquier cadena por linealidad.

$$\partial c = \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha=0,1}}^k (-1)^{i+\alpha} c_{i,\alpha}$$

donde $c_{i,\alpha}(x^1, \dots, x^{n-1}) = c(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \dots, x^{n-1})$. Probemos que

$$p\partial + \partial p = id$$

$$p(c_{i,\alpha})(t, x^1, \dots, x^{n-1}) = tc(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \dots, x^{n-1}),$$

$$(pc)_{1,\alpha}(t, x^1, \dots, x^{n-1}) = pc(\alpha, t, x^1, \dots, x^{n-1}) = \alpha c(t, x^1, \dots, x^{n-1})$$

$$\begin{aligned} (pc)_{i,\alpha}(t, x^1, \dots, x^{n-1}) &= (pc)(t, x^1, \dots, x^{i-2}, \alpha, x^{i-1}, \dots, x^{n-1}) \\ &= tc(t, x^1, \dots, x^{i-2}, \alpha, x^{i-1}, \dots, x^{n-1}), \quad i > 1 \end{aligned}$$

Así

$$(pc)_{i,\alpha} = \begin{cases} 0 & i = 1, \alpha = 0 \\ c & i = 1, \alpha = 1, \\ p(c_{i-1,\alpha}) & i > 1 \end{cases}$$

$$p\partial c + \partial pc = \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha=0,1}}^k (-1)^{i+\alpha} p(c_{i,\alpha}) + \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha=0,1}}^{k+1} (-1)^{i+\alpha} (pc)_{i,\alpha} = c - 0.$$

Si $d\omega = 0$ y $\partial c = 0$, entonces

$$\int_c \omega = \int_{\partial pc} \omega = \int_{pc} d\omega = 0$$

EJEMPLO 2.4. Para ω k forma diferencial en \mathbb{R}^n definimos la $k-1$ forma $p\omega$ por

$$\int_c p\omega = \int_{pc} \omega.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_c pd\omega + dp\omega &= \int_{pc} d\omega + \int_{\partial c} p\omega = \int_{\partial pc} \omega + \int_{p\partial c} \omega = \int_c \omega, \\ pd\omega + dp\omega &= \omega. \end{aligned}$$

Si $d\omega = 0$, entonces $\omega = dp\omega$.

Para dar una fórmula para $p\omega$ sean $v_1, \dots, v_{k-1} \in \mathbb{R}^n$ y consideremos el paralelogramo

$$c_\varepsilon(s_1, \dots, s_{k-1}) = x + s_1 v_1 + \dots + s_{k-1} v_{k-1}, s_i \in [0, \varepsilon]$$

$$p\omega_x(v_1, \dots, v_{k-1}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1-k} \int_{[0, \varepsilon]^{k-1}} \omega_{c_\varepsilon(s)}(v_1, \dots, v_{k-1}) ds = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1-k} \int_{c_\varepsilon} p\omega$$

$$\int_{c_\varepsilon} p\omega = \int_{pc_\varepsilon} \omega = \int_{[0, \varepsilon]^{k-1}} \int_0^1 \omega_{tc_\varepsilon(s)}(c_\varepsilon(s), tv_1, \dots, tv_{k-1}) ds dt$$

$$p\omega_x(v_1, \dots, v_{k-1}) = \int_0^1 \omega_{tx}(x, tv_1, \dots, tv_{k-1}) dt.$$

PROPOSICIÓN 2.9. Sean $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\omega \in \Omega^r(M)$, entonces

$$L_X \omega = i(X)d\omega + d(i(X)\omega).$$

Sea g_t el flujo definido por el campo X . Para c una l cadena definamos la $l + 1$ cadena Hc mediante $Hc(t, x) = g_t c(x)$. Entonces

$$g_1 c - c = \partial Hc + H\partial c.$$

$$\begin{aligned} \int_{Hc} \eta &= \int_{[0,1]^l} \eta(X(g_t c), g_{t*} D_1 c, \dots, g_{t*} D_{k-1} c) \\ &= \int_{[0,1]^l} g_t^*(i_X \eta)(D_1 c, \dots, D_{k-1} c) = \int_0^1 \left(\int_c g_t^*(i_X \eta) \right) dt \end{aligned}$$

Como $g_t^* L_X \omega = \frac{dg_t^* \omega}{dt}$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_c g_t^* L_X \omega \right) dt &= \int_c g_1^* \omega - \omega = \int_{g_1 c - c} \omega = \int_{\partial Hc + H\partial c} \omega = \\ &= \int_{Hc} d\omega + \int_0^1 \left(\int_{\partial c} g_t^*(i_X \omega) \right) dt = \int_0^1 \left(\int_c g_t^*(i_X d\omega) + g_t^* d(i_X \omega) \right) dt \end{aligned}$$

Así

$$\int_c L_X \omega = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_0^s \left(\int_c g_t^* L_X \omega \right) dt = \int_c i_X d\omega + d i_X \omega$$

3. Conexiones y geodésicas

DEFINICIÓN 2.8. Una conexión en la variedad M , es una función bilineal $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ que denotaremos $\nabla(X, s) = \nabla_X s$, tal que para $f \in C^\infty(M)$, $X, s \in \mathfrak{X}(M)$

$$\nabla_X(fs) = f\nabla_X s + X(f)s.$$

OBSERVACIÓN 2.3. Sea $\{s_1, \dots, s_n\} \subset \mathfrak{X}(M)$ una base local en U . Definimos la matriz ω de la conexión para esa base local por

$$\nabla_X s_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(X) s_j, \quad \omega_{ij} \in \Omega^1(M).$$

Si $\{s'_1, \dots, s'_n\} \subset \mathfrak{X}(M)$ es otra base local en U ,

$$s'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} s_j, \quad s_k = \sum_{l=1}^n a_{kl}^{-1} s'_l$$

$$\begin{aligned} \nabla_X s'_i &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \nabla_X s_j + da_{ij}(X) s_j = \sum_{j=1}^n a_{ij} \sum_{k=1}^n \omega_{jk}(X) s_k + \sum_{k=1}^n da_{ik}(X) s_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_{jk}(X) + da_{ik}(X) \right) s_k = \sum_{k,l=1}^n (da_{ik}(X) a_{kl}^{-1} + \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_{jk}(X) a_{kl}^{-1}) s'_l \end{aligned}$$

O sea que la matriz de la conexión para la nueva base local es

$$\omega' = da \cdot a^{-1} + a \cdot \omega \cdot a^{-1}.$$

DEFINICIÓN 2.9. Sea ∇ una conexión en $\pi : E \rightarrow M$

- Si ω es la matriz de la conexión en una base, es costumbre escribir

$$\Gamma_{ij}^k = \omega_{jk} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

- Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una métrica riemanniana en M , la conexión ∇ se llama compatible con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si para todo $X, s, r \in \mathfrak{X}(M)$

$$X \langle s, r \rangle = \langle s, \nabla_X r \rangle + \langle \nabla_X s, r \rangle.$$

- Definimos la torsión de la conexión como

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

y la conexión se llama simétrica si $T = 0$.

OBSERVACIÓN 2.4. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\{s_1, \dots, s_n\} \subset \mathfrak{X}(M)$ es una base local, para cualquier $s \in \mathfrak{X}(M)$ tenemos $s = \sum_i f_i s_i$ y así

$$\nabla_X s = \sum_{i=1}^n \left(X(f_i) s_i + f_i \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(X) s_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(X(f_j) + \sum_{i=1}^n f_i \omega_{ij}(X) \right) s_j.$$

Por lo tanto para calcular $\nabla s(X)$ en q solo hay que conocer $X(q)$, las componentes de s en q y sus derivadas en la dirección de $X(q)$. Sea $\gamma : I \rightarrow M$ una curva diferenciable y sea $s : I \rightarrow TM$ una función diferenciable tal que $s(t) \in T_{\gamma(t)}M, \forall t \in I$. Decimos que s es un campo a lo largo de γ . Escribiendo $s(t) = \sum_i f_i(t) s_i(\gamma(t))$ definimos la derivada covariante de s a lo largo de la curva mediante

$$(2.2) \quad \frac{Ds}{dt}(t) = \sum_{j=1}^n \left(f'_j(t) + \sum_{i=1}^n f_i(t) \omega_{ij}(\gamma'(t)) \right) s_j(\gamma(t)).$$

Decimos que el campo s es paralelo a lo largo de γ si $Ds/dt \equiv 0$

TEOREMA 2.7. Sean ∇ una conexión en M y $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una curva diferenciable. Para todo $v \in T_{\gamma(a)}M$ hay un único campo s paralelo a lo largo de γ tal que $s(a) = v$. Escribiendo $s(b) = T_\gamma(v)$, la transformación $T_\gamma : T_{\gamma(a)}M \rightarrow T_{\gamma(b)}M$ es lineal.

Demostración. Dividamos el intervalo $[a, b]$ en subintervalos $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, \dots, l-1$ tales que $\gamma([t_k, t_{k+1}]) \subset U_k$ y hay una base local $\{s_i^k\}$ en U_k . Sea ω^k la matriz de la conexión para esa base local. Para todo $w \in \mathbb{R}^n$, el sistema lineal en $[t_k, t_{k+1}] \times \mathbb{R}^n$

$$(2.3) \quad f' = -f \omega_{\gamma(t)}^k(\gamma'(t))$$

tiene una única solución en $f : [t_k, t_{k+1}] \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisface $f(t_k) = w$. Sea $f^0 : [a, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ la solución del sistema (2.3) $k = 0$, que satisface $(\gamma(a), f^0(a)) = \psi_0(v)$. Definimos

$$s(t) = \sum_i f_i^0(t) s_i^0(\gamma(t)), t \in [a, t_1].$$

Inductivamente, sea $f^k : [t_k, t_{k+1}] \rightarrow \mathbb{R}^n$ la solución del sistema (2.3) que satisface $(\gamma(t_k), f^k(t_k)) = \psi_k(s(t_k))$ y definamos

$$s(t) = \sum_i f_i^k(t) s_i^k(\gamma(t)), t \in [t_k, t_{k+1}].$$

Que la transformación T_γ es lineal se sigue del hecho de que el conjunto de soluciones de un sistema lineal es un espacio vectorial. \square

OBSERVACIÓN 2.5. Supongamos que la conexión ∇ es compatible con una métrica \langle, \rangle . Si s, r son secciones paralelas a lo largo de γ

$$\frac{d}{dt} \langle s(t), r(t) \rangle = \left\langle \frac{Ds}{dt}(t), r(t) \right\rangle + \left\langle s(t), \frac{Dr}{dt}(t) \right\rangle = 0.$$

Así $\langle s(t), r(t) \rangle$ es constante y la transformación T_γ preserva la métrica.

Si $\{s_1, \dots, s_n\} \subset \mathfrak{X}(M)$ es una base local ortonormal, entonces

$$0 = \langle s_i, \nabla s_j \rangle + \langle \nabla s_i, s_j \rangle = \omega_{ji} + \omega_{ij}$$

o sea que ω es antisimétrica.

TEOREMA 2.8. Levi Civita.

Sea \langle, \rangle una métrica riemanniana en la variedad diferenciable M . Existe una única conexión en M compatible con la métrica y simétrica.

Demostración. Supongasé que ∇ es compatible con la métrica y simétrica. Para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned} X \langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \\ Y \langle Z, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle \\ Z \langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle = \\ \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2 \langle \nabla_Y X, Z \rangle \end{aligned}$$

$$(2.4) \quad 2 \langle \nabla_Y X, Z \rangle =$$

$$X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle.$$

Lo que demuestra la unicidad. Por otra parte la ecuación (2.4) define una conexión y se comprueba fácilmente que es simétrica y compatible con la métrica. \square

DEFINICIÓN 2.10. Sea \langle, \rangle una métrica riemanniana en la variedad M y sea ∇ la conexión de Levi-Civita. Una curva $\gamma : I \rightarrow M$ se llama geodésica si $D\gamma'/dt = 0$.

Si en coordenadas locales $\varphi(\gamma(t)) = (a_1(t), \dots, a_n(t))$, entonces

$$\gamma'(t) = \sum_{i=1}^n a'_i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\gamma(t)}$$

y se sigue de la ecuación (2.2) que γ es una geodésica si y sólo si

$$(2.5) \quad a''_k(t) + \sum_{i=1}^n \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) a'_i(t) a'_j(t) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Sean $p \in M$, $r > 0$. Por la teoría de ecuaciones diferenciales, existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier $v \in T_p M$ con $|v| \leq r$ hay una única geodésica $\alpha_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ tal que $\alpha_v(0) = p$, $\alpha'_v(0) = v$. Es fácil comprobar que $\alpha_{\delta v}(t) = \alpha_v(\delta t)$. Por consiguiente, para $\delta > 0$ suficientemente pequeño, si $|v| \leq \delta$ hay una geodésica $\alpha_v : (-2, 2) \rightarrow M$ con las condiciones iniciales mencionadas.

La transformación exponencial $\exp_p : B_\delta(0) \subset T_p M \rightarrow M$ se define por $\exp_p(v) = \alpha_v(1)$ y para $\delta > 0$ suficientemente pequeño es un difeomorfismo sobre su imagen.

Variedades Simplécticas

1. Variedades Simplécticas

DEFINICIÓN 3.1. Sea M una variedad, una estructura simpléctica en M es una 2-forma que no es degenerada (en ningún punto) y que es **cerrada** o sea $d\omega = 0$. En tal caso decimos que (M, ω) es una variedad simpléctica. Si (M, ω) una variedad simpléctica, la transformación diferenciable $\varphi : M \rightarrow M$ se llama simpléctica si $\varphi^*\omega = \omega$. El campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ es simpléctico si su flujo consiste de transformaciones simplécticas o equivalentemente $L_X\omega = 0$ o lo que es lo mismo $d(i(X)\omega) = 0$.

DEFINICIÓN 3.2. Sea ω una 2-forma no degenerada en la variedad M . Dada $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ hay un único $X_H \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $i(X_H)\omega = dH$ y se conoce como el campo **hamiltoniano** correspondiente a H . Para $H, K : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables definimos el corchete de Poisson

$$\{H, K\} = \omega(X_K, X_H) = dK(X_H) = X_H(K)$$

PROPOSICIÓN 3.1. Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ son simplécticos entonces $[X, Y]$ es el campo hamiltoniano correspondiente a $\omega(Y, X)$. En particular $X_{\{H, K\}} = [X_H, X_K]$.

Demostración.

$$\begin{aligned} X(i(Y)\omega(Z)) &= L_X(i(Y)\omega)(Z) + i(Y)\omega(L_X Z) \\ &= d(\omega(Y, X))(Z) + i(X)d(i(Y)\omega)(Z) + \omega(Y, L_X Z) \\ &= d(\omega(Y, X))(Z) + \omega(Y, L_X Z) \\ X(\omega(Y, Z)) &= L_X\omega(Y, Z) + \omega(L_X Y, Z) + \omega(Y, L_X Z) \\ &= \omega([X, Y], Z) + \omega(Y, L_X Z). \end{aligned}$$

Entonces $d(\omega(Y, X))(Z) = \omega([X, Y], Z)$. □

PROPOSICIÓN 3.2. Sea ω una 2-forma no degenerada en la variedad M . Sean $A, B, C : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables y sean X_A, X_B, X_C los campos hamiltonianos correspondientes. Entonces

$$d\omega(X_A, X_B, X_C) = \{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\}$$

Así, ω es cerrada si y sólo si $\{, \}$ satisface la identidad de Jacobi.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\{\{A, B\}, C\} + \{\{C, A\}, B\} &= X_C(X_B(A)) - X_B(X_C(A)) = [X_C, X_B](A) \\
\{\{C, A\}, B\} + \{\{B, C\}, A\} &= [X_B, X_A](C) \\
\{\{B, C\}, A\} + \{\{A, B\}, C\} &= [X_A, X_C](B),
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
d\omega(X_A, X_B, X_C) &= X_A(\omega(X_B, X_C)) - X_B(\omega(X_A, X_C)) + X_C(\omega(X_A, X_B)) \\
&\quad - \omega([X_A, X_B], X_C) + \omega([X_A, X_C], X_B) - \omega([X_B, X_C], X_A) \\
&= \{A, \{C, B\}\} - \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{B, A\}\} \\
&\quad + [X_A, X_B](C) - [X_A, X_C](B) + [X_B, X_C](A) \\
&= \{A, \{C, B\}\} - \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{B, A\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{A, \{B, C\}\} \\
&\quad + \{A, \{B, C\}\} + \{C, \{A, B\}\} + \{C, \{A, B\}\} + \{B, \{C, A\}\} \\
&= \{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\}
\end{aligned}$$

EJEMPLO 3.1. \mathbb{R}^{2m} con la estructura canónica $\omega_0(x, y) = x \cdot J_m y$, $x, y \in T_p \mathbb{R}^{2m} \cong \mathbb{R}^{2m}$, es una variedad simpléctica

EJEMPLO 3.2. El haz cotangente de una variedad es el conjunto

$$T^*M = \bigcup_{q \in M} T_q M^* = \{(q, p) : q \in M, p \in T_q M^*\}$$

con la proyección $\pi : TM \rightarrow M$, $\pi(q, p) = q$.

Dada una carta de coordenadas $\varphi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$, para cada $q \in U$, dx_q^1, \dots, dx_q^m es una base de $T_q M^*$. Así cualquier $p \in T_q M^*$ se escribe $p = \sum_i y_i dx_q^i$ y entonces $(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^m) : T^*U \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ es una carta de coordenadas.

La 1-forma natural de $\eta : T^*M \rightarrow T^*(T^*M)$ se define por $\eta_{(q,p)} = p \circ D\pi_{(q,p)}$. Definimos $\omega = -d\eta$.

Escribiendo $w \in T_{(q,p)}(T^*M)$ en coordenadas locales

$$(3.1) \quad w = \sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{(q,p)} + b_i \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)_{(q,p)},$$

$$(3.2) \quad D\pi_{(q,p)} w = \sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_q$$

$$(3.3) \quad \eta_{(q,p)}(w) = \sum_{i=1}^m y_i a_i = \left(\sum_{i=1}^m y_i dx_{(q,p)}^i \right)(w)$$

$$(3.4) \quad \omega = \sum_{i=1}^m dx^i \wedge dy^i.$$

Por lo tanto ω es simpléctica.

Sean $H, K : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables. Escribiendo

$$\begin{aligned} X_H &= \sum_{j=1}^m A_j \frac{\partial}{\partial x_j} + B_j \frac{\partial}{\partial y_j}; \\ dH = i(X_H)\omega &= \sum_{i=1}^m dx^i \wedge dy^i \left(\sum_{j=1}^m A_j \frac{\partial}{\partial x_j} + B_j \frac{\partial}{\partial y_j}, \cdot \right) \\ \sum_{i=1}^m \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_i} &= \sum_{i=1}^m A_i dy^i - B dx^i; \\ X_H &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_i}; \\ \{H, K\} &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{\partial K}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial K}{\partial y_i} \end{aligned}$$

2. Grupos de Lie

DEFINICIÓN 3.3. Un grupo (G, \cdot) es un grupo de Lie si es una variedad diferenciable y la transformación $\mu : G \times G \rightarrow G$ dada por $\mu(g, h) = g \cdot h^{-1}$ es diferenciable.

Sea G un grupo de Lie. Denotaremos por e la identidad de G . Para cada $a \in G$ definimos las traslaciones izquierda y derecha $L_a, R_a : G \rightarrow G$ y el automorfismo interior I_a mediante $L_a(g) = a \cdot g$, $R_a(g) = g \cdot a$, $I_a(g) = aga^{-1}$. Un campo $X \in \mathfrak{X}(G)$ se llama invariante por la izquierda si $L_{a*}X = X$ para todo $a \in G$. Denotaremos por \mathfrak{g} el conjunto de campos invariantes por la izquierda.

OBSERVACIONES 3.1. Si $X, Y \in \mathfrak{g}$ entonces $[X, Y] \in \mathfrak{g}$ ya que

$$L_{a*}[X, Y] = [L_{a*}X, L_{a*}Y] = [X, Y] \quad \forall a \in G.$$

Si $X \in \mathfrak{g}$, entonces $X(g) = (L_{g*}X)(g) = L_{g*e}(X(g^{-1}g)) = L_{g*e}(X(e))$. Así hay un isomorfismo $T_e G \cong \mathfrak{g}$, $x \mapsto X$ donde $X(g) = L_{g*e}(x)$. Si $X \in \mathfrak{g}$ con $X(e) = x$, denotaremos por $t \mapsto e^{tx} = \exp(tx)$ a la solución de $g' = X(g)$ con $0 \mapsto e$. Entonces el flujo de X esta dado por $\varphi_t(g) = g \cdot e^{tx} = R_{\exp(tx)}(g)$ ya que

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g \cdot e^{tx} = L_{g*e}(x) = X(g).$$

Definimos $Ad(a) = D(I_a)_e$ y $ad_x = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad_{\exp(tx)}$. Si $X, Y \in \mathfrak{g}$ con $X(e) = x, Y(e) = y$ definiremos $[x, y] = [X, Y](e)$. Así

$$\begin{aligned} [x, y] &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (R_{\exp(-tx)*}Y)(e) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} DR_{\exp(-tx)}(Y(e^{tx})) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} DR_{\exp(-tx)}DL_{\exp(tx)}(y) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (D(I_{\exp(tx)})_e(y)) = ad_x y. \end{aligned}$$

Como $h_{*e}(y) = d/ds|_{s=0} h(e^{sy})$ para $h \in C^\infty(G, G)$, tenemos

$$[x, y] = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\Big|_{(0,0)} e^{tx} e^{sy} e^{-tx} = -[y, x] = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\Big|_{(0,0)} e^{-sy} e^{tx} e^{sy}.$$

La aparente diferencia entre las dos derivadas se explica con

$$[x, y] = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\Big|_{(0,0)} e^{-sy} e^{tx} e^{sy} e^{-tx}$$

DEFINICIÓN 3.4. Sea G un grupo de Lie. Cualquiera de \mathfrak{g} ó $T_e G$ con la correspondiente operación $[\cdot, \cdot]$ se llama el *álgebra de Lie* de G y la transformación $T_e G \rightarrow G, x \mapsto e^x$ se conoce como la *transformación exponencial*.

OBSERVACIONES 3.2. Si x_1, \dots, x_k es una base de $T_e G$, entonces los campos $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{g}$ con $X_i(e) = x_i$, forman una base de $T_g G$ en cada punto $g \in G$. Por lo tanto G es paralelizable mediante el difeomorfismo $G \times \mathfrak{g} \cong TG, (g, X) \rightarrow X(g)$.

Siempre podemos definir en G una métrica riemanniana invariante por la izquierda. De hecho sea $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$ cualquier métrica en $T_e G$ y definamos $\forall g \in G$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_g = (L_{g^{-1}}^*)_g(\langle \cdot, \cdot \rangle_e).$$

Para $\langle \cdot, \cdot \rangle$ invariante por la derecha y por la izquierda y $X, Y \in \mathfrak{g}$, tenemos que $L_X \langle \cdot, \cdot \rangle = 0$ y $\langle X, Y \rangle$ es constante. Por (4) de la Proposición 2.1

$$(3.5) \quad Z \langle X, Y \rangle = L_Z \langle \cdot, \cdot \rangle(X, Y) + \langle [Z, X], Y \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle$$

$$(3.6) \quad \langle [Z, X], Y \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle = 0.$$

EJEMPLO 3.3. Consideremos el grupo $SO(3)$ de las matrices ortogonales 3×3 con determinante 1. Sea $A : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow SO(3)$ una curva diferenciable con $A(0) = E_3$. Así $A(t)A(t)^T = E_3$ y derivando $A'(0) + A'(0)^T = 0$. Por lo tanto el algebra de Lie correspondiente $\mathfrak{so}(3)$ es el conjunto de matrices antisimétricas 3×3 . Hay un isomorfismo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ dado por

$$F \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

el cual satisface

$$F(x)a = x \times a, \forall a \in \mathbb{R}^3$$

Sea $g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \in \text{SO}(3)$, entonces

$$\begin{aligned} \text{Ad}(g)X &= gXg^t = g(x \times g_1^T, x \times g_2^T, x \times g_3^T) \\ &= (gx \times gg_1^T, gx \times gg_2^T, gx \times gg_3^T) \\ &= F(gx)(gg_1^T, gg_2^T, gg_3^T) = gXgg^T = F(gx). \end{aligned}$$

Así, para $Y = F(y) \in \text{so}(3)$

$$[Y, X] = YX - XY = F(Yx) = F(y \times x).$$

Por lo tanto $F : (\mathbb{R}^3, \times) \rightarrow (\text{so}(3), [,])$ es un isomorfismo de álgebras de Lie y la acción Ad de $\text{SO}(3)$ en su álgebra de Lie corresponde a la acción natural en \mathbb{R}^3 . Las órbitas de la acción son esferas centradas en el origen (o el propio origen).

Para un grupo de Lie G consideremos la acción Ad^* de G en \mathfrak{g}^* definida por $Ad^*(g) = Ad(g^{-1})^*$. Para $\xi \in \mathfrak{g}^*$ consideremos su órbita

$$O_\xi = \{Ad(g)^*\xi : g \in G\}$$

para la cual el espacio tangente $T_\xi O_\xi$ consiste de los vectores

$$ad_x(\xi) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Ad(e^{-tx})^*\xi, \quad x \in \mathfrak{g}.$$

En O_ξ definimos la 2-forma ω mediante

$$\omega_\xi(ad_x^*(\xi), ad_y^*(\xi)) = \xi([x, y]).$$

Para probar que ω es cerrada consideremos $x, y, z \in \mathfrak{g}$. Como

$$\begin{aligned} ad_x^*(\omega(ad_y^*, ad_z^*))(\xi) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \omega_{Ad(e^{-tx})^*\xi}(ad_y^*(Ad(e^{-tx})^*\xi), ad_z^*(Ad(e^{-tx})^*\xi)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Ad(e^{-tx})^*\xi([y, z]) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \xi(Ad(e^{-tx})[x, y]) = -\xi([x, [y, z]]) \end{aligned}$$

$$d\omega(ad_x^*, ad_y^*, ad_z^*)(\xi) = -2\xi([x, [y, z]]) - 2\xi([y, [z, x]]) - 2\xi([z, [x, y]]) = 0$$

OBSERVACIÓN 3.3. Cuando el álgebra de Lie \mathfrak{g} posee una forma bilineal no degenerada \langle , \rangle que satisface (3.6), \langle , \rangle permite identificar \mathfrak{g} con su dual y definir una estructura simpléctica en las órbitas de la acción adjunta mediante $\omega_x(ad_x y, ad_x z) = \langle x, [y, z] \rangle$.

EJEMPLO 3.4. Por medio del producto escalar usual de \mathbb{R}^3 identificamos el algebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ con su dual. Dicho producto escalar satisface (3.6) ya que $x \cdot (y \times z) = y \cdot (z \times x)$. Como observamos, las órbitas O de la acción adjunta son esferas. Además

$$T_w O = \{ad_x w = x \times w : x \in \mathbb{R}^3\},$$

como todo mundo sabe. La forma simpléctica en O esta dada por

$$\omega(x \times w, z \times w) = w \cdot (x \times y)$$

EJEMPLO 3.5. Consideremos ahora el grupo euclidiano $E(3)$ que es el producto semidirecto de $SO(3)$ y \mathbb{R}^3 , a saber si $A, B \in SO(3)$ $a, b \in \mathbb{R}^3$ la operacion está definida por

$$(3.7) \quad (A, a)(B, b) = (AB, Ab + a)$$

y así

$$(3.8) \quad (A, a)^{-1} = (A^T, -A^T a)$$

$$(3.9) \quad I_{(A,a)}(B, b) = (ABA^T, -AB^T a + Ab + a)$$

Identificando el álgebra de Lie $e(3)$ con $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, considerando una curva $(B(t), b(t)) \in E(3)$ y calculando la derivada de (3.9) en $t = 0$ tenemos

$$(3.10) \quad Ad(A, a)(X, x) = (AX, -(AX) \times a + Ax).$$

Como $|AX| = |X|$ y $AX \cdot (Ax - (AX) \times a) = X \cdot x$, las órbitas adjuntas son de la forma

$$\mathcal{O} = \{(Y, y) : |Y| = c_1, Y \cdot y = c_2\}$$

Considerando ahora una curva $(A(t), a(t)) \in E(3)$ y calculando la derivada de (3.10) en $t = 0$

$$(3.11) \quad ad_{(Y,y)}(X, x) = [(Y, y), (X, x)] = (Y \times X, -X \times y + Y \times x)$$

La función bilineal no degenerada en $e(3)$ definida por

$$\langle (X, x), (Y, y) \rangle = X \cdot y + x \cdot Y$$

satisface (3.6) y entonces permite definir una estructura simpléctica en las órbitas adjuntas.

Consideremos el movimiento de un cuerpo rígido en el campo gravitacional. En el sistema de coordenadas fijo al cuerpo, la ecuaciones de movimiento son las ecuaciones de Euler

$$(3.12) \quad A\dot{\omega} = (A\omega + \lambda) \times \omega + \nu \times C$$

$$(3.13) \quad \dot{\nu} = \nu \times \omega$$

donde A es la matriz de inercia, C es el centro de masa, ν es el vector unitario vertical visto desde el cuerpo. Las función $f_1 = |\nu|^2$, la componente vertical del momento angular $f_2 = (A\omega + \lambda) \cdot \nu$, y la energía

$H = \frac{1}{2}A\omega \cdot \omega + \nu \cdot C$ son primeras integrales de movimiento, o sea que a lo largo de soluciones de (3.12), (3.13), $\dot{f}_1 = \dot{f}_2 = \dot{H} = 0$ y por consiguiente para cualquier solución $(\nu(t), \omega(t))$ de (3.12) (3.13), la curva $(Y(t), y(t)) = (\nu(t), A\omega(t) + \lambda)$ permanece en la misma órbita adjunta en $e(3)$. Tenemos

$$(3.14) \quad \dot{y} = y \times A^{-1}(y - \lambda) + Y \times C$$

$$(3.15) \quad H = \frac{1}{2}(y - \lambda) \cdot A^{-1}(y - \lambda) + Y \cdot C$$

El campo vectorial X_H correspondiente a la restricción de H a una órbita adjunta está dado por $X_H(\xi) = [v(\xi), \xi]$ donde

$$dH(\xi)(ad_\eta \xi) = \langle \xi, [v(\xi), y] \rangle = \langle v(\xi), ad_\eta \xi \rangle$$

Como

$$dH(\xi)(Z, z) = \frac{\partial H}{\partial Y} Z + \frac{\partial H}{\partial x} z = \langle (\frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial Y}), (Z, z) \rangle$$

Así

$$\begin{aligned} X_H(Y, y) &= [(\frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial Y}), (Y, y)] \\ &= (Y \times \frac{\partial H}{\partial y}, y \times \frac{\partial H}{\partial y} + Y \times \frac{\partial H}{\partial Y}) \end{aligned}$$

Como

$$\frac{\partial H}{\partial y} = A^{-1}(y - \lambda), \quad \frac{\partial H}{\partial Y} = C,$$

$$\dot{\xi} = X_H(\xi)$$

resulta ser (3.13), (3.14)

EJEMPLO 3.6. Sean G un grupo de Lie y \langle, \rangle una métrica riemanniana en G invariante por la izquierda. La conexión definida por $\nabla_X Y = [X, Y]/2$ para $X, Y \in \mathfrak{g}$, es la conexión de Levi-Civita ya que es compatible con la métrica por (3.6) y

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = \frac{1}{2}[X, Y] - \frac{1}{2}[Y, X] = [X, Y].$$

Como $\nabla_X X = 0$ para $X \in \mathfrak{g}$, tenemos que las curvas $t \mapsto e^{tx}$ son geodésicas.

3. El teorema de Darboux

TEOREMA 3.1. Sean (M, ω) variedad simpléctica y $p \in M$. Entonces existe una vecindad coordenada (U, ϕ) , $\phi = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ tal que

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$$

Demostración. Consideremos $\omega_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$. Escojamos una base simpléctica $\{f_1, \dots, f_{2n}\}$ de $T_p M$.

Sea $(V, \tilde{\psi})$ vecindad coordenada alrededor de p . Sea L el automorfismo lineal de \mathbb{R}^{2n} que manda la base $\{\tilde{\psi}_p(f_i)\}$ en la base canónica y sea $\psi = L \circ \tilde{\psi}$. Entonces la transformación $d\psi_p$ manda la forma simpléctica ω_p en la forma simpléctica canónica Ω de \mathbb{R}^{2n} . En V tenemos dos formas simplécticas ω y $\omega^0 = \psi^* \Omega$. Vamos a demostrar que hay una deformación diferenciable φ_t , $t \in [0, 1]$ de una vecindad U de p tal que $\varphi_0 = id$ y $\varphi_1^* \omega = \omega^0$. Entonces la transformación $\phi = \psi \circ \varphi_1^{-1}$ satisficera $\phi^* \Omega = \omega$ y así (U, ϕ) es la vecindad coordenada buscada. Definamos la familia de 2-formas cerradas

$$\omega^t = \omega_0 + t(\omega - \omega^0) \quad t \in [0, 1],$$

Como $(\omega^t)_p = \omega_p$ para todo $t \in [0, 1]$, hay una vecindad U' de p donde ω^t no es degenerada para ningún $t \in [0, 1]$.

Obtendremos la deformación φ_t como la solución de una ecuación diferencial

$$\dot{x} = X_t(x).$$

Ya que

$$\varphi_1^* \omega - \omega^0 = \int_0^1 \frac{d}{dt} (\varphi_t^* \omega^t) dt,$$

queremos que $\frac{d}{dt} (\varphi_t^* \omega^t)$ se anule, pero como

$$\frac{d}{dt} (\varphi_t^* \omega^t) = \varphi_t^* (i(X_t) d\omega^t + d(i(X_t) \omega^t) + \frac{d\omega^t}{dt}),$$

y $d\omega^t = 0$, queremos $d(i(X_t) \omega^t) = \omega^0 - \omega$. Por el Lema de Poincaré 3.1, hay una vecindad $U \subset U'$ de p donde existe una 1-forma β tal que $d\beta = \omega^0 - \omega$. Luego, podemos escoger X_t $t \in [0, 1]$ tal que $i(X_t) \omega^t = \beta$. \square

LEMA 3.1. Poincaré. Sea A una r -forma cerrada en un convexo $W \subset \mathbb{R}^m$. Entonces existe una $r - 1$ -forma en W tal que $A = dB$.

Demostración. Fijemos $q \in W$ y definamos

$$h_t(x) = q + t(x - q), Y(x) = x - q, x \in W.$$

Entonces $h_0(x) = q, h_1(x) = x$ y así $h_0^*A = 0, h_1^*A = A,$

$$A = \int_0^1 h_t^*(i(Y)dA + d(i(Y)A))dt = d \int_0^1 h_t^*i((Y)A)dt$$

□

A continuación presentamos generalizaciones del Lema de Poincaré y el Teorema de Darboux.

Sea M una variedad riemanniana y sea $P \subset M$ una subvariedad compacta. Consideremos el haz normal de P

$$N(P) = \{(x, v) \in TM : v \perp T_x P\}.$$

Hay una $\varepsilon > 0$ tal que

$$\phi : \{(x, v) \in N(P) : |v| < \varepsilon\} \rightarrow M, \phi(x, v) = \exp_x(v)$$

es un difeomorfismo sobre su imagen $V(P)$ a la que llamaremos **vecindad tubular**.

PROPOSICIÓN 3.3. *Sea ω una r -forma cerrada en la vecindad tubular $V(P)$ tal que $\omega|_P = 0$. Entonces existe una $r - 1$ -forma η en $V(P)$ tal que $\eta|_P = 0$ y $\omega = d\eta$.*

Demostración. Para $t \in [0, 1]$ consideremos la deformación

$$h_t : N(P) \rightarrow N(P), h_t(\exp_x(v)) = \exp_x(tv)$$

y para $t > 0$ definamos

$$X_t = \left(\frac{dh_t}{dt}\right) \circ h_t^{-1}.$$

Entonces

$$h_t^*\omega = 0, h_t^*\omega = \omega, h_t|_P = id_Q,$$

$$\frac{d}{dt}h_t^*\omega = d(h_t^*i(X_t)\omega) = d\sigma^t$$

donde la familia de $r - 1$ formas σ^t dada por

$$\sigma_q^t(v_1, \dots, v_{r-1}) = \omega_{h_t(q)}\left(\frac{d}{dt}h_t(q), dh_t(q)v_1, \dots, dh_t(q)v_{r-1}\right)$$

es diferenciable para $t \geq 0$ y se anula en P . Entonces

$$\omega = \int_0^1 \frac{d}{dt}(h_t^*\omega)dt = d \int_0^1 \sigma^t dt$$

□

OBSERVACIÓN 3.4. Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Por el Teorema 1.4, para cada $p \in M$ hay una estructura compleja J_p de $T_p M$ compatible con ω_p y posotiva. De la demostración de dicho Teorema se sigue que J_p varia diferenciablemente con p . Sea g la métrica riemanniana dada por $g_p(v, w) = \omega_p(v, J_p w)$. Sea $L \subset T_p M$ subespacio lagrangiano, entonces

$$\begin{aligned} L &= \{v \in T_p M : \omega_p(v, w) = 0, \forall w \in L\} \\ &= \{v \in T_p M : g_p(v, J_p w) = 0, \forall w \in L\} \\ L^{\perp_g} &= J(L) \end{aligned}$$

TEOREMA 3.2. *Sea N una subvariedad lagrangiana de la variedad simpléctica (M, ω) . Hay vecindades $U \subset T^*N$ y $V \subset M$ de N y una transformación $U \rightarrow V$ tales que $\psi(x, 0) = x \forall x \in N$ y $\psi^* \omega = -d\eta$ es la estructura simpléctica natural de T^*N*

Demostración. De acuerdo con la observación 3.4 tenemos un difeomorfismo $\alpha : TN^{\perp} \rightarrow T^*N$ dada por

$$\alpha(x, z) = (x, z^*) = (x, g_x(J_x z, \cdot))$$

Entonces $D\alpha_{(x,0)}(v, 0) = (v, 0)$ y $D\alpha_{(x,0)}(0, z) = (0, z^*)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} -(\alpha^* d\eta)_{(x,0)}((v, z), (w, y)) &= y^*(v) - z^*(w) = g_x(J_x y, v) - g_x(J_x z, w) \\ &= \omega_x(v, y) - \omega_x(w, z) \end{aligned}$$

Consideremos también una vecindad tubular

$$\varphi : \{(x, v) : x \in N, v \in J_x(T_x N), |v| < \varepsilon\} \rightarrow V(N), \quad \varphi(x, v) = \exp_x(v).$$

Entonces $D\varphi_{(x,0)}(v, z) = v + z$ y así

$$(\varphi^* \omega)_{(x,0)}((v, z), (w, y)) = \omega_x(v + z, w + y) = \omega_x(v, y) + \omega_x(z, w)$$

ya que $v, w \in T_x N$, $z, y \in J_x(T_x N)$.

Así $-(\alpha \circ \varphi^{-1})^* d\eta|_x = \omega_x$ para $x \in N$. Por lo tanto hay vecindades W, V de N y un difeomorfismo $\phi : W \rightarrow V$ tales que

$$\phi^* \omega = -(\alpha \circ \varphi^{-1})^* d\eta.$$

Sea $\psi = \phi \circ \varphi \circ \alpha^{-1}$. □

EJEMPLO 3.7. Sea (M, ω) variedad simpléctica y sea $\phi : M \rightarrow M$. Consideremos $M \times M$ con la estructura simpléctica $-\omega \oplus \omega$. Como $\phi^* \omega = \omega$ si y sólo si $(I, \phi)^*(-\omega \oplus \omega) = 0$, tenemos que ϕ es simpléctica si y sólo si $\text{graf } \phi$ es una subvariedad lagrangiana de $M \times M$.

La diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in M\}$ es una subvariedad lagrangiana de $M \times M$ difeomorfa a M . Por el Teorema 3.2 hay vecindades U de Δ en $M \times M$, V de M en T^*M y un difeomorfismo $\psi : V \rightarrow U$ tal que $\psi^*(-\omega \oplus \omega) = -d\lambda$.

Si $\phi : M \rightarrow M$ es un simplectomorfismo C^1 cercano a la identidad, hay una 1-forma λ en M tal que $\psi^{-1}(x, \phi(x)) = \lambda(x)$ y $\text{graf } \phi$ es una subvariedad lagrangian si y sólo si $d\lambda = 0$. Los puntos fijos de ϕ corresponden a las intersecciones de Δ con $\text{graf } \phi$ y así, a los ceros de λ .

4. Acciones simplécticas

Sean (M, ω) variedad simpléctica y G un grupo de Lie. Una acción $\Phi : G \times M \rightarrow M$, $\Phi_g(x) = \Phi(g, x)$ se llama simpléctica si para todo $g \in G$, Φ_g es simpléctica. La órbita de $x \in M$ es

$$G \cdot x = \{\Phi_g(x) : g \in G\}.$$

Cada $\xi \in \mathfrak{g}$ genera un campo vectorial simpléctico X_ξ tangente a las órbitas

$$X_\xi = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_{e^{t\xi}}.$$

Tenemos que $d(i_{X_\xi}\omega) = L_{X_\xi}\omega = 0$ y nos restringiremos a acciones donde cada X_ξ es hamiltoniano es decir que $i_{X_\xi}\omega = dH_\xi$ para una función diferenciable $H_\xi : M \rightarrow \mathbb{R}$. Fijando una base ξ_1, \dots, ξ_n y escogiendo $H_{\xi_1}, \dots, H_{\xi_n}$ por linealidad extendemos la definición de H_ξ para todo $\xi \in \mathfrak{g}$. Como $\exp(t\text{Ad}(g)\xi) = ge^{t\xi}g^{-1}$,

$$(3.16) \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_{(g)^\xi}(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi(ge^{t\xi}g^{-1}, x) = D\Phi_g X_\xi(\Phi_g^{-1}(x)) = (\Phi_{g*} X_\xi)(x)$$

$$(3.17) \quad [X_\eta, X_\xi] = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_{\exp(-t\eta)*} X_\xi = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} X_{\text{Ad}(\exp(-t\eta)\xi)} = -X_{[\eta, \xi]}$$

Por la Proposición 3.1 si X, Y son campos vectoriales simplécticos,

$$i([X, Y])\omega = d(\omega(Y, X))$$

Así

$$dH_{[\eta, \xi]} = i(X_{[\eta, \xi]})\omega = i([X_\xi, X_\eta])\omega = d\{H_\xi, H_\eta\}$$

y entonces hay un número real $c(\xi, \eta)$ tal que

$$H_{[\eta, \xi]} = \{H_\xi, H_\eta\} + c(\xi, \eta)$$

DEFINICIÓN 3.5. Una acción simplectica se llama acción de Poisson si para cada $\xi \in \mathfrak{g}$ el campo X_ξ es hamiltoniano y es posible escoger el hamiltoniano H_ξ de tal forma que

$$H_{[\eta, \xi]} = \{H_\xi, H_\eta\}.$$

Para una acción de Poisson definimos la transformación de **momento** $\Psi : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ mediante $\langle \Psi(x), \xi \rangle = H_\xi(x)$.

EJEMPLO 3.8. Sea N una variedad y sea $\phi : G \times N \rightarrow N$ una acción suave del grupo de Lie G . Extendemos la acción a $M = T^*N$ mediante

$$\Phi_g(x, p) = (\phi_g(x), D\phi_g^*p)$$

Recordemos que la 1-forma natural λ de M esta dada por

$$\lambda_{(x,p)}(v, w) = p(v)$$

y así

$$\Phi_g^*\lambda(x, p)(v, w) = \lambda_{\Phi_g(x,p)}(D\Phi_g(x, p)(v, w)) = D\phi_g^*p(D\phi_g(x)v) = p(v)$$

o sea que $\Phi_g^*\lambda = \lambda$. Por lo tanto

$$L_{X_\xi}\lambda = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi_{\exp(t\xi)}^*\lambda = 0$$

y entonces

$$d(\lambda(X_\xi)) = -i(X_\xi)d\lambda = i(X_\xi)\omega.$$

Así, el campo

$$X_\xi(x, p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi_{\exp(t\xi)}(x, p) = \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi_{\exp(t\xi)}(x), -\right) = (Y_\xi(x), -)$$

tiene hamiltoniano

$$H_\xi(x, p) = \lambda_{(x,p)}(X_\xi(x, p)) = p(Y_\xi(x))$$

Por ejemplo, consideremos la acción natural del grupo euclidiano $E(3)$ sobre un sistema de n partículas $\phi : E(3) \times \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$

$$\begin{aligned} \phi_{(A,a)}(x_1, \dots, x_n) &= (Ax_1 + a, \dots, Ax_n + a) \\ Y_{(Z,z)}(x) &= (Z \times x_1 + z, \dots, Z \times x_n + z) \\ H_{(Z,z)}(x, p) &= p_1 \cdot (Z \times x_1 + z) + \dots + p_n \cdot (Z \times x_1 + z) \\ &= Z \cdot (x_1 \times p_1 + \dots + x_n \times p_n) + z \cdot (p_1 + \dots + p_n) \end{aligned}$$

y así la transformación de momento

$$\Psi(x, p) = (x_1 \times p_1 + \dots + x_n \times p_n, p_1 + \dots + p_n)$$

consiste del momento angular y lineal totales del sistema.

PROPOSICIÓN 3.4. *La transformación momento es equivariante, es decir*

$$\Psi \circ \Phi_g = Ad^*(g) \circ \Psi$$

para todo $g \in G$

Por (3.16)

$$\begin{aligned}
 dH_{Ad(g)^{-1}\xi}(x)v &= \omega(X_{Ad(g)^{-1}\xi}(x), v) = \omega(\Phi_{g^{-1}*}X_\xi(x), v) \\
 &= \omega(X_\xi(\Phi_g(x)), D\Phi_g(x)v) = dH_\xi(\Phi_g(x))(D\Phi_g(x)v) \\
 (3.18) \qquad &= d(H_\xi \circ \Phi_g)(x)v
 \end{aligned}$$

Así

$$(3.19) \qquad H_\xi(\Phi_g(x)) = H_{Ad(g)^{-1}\xi}(x) = \langle \Psi(x), Ad(g^{-1})\xi \rangle$$

$$(3.20) \qquad \langle \Psi(\Phi_g(x)), \xi \rangle = \langle Ad^*(g)(\Psi(x)), \xi \rangle$$

Sea η un valor regular de la transformación de momento. Consideremos el subgrupo de isotropía

$$G_\eta = \{g \in G : Ad(g)^*\eta = \eta\}$$

Si $x \in \Psi^{-1}(\eta)$ y $g \in G_\eta$, se sigue de la Proposición 3.4 que $\Psi(\Phi_g(x)) = Ad(g^{-1})^*\eta = \eta$ y así, el subgrupo G_η actúa en $\Psi^{-1}(\eta)$. Haremos alguna suposición técnica que asegure que $M_\eta = \Psi^{-1}(\eta)/G_\eta$ es una variedad, por ejemplo

- G_η es compacto
- Para $g \in G_\eta$, Φ_g no tiene puntos fijos

LEMA 3.2. *Para $x \in \Psi^{-1}(\eta)$ el espacio ortogonal simpléctico a $T_xG \cdot x$ es precisamente $T_x\Psi^{-1}(\eta)$*

Demostración. Como

$$T_xG \cdot x = \{X_\xi(x) : \xi \in \mathfrak{g}\},$$

tenemos que v es ortogonal a $T_xG \cdot x$ si y sólo si para todo $g \in \mathfrak{g}$ tenemos

$$\langle d\Psi(x)v, \xi \rangle = dH_\xi(x)v = \omega(v, X_\xi(x)) = 0,$$

o sea $v \in \ker d\Psi(x) = T_x\Psi^{-1}(\eta)$. □

Para $x \in \Psi^{-1}(\eta)$ denotemos por $[x]$ su imagen bajo la proyección canónica $\Psi^{-1}(\eta) \rightarrow M_\eta$.

$$T[x]M_\eta = T_x\Psi^{-1}(\eta)/T_x\Psi^{-1}(\eta) \cap T_xG \cdot x$$

Para $\bar{u}, \bar{v} \in T[x]M_\eta$, escojamos $u, v \in T_x\Psi^{-1}(\eta)$ que proyecten en \bar{u}, \bar{v} respectivamente y definamos

$$\bar{\omega}_{[x]} = \omega_x(u, v).$$

La definición no depende de la elección de los vectores u, v porque si $\alpha, \beta \in T_x\Psi^{-1}(\eta) \cap T_xG \cdot x$ entonces

$$\omega_x(\alpha, v) = \omega_x(u, v) = \omega_x(\alpha, \beta) = 0.$$

Tampoco depende del representante $x \in \Psi^{-1}(\eta)$, porque si $y = \Phi_g(x)$ con $g \in G_\eta$ entonces $d\Phi_g(u), d\Phi_g(v) \in d\Phi_g(T_x\Psi^{-1}(\eta)) = T_y\Psi^{-1}(\eta)$ y

$$\omega_y(d\Phi_g(u), d\Phi_g(v)) = \omega_x(u, v).$$

Tenemos que $\bar{\omega}$ **no es degenerada** porque si $u \in T_x\Psi^{-1}(\eta)$ es tal que $\omega_x(u, v) = 0$ para todo $v \in T_x\Psi^{-1}(\eta)$ tenemos que $u \in T_xG \cdot x$ y así $\bar{u} = 0$. Por lo tanto M_η es una variedad simpléctica llamada el **cociente simpléctico** definido por la acción hamiltoniana Φ .

EJEMPLO 3.9. Consideremos la acción de \mathbb{S}^1 sobre $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ dada por $w \cdot (z_1, \dots, z_n) = (wz_1, \dots, wz_n)$. El campo

$$X(z_1, \dots, z_n) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (e^{it}z_1, \dots, e^{it}z_n) = (iz_1, \dots, iz_n)$$

es hamiltoniano con función hamiltoniana $H = \frac{1}{2}(|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)$ y H^{-2} es la esfera unitaria. El cociente simpléctico

$$H^{-2}/\mathbb{S}^{-1} = \mathbb{C}^n/\mathbb{C} - \{0\}$$

es el espacio proyectivo.

CAPÍTULO 4

El formalismo canónico

1. Las ecuaciones de Hamilton

LEMA 4.1. *Sea A un campo vectorial en \mathbb{R}^3 . Las curvas solución de $\text{rot } A$ se llaman las líneas de vorticidad de A . Si γ_1 es una curva cerrada, las líneas de vorticidad que pasan por γ_1 forman un tubo σ llamado de vorticidad. Sea γ_2 otra curva cerrada en el mismo tubo de vorticidad, entonces*

$$\int_{\gamma_1} \langle A, dr \rangle = \int_{\gamma_2} \langle A, dr \rangle$$

Demostración. Por el teorema de Stokes

$$\int_{\gamma_2} \langle A, dr \rangle - \int_{\gamma_1} \langle A, dr \rangle = \int_{\sigma} \langle \text{rot } A, n \rangle dS = 0$$

ya que $\text{rot } A$ es tangente a σ . □

LEMA 4.2. *Sea Ω una forma bilineal antisimétrica en \mathbb{R}^{2n+1} . Entonces $\exists X \neq 0$ tal que $\forall Y \in \mathbb{R}^{2n+1}, \Omega(X, Y) = 0$.*

Demostración. Hay una matriz antisimétrica \mathbb{Q} tal que

$$\Omega(X, Y) = \langle \mathbb{Q}X, Y \rangle.$$

$$\det \mathbb{Q} = \det \mathbb{Q}^t = \det(-\mathbb{Q}) = (-1)^{2n+1} \det \mathbb{Q} \Rightarrow \det \mathbb{Q} = 0.$$

Por lo tanto $\exists X \neq 0$ tal que $\mathbb{Q}X = 0$. □

OBSERVACIÓN 4.1. Si $\ker \Omega := \ker \mathbb{Q}$ es unidimensional, decimos que Ω no es singular.

DEFINICIÓN 4.1. Sea ω una 1-forma diferencial en \mathbb{R}^{2n+1} . Si $d\omega$ no es singular, $\ker d\omega$ se llama dirección característica de ω y las curvas integrales del campo de direcciones características se llaman líneas de vorticidad. Sea γ_1 una curva cerrada, las líneas de vorticidad que pasan por γ_1 forman un tubo σ llamado de vorticidad.

LEMA 4.3. *Si las curvas cerradas γ_1, γ_2 encierran el mismo tubo de vorticidad para la 1-forma diferencial ω en \mathbb{R}^{2n+1} , entonces*

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

Demostración. Podemos parametrizar el tubo de vorticidad mediante $c : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de tal manera que $c([0, 1] \times \{i-1\}) = \gamma_i$, $i = 1, 2$ y $\frac{\partial c}{\partial v}$ es una dirección de vorticidad. Por el teorema de Stokes

$$\int_{\gamma_2} \omega - \int_{\gamma_1} \omega = \int_c d\omega = \int_{[0,1]^2} \omega \left(\frac{\partial c}{\partial u}, \frac{\partial c}{\partial v} \right) = 0$$

□

Consideremos ahora una función diferenciable real

$$H(q, p, t) = H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$$

y la 1-forma diferencial

$$\omega = pdq - Hdt = p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n - Hdt,$$

de tal manera que

$$\begin{aligned} d\omega &= dp \wedge dq - dH \wedge dt = dp_1 \wedge dq_1 + \dots + dp_n \wedge dq_n - dH \wedge dt, \\ dH &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt = H_p dp + H_q dq + \frac{\partial H}{\partial t} dt \end{aligned}$$

TEOREMA 4.1. *Las líneas de vorticidad de $\omega = pdq - Hdt$ son las curvas integrales del sistema de ecuaciones diferenciales de Hamilton*

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \dot{q} &= H_p \\ \dot{p} &= -H_q \end{aligned}$$

Demostración.

$$d\omega(X, Y) = \langle \mathbb{Q}X, Y \rangle, \quad \mathbb{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} & H_q \\ -\mathbb{I} & 0 & H_p \\ -H_q^t & -H_p^t & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz \mathbb{Q} es $2n$ ya que $\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}$ es invertible y

$$\mathbb{Q} \begin{pmatrix} H_p \\ -H_q \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así, $(X_H^t, 1) = (H_p^t, -H_q^t, 1)$ genera la dirección de vorticidad de ω . Pero $(H_p^t, -H_q^t, 1)$ es tangente a las curvas integrales del sistema (4.1). □

COROLARIO 4.2. *Si las curvas cerradas γ_1, γ_2 encierran el mismo tubo formado por (segmentos de) curvas integrales del sistema (4.1) entonces*

$$\int_{\gamma_1} pdq - Hdt = \int_{\gamma_2} pdq - Hdt.$$

En particular, si $g_t(q, p) = \varphi_{t_1}^t(q, p)$ denota la solución a (4.1) que satisface $g_{t_1} = I$, entonces para cualquier curva cerrada α en \mathbb{R}^{2n} se tiene

$$\int_{\alpha} pdq = \int_{g_t \circ \alpha} pdq = \int_{\alpha} g_t^*(pdq) = \int_{\alpha} P_t dQ_t$$

donde $g_t = (Q_t, P_t)$.

De acuerdo al Corolario 4.2 si σ es una superficie bidimensional con frontera, por el Teorema de Stokes tenemos

$$\int_{\sigma} dp \wedge dq = \int_{\sigma} g_t^*(dp \wedge dq) = \int_{\sigma} dP_t \wedge dQ_t,$$

es decir que g_t preserva la forma $\Omega = dp \wedge dq$.

DEFINICIÓN 4.2. Una transformación $g : U \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ se llama **simpléctica** o **canónica** si preserva la forma $\Omega = dp \wedge dq$ o sea si

$$Dg(x)^t \mathbb{J} Dg(x) = \mathbb{J} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Así, la transformación $g = (Q, P)$ es canónica si y sólo si la forma $PdQ - pdq$ es cerrada. En el caso en que U es simplemente conexa, esta condición es equivalente a que $PdQ - pdq$ sea exacta o a que

$$\int_{\gamma} pdq = \int_{g \circ \gamma} pdq$$

para cualquier curva cerrada γ en U .

Una transformación canónica preserva las formas Ω^k , $k \in \mathbb{N}$. Como Ω^n es un múltiplo de la forma de volumen $dp_1 \wedge dq_1 \wedge \cdots \wedge dp_n \wedge dq_n$, tenemos

COROLARIO 4.3. Las transformaciones canónicas preservan el volumen.

TEOREMA 4.4. Sean $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ abierto y $H : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Una transformación canónica $g = (Q, P) : U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ transforma el sistema hamiltoniano (4.1) en el sistema

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \dot{Q} &= K_P \\ \dot{P} &= -K_Q \end{aligned}$$

donde $K(g(q, p), t) = H(q, p, t)$. Más generalmente si U es simplemente conexo, una familia diferenciable

$$g_t(q, p) = (Q(q, p, t), P(q, p, t)), \quad t \in \mathbb{R}$$

de transformaciones canónicas, transforma el sistema (4.1) en el sistema (4.2) donde

$$K(g_t(q, p), t) = H(q, p, t) - \frac{\partial S}{\partial t}$$

y $S : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable.

Demostración. Como $g = (Q, P)$ es canónica, $d(PdQ - pdq) = 0$. Por lo tanto

$$d(pdq - Hdt) = d(PdQ - K(Q, P, t)dt) = G^*d(pdq - Kdt).$$

donde $G(q, p, t) = (g(q, p), t)$. Así, G transforma las líneas de vorticidad de $pdq - Hdt$ en las líneas de vorticidad de $pdq - Kdt$. \square

2. Hamiltoninos Autónomos

Supongamos que la función $H(q, p)$ no depende de t . Si $\alpha(t) = (q(t), p(t))$ es una solución del sistema (4.1) entonces

$$\frac{d}{dt}H(\alpha(t)) = \langle H_p, \dot{p} \rangle + \langle H_q, \dot{q} \rangle = -\langle H_p, H_q \rangle + \langle H_q, H_p \rangle = 0$$

y así α yace en una superficie de nivel $M_h = \{(q, p) : H(q, p) = h\}$.

Sea $\gamma(t) = (\alpha(t), t)$ una curva integral del sistema (4.1). Entonces γ es una línea de vorticidad de

$$\omega = pdq - Hdt.$$

Como $dH(\dot{\gamma}) = dH(\dot{\alpha}) = 0$,

$$0 = d\omega(\dot{\gamma}, \cdot) = dp \wedge dq(\dot{\alpha}, \cdot) + dH.$$

Luego, la curva α es una línea de vorticidad de pdq sobre M_h .

Supongamos que en alguna región $H_{p_1} \neq 0$ y que podemos resolver la ecuación $H(q, p) = h$ para p_1 :

$$p_1 = K(q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n, -q_1) = K(Q, P, T)$$

de tal forma que en dicha región, Q, P, T es un sistema de coordenadas para M_h y $pdq = PdQ - KdT$. Como $\dot{q}_1 = H_{p_1} \neq 0$, podemos parametrizar las líneas de vorticidad de pdq por T . Así

TEOREMA 4.5. *Las soluciones del sistema (4.1) satisfacen en M_h el sistema*

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \frac{dQ}{dT} &= K_P \\ \frac{dP}{dT} &= -K_Q \end{aligned}$$

donde $P = (p_2, \dots, p_n)$, $Q = (q_2, \dots, q_n)$ y la función $K(Q, P, T)$ está definida por la ecuación $H(-T, Q, K, P) = h$.

3. Principios variacionales

Para $q, Q \in \mathbb{R}^n$ y $a, b \in \mathbb{R}$ consideremos

$$\Omega(q, Q, a, b) = \{\alpha \in C^2([a, b], \mathbb{R}^{2n}) : \alpha(a) \in \{q\} \times \mathbb{R}^n, \alpha(b) \in \{Q\} \times \mathbb{R}^n\}$$

y definimos la funcional de acción $A : \Omega(q, Q, a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$A(\alpha) = \int_a^b (p(t)\dot{q}(t) - H(\alpha(t), t))dt$$

donde $\alpha(t) = (q(t), p(t))$.

TEOREMA 4.6. *La curva α es un punto crítico de A si y sólo si es una solución de las ecuaciones de Hamilton (4.1)*

Demostración. Sea $s \mapsto \alpha_s, |s| < \varepsilon$ una curva diferenciable en $\Omega(q, Q, a, b)$ con $\alpha_0 = \alpha$.

$$\begin{aligned} \frac{dA(\alpha_s)}{ds} &= \int_a^b \left(\frac{dp}{ds} \dot{q} + p \frac{d\dot{q}}{ds} - H_p \frac{dp}{ds} - H_q \frac{dq}{ds} \right) dt \\ &= \left[p \frac{dq}{ds} \right]_a^b + \int_a^b \left(\dot{q} \frac{dp}{ds} - \dot{p} \frac{dq}{ds} - H_p \frac{dp}{ds} - H_q \frac{dq}{ds} \right) dt \\ \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} A(\alpha_s) &= \int_a^b \left((\dot{q} - H_p) \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} p - (\dot{p} + H_q) \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} q \right) dt \end{aligned}$$

Por lo tanto α es un punto crítico de A si y sólo si es una solución de las ecuaciones de Hamilton (4.1). \square

Sea $L : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ un lagrangiano tal que $L_{vv}(q, v)$ es positivo definido para todo (x, v) . La función de energía se define por

$$E(q, v) = L_v(q, v)v - L(q, v)$$

La transformación de Legendre asociada está definida por

$$\mathcal{L}(q, v) = (q, L_v(q, v)).$$

Por la hipótesis de convexidad, \mathcal{L} es invertible. La transformada de Legendre de L es $H = E \circ \mathcal{L}^{-1}$. Las ecuaciones de Euler- Lagrange

$$(4.4) \quad \frac{d}{dt} L_v(q, \dot{q}) = L_x(q, \dot{q})$$

se transforman mediante \mathcal{L} en el sistema hamiltoniano (4.1), y por consiguiente E es constante a lo largo de soluciones de (4.4)

TEOREMA 4.7. Principio de Maupertuis.

Sean e un valor regular de E . Para $q, Q \in \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$, sea $\Omega(q, Q, a, b : e)$ el conjunto de parejas de funciones C^2 , $\tau : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha : [\tau(a), \tau(b)] \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ tales que

$$\tau' > 0, E(\alpha(\tau(t)), \alpha'(\tau(t))) = e, \alpha(\tau(a)) = q, \alpha(\tau(b)) = Q.$$

Definimos la funcional de acción reducida $A_h : \Omega(q, Q, a, b : e) \rightarrow \mathbb{R}$

$$A_e(\tau, \alpha) = \int_{\tau(a)}^{\tau(b)} L_v(\alpha, \alpha') \alpha'$$

Entonces (τ, α) es un valor crítico de A_e si y sólo si α es una solución de las ecuaciones de Euler - Lagrange (4.4)

Demostración. Dado que todas las curvas α tienen energía e

$$L_v(\alpha, \alpha') \alpha' = L(\alpha, \alpha') + e$$

Sea $s \mapsto (\tau_s, \alpha_s), |s| < \varepsilon$, una curva diferenciable en $\Omega(q, Q, a, b : e)$
Siguiendo el procedimiento en la demostración del Teorema 4.6

$$\begin{aligned} \frac{dA_e(\tau_s, \alpha_s)}{ds} &= \left[\frac{d\tau_s}{ds} (L(\alpha_s \circ \tau_s, \alpha'_s \circ \tau_s) + e) \right]_a^b + \int_{\tau_s(a)}^{\tau_s(b)} \frac{dL(\alpha_s, \alpha'_s)}{ds} \\ \int_{\tau_s(a)}^{\tau_s(b)} \frac{dL(\alpha_s, \alpha'_s)}{ds} &= \left[L_v(\alpha_s, \alpha'_s) \frac{d\alpha_s}{ds} \right]_{\tau_s(a)}^{\tau_s(b)} \\ &+ \int_{\tau_s(a)}^{\tau_s(b)} \left(L_q(\alpha_s, \alpha'_s) - \frac{dL_v(\alpha_s, \alpha'_s)}{dt} \right) \frac{d\alpha_s}{ds} \end{aligned}$$

Como $\alpha_s(\tau_s(a)) = q$, $\alpha_s(\tau_s(b)) = Q$ y $E(\alpha_s \circ \tau_s, \alpha'_s \circ \tau) = e$,

$$\frac{d\alpha_s(\tau_s(a))}{ds} = \frac{d\alpha_s(\tau_s(a))}{ds} = 0$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\tau_s}{ds} \circ \tau_s^{-1} (L(\alpha_s, \alpha'_s) + e) + L_v(\alpha_s, \alpha'_s) \frac{d\alpha_s}{ds} \right]_{\tau_s(a)}^{\tau_s(b)} \\ = \left[L_v(\alpha_s \circ \tau_s, \alpha'_s \circ \tau_s) \frac{d(\alpha_s \circ \tau_s)}{ds} \right]_a^b = 0 \end{aligned}$$

Así,

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} A_e(\tau_s, \alpha_s) = \int_{\tau_0(a)}^{\tau_0(b)} \left(L_q(\alpha_0, \alpha'_0) - \frac{dL_v(\alpha_0, \alpha'_0)}{dt} \right) \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \alpha_s.$$

Por lo tanto (τ_0, α_0) es un punto crítico de A_e si y sólo si α_0 es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange (4.4). \square

EJEMPLO 4.1. Una función $q \mapsto G(q)$ que asocia a cada punto de \mathbb{R}^n una matriz simétrica positiva definida, define una métrica. Consideremos el lagrangiano mecánico

$$L(q, v) = \frac{1}{2} \langle G(q)v, v \rangle - V(q),$$

con energía

$$E(q, v) = \frac{1}{2} \langle G(q)v, v \rangle + V(q).$$

Entonces la funcional de acción reducida esta dada por

$$A_e(\tau, \alpha) = \int_{\tau(a)}^{\tau(b)} \langle G(\alpha)\alpha', \alpha' \rangle$$

La condición $E(\alpha, \alpha') = e$ implica que

$$\begin{aligned} \langle G(\alpha)\alpha', \alpha' \rangle &= 2(e - V\alpha) \\ \langle G(\alpha)\alpha', \alpha' \rangle &= \sqrt{2(e - V\alpha)} \sqrt{\langle G(\alpha)\alpha', \alpha' \rangle}. \end{aligned}$$

Considerando para cada $q \in V^{-1}(-\infty, e)$ la matriz positiva definida $J(q) = 2(e - V(q))G(q)$, definimos una nueva métrica en esa región, conocida como la métrica de Jacobi. Entonces la funcional de acción reducida esta dada por

$$\begin{aligned} A_e(\tau, \alpha) = \int_{\tau(a)}^{\tau(b)} \langle G(\alpha)\alpha', \alpha' \rangle &= \int_{\tau(a)}^{\tau(b)} \sqrt{\langle J(\alpha)\alpha', \alpha' \rangle} \\ &= \int_a^b \sqrt{\langle J(\alpha \circ \tau)(\alpha \circ \tau)', (\alpha \circ \tau)' \rangle}. \end{aligned}$$

Por el principio de Maupertuis, las geodésicas de la métrica J son las imagenes de las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange (4.4)

4. La función de acción. La ecuación de Hamilton-Jacobi

Sea $H : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $g^t = (Q^t, P^t)$ la solución al sistema (4.1) tal que $g^0 = I$. Definimos la **función de acción**

$$\begin{aligned} S^\tau(x) &= \int_0^\tau (P^s(x) \frac{d}{ds} Q^s(x) - H(g^s(x), s)) ds = \int_{g^{[0, \tau]}(x)} pdq - H dt \\ &= \int_0^\tau (P^s(x) H_p(g^s(x), s) - H(g^s(x), s)) ds \end{aligned}$$

Por el teorema fundamental del cálculo

$$(4.5) \quad \frac{\partial S^t(x)}{\partial t} = P^t(x) H_p(g^t(x), t) - H(g^t(x), t).$$

Consideremos una curva diferenciable $c(s) = (p(s), q(s))$, $|s| < \varepsilon$ y sea $\sigma(s, t) = g^t(c(s))$. Por el teorema de Stokes

$$\begin{aligned} \int_\sigma dp \wedge dq - dH \wedge dt &= S^\tau(c(0)) - S^\tau(c(s)) + \int_0^s c^*(P^\tau dQ^\tau) - \int_0^s c^*(pdq) \\ S^\tau(c(s)) - S^\tau(c(0)) &= \int_0^s c^*(P^\tau dQ^\tau - pdq). \end{aligned}$$

Por el teorema fundamental del cálculo

$$(S^\tau \circ c)' = c^*(P^\tau dQ^\tau - pdq) = (P^\tau dQ^\tau - pdq) \circ c',$$

o sea

$$(4.6) \quad dS^\tau = P^\tau dQ^\tau - pdq.$$

Supongamos que H_{pp} es invertible. La linealización Dg_t de g_t satisface la ecuación de variaciones

$$\frac{d}{dt}Dg^t = DX_H(g^t)Dg^t, \quad Dg^0 = I$$

donde

$$DX_H = \begin{pmatrix} H_{pq} & H_{pp} \\ -H_{qq} & -H_{qp} \end{pmatrix}, \quad Dg^t = \begin{pmatrix} Q_q^t & Q_p^t \\ P_q^t & P_p^t \end{pmatrix}.$$

Como

$$P_p^0 = I, \quad Q_p^0 = 0, \quad \frac{d}{dt}Q_p^t = H_{pp}P_p^t + H_{pq}Q_p^t,$$

para $|t|$ pequeño tenemos

$$Q_p^t = H_{pp}(I + O(t))t, \quad \det Q_p^t = \det H_{pp}(1 + O(t))t^n.$$

Definiendo $\psi_t(q, p) = (q, Q^t(q, p))$, tenemos que

$$D\psi_t = \begin{pmatrix} I & 0 \\ Q_q^t & Q_p^t \end{pmatrix}.$$

Por lo que ψ_t es localmente invertible para $0 < |t| < \varepsilon$. Notemos que

$$g^t \circ \psi_t^{-1}(q, Q) = (Q, P(q, Q, t)),$$

y definamos la función de acción en las variables (q, Q, t)

$$S(q, Q, t) = S^t(\psi_t^{-1}(q, Q)).$$

Por (4.6) tenemos

$$(4.7) \quad p = -\frac{\partial S}{\partial q}(\psi_t(q, p), t), \quad P = \frac{\partial S}{\partial Q}.$$

Se sigue de $S(\psi_t(q, p), t) = S^t(q, p)$ que

$$\frac{\partial S}{\partial t}(\psi_t(q, p), t) + \frac{\partial S}{\partial Q}(\psi_t(q, p), t) \frac{d}{dt}Q^t(q, p) = \frac{\partial S^t(x)}{\partial t}$$

que comparando con (4.5) da $\partial S / \partial t = -H(Q, P, t)$. Sustituyendo P de (4.7), tenemos que S satisface la ecuación de Hamilton - Jacobi

$$(4.8) \quad \frac{\partial S}{\partial t} + H\left(Q, \frac{\partial S}{\partial Q}, t\right) = 0.$$

5. El método de Hamilton - Jacobi. Funciones generatrices

La idea del método de Hamilton - Jacobi es la siguiente. Bajo una transformación canónica, la forma hamiltoniana de las ecuaciones de movimiento se preserva así como el hamiltoniano (Teorema 4.4). Si somos capaces de encontrar una transformación canónica tal que el nuevo sistema hamiltoniano puede integrarse, entonces habremos integrado el sistema hamiltoniano original. Resulta que el problema de construir tal transformación canónica se reduce a encontrar una cantidad suficientemente grande de soluciones de la ecuación de Hamilton - Jacobi. Sea $g = (Q, P) : U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ una transformación canónica donde U es una región simplemente conexa de \mathbb{R}^{2n} . Entonces existe $S : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$(4.9) \quad dS = PdQ - pdq$$

Decimos que la transformación canónica g es **libre** en (q_0, p_0) si hay una vecindad de (q_0, p_0) donde la transformación $\psi(q, p) = (q, Q(q, p))$ es invertible. Es decir, supongamos que

$$\det D\psi(q_0, p_0) = \det \frac{\partial Q}{\partial p}(q_0, p_0) \neq 0.$$

La función $S_1 = S \circ \psi^{-1}$ se llama **función generatriz** de la transformación canónica g . Se sigue de (4.9) que

$$(4.10) \quad p = -\frac{\partial S_1}{\partial q} \circ \psi(q, p), \quad P = \frac{\partial S_1}{\partial Q} \circ \psi$$

TEOREMA 4.8. *Sea S_1 una función real definida en la vecindad del punto $(q_0, Q_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Si $\det \frac{\partial^2 S_1}{\partial Q \partial q}(q_0, Q_0) \neq 0$, entonces S_1 es la función generatriz de una transformación libre en $(q_0, -\frac{\partial S_1}{\partial q}(q_0, Q_0))$.*

Demostración. Consideremos la transformación

$$G(q, Q) = (q, -\frac{\partial S_1}{\partial q}(q, Q)).$$

$$DG = \begin{bmatrix} I & 0 \\ * & \frac{\partial^2 S_1}{\partial Q \partial q} \end{bmatrix}.$$

Por el teorema de la función inversa, G es invertible en una vecindad de (q_0, Q_0) . Definiendo

$$f(q, Q) = (Q, \frac{\partial S_1}{\partial Q}(q, Q)), \quad g = f \circ G^{-1},$$

tenemos que

$$Dg = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \frac{\partial^2 S_1}{\partial Q \partial q} & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ * & -\left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial Q \partial q}\right)^{-1} \end{bmatrix} \circ G^{-1} = \begin{bmatrix} * & -\left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial Q \partial q}\right)^{-1} \\ * & * \end{bmatrix} \circ G^{-1}.$$

Así, g es libre en (p_0, q_0) y de las definiciones de G y f se sigue que las ecuaciones (4.10) se satisfacen con $\psi = G^{-1}$, por lo que S_1 es una función generatriz de g . \square

Si el hamiltoniano no depende de la coordenada p , o sea $H_p = 0$, entonces el sistema (4.1) resulta

$$\dot{q} = 0, \dot{p} = -H_q$$

y se integra inmediatamente

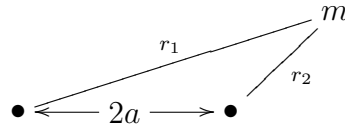
$$q(t) = q(0), p(t) = p(0) - \int_0^t H_q(q(0), s) ds.$$

Buscaremos una transformación canónica que transforma el hamiltoniano autónomo $H(q, p)$ en uno de la forma $K(Q)$. De hecho buscaremos una transformación libre con función generatriz S . De (4.10) obtenemos la condición

$$(4.11) \quad H\left(q, -\frac{\partial S}{\partial q}(q, Q)\right) = K(Q)$$

TEOREMA 4.9. (Jacobi) *Si se encuentra una solución $S(q, Q)$ de la ecuación (4.11) dependiendo de n parámetros Q_1, \dots, Q_n , y tal que $\det \frac{\partial^2 S}{\partial Q \partial q} \neq 0$, entonces el sistema (4.1) puede resolverse explícitamente por cuadraturas. Las funciones $Q_i(q, p), i = 1, \dots, n$ determinadas por $\frac{\partial S}{\partial q}(q, Q) = -p$, son primeras integrales del sistema.*

EJEMPLO 4.2. Problema de atracción con dos centros fijos. Considere el problema plano de atracción hacia dos puntos fijos de igual masa. Supongamos que la distancia entre los puntos fijos es $2a$ y que las distancias de una masa móvil hacia esos puntos son r_1 y r_2 .



Las coordenadas elípticas se definen como $\xi = r_1 + r_2$, $\eta = r_1 - r_2$.

Si las coordenadas cartesianas de los puntos fijos son $(-a, 0)$, $(a, 0)$ y las de la masa móvil son (x, y) entonces

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x+a)^2 + y^2, & r_2^2 &= (x-a)^2 + y^2 \\ \xi\eta &= r_1^2 - r_2^2 = (x+a)^2 + (x-a)^2 = 4ax \\ y^2 &= r_1^2 - (x+a)^2 = \frac{(\xi+\eta)^2}{4} - \left(\frac{\xi\eta}{4a} + a\right)^2 = -\frac{(\xi^2 - 4a^2)(\eta^2 - 4a^2)}{2^4 a^2} \\ \dot{x} &= \frac{\xi\dot{\eta} + \eta\dot{\xi}}{4a}, & y\dot{y} &= -\frac{\xi\dot{\xi}(\eta^2 - 4a^2) + \eta\dot{\eta}(\xi^2 - 4a^2)}{2^4 a^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= \frac{\xi^2\eta^2 + 2\xi\dot{\xi}\dot{\eta}\eta + \dot{\eta}^2\xi^2}{2^4 a^2} \\ &- \frac{\xi^2\dot{\xi}^2(\eta^2 - 4a^2)^2 + 2\xi\dot{\xi}\dot{\eta}\eta(\eta^2 - 4a^2)(\xi^2 - 4a^2) + \dot{\eta}^2\eta^2(\xi^2 - 4a^2)^2}{2^4 a^2(\xi^2 - 4a^2)(\eta^2 - 4a^2)} \\ &= \frac{\xi^2\eta^2 + \dot{\eta}^2\xi^2}{2^4 a^2} - \frac{\xi^2\dot{\xi}^2(\eta^2 - 4a^2)}{2^4 a^2(\xi^2 - 4a^2)} - \frac{\eta^2\dot{\eta}^2(\xi^2 - 4a^2)}{2^4 a^2(\eta^2 - 4a^2)} \\ &= \frac{\xi^2 - \eta^2}{4(\xi^2 - 4a^2)}\dot{\xi}^2 + \frac{\eta^2 - \xi^2}{4(\eta^2 - 4a^2)}\dot{\eta}^2. \end{aligned}$$

Por comodidad suponemos que los centros fijos tienen masa unitaria

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{k}{r_1} + \frac{k}{r_2} = \frac{\xi^2 - \eta^2}{8(\xi^2 - 4a^2)}\dot{\xi}^2 + \frac{\eta^2 - \xi^2}{8(\eta^2 - 4a^2)}\dot{\eta}^2 + \frac{4k\xi}{\xi^2 - \eta^2} \\ p_\xi &= L_{\dot{\xi}} = \frac{\xi^2 - \eta^2}{4(\xi^2 - 4a^2)}\dot{\xi}, & p_\eta &= L_{\dot{\eta}} = \frac{\eta^2 - \xi^2}{8(\eta^2 - 4a^2)}\dot{\eta} \\ H &= p_\xi\dot{\xi} + p_\eta\dot{\eta} - L = 2p_\xi^2\frac{\xi^2 - 4a^2}{\xi^2 - \eta^2} + 2p_\eta^2\frac{4a^2 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2} - \frac{4k\xi}{\xi^2 - \eta^2} \end{aligned}$$

La ecuación de Hamilton-Jacobi (4.11)

$$H\left(\xi, \eta, -\frac{\partial S}{\partial \xi}, -\frac{\partial S}{\partial \eta}\right) = K$$

Puede escribirse

$$2\frac{\partial S^2}{\partial \xi}(\xi^2 - 4a^2) + 2\frac{\partial S^2}{\partial \eta}(4a^2 - \eta^2) - 4k\xi = K(\xi^2 - \eta^2)$$

y por lo tanto podemos separar variables, haciendo $K = 2c_2$ y

$$\frac{\partial S^2}{\partial \xi}(\xi^2 - 4a^2) - 2k\xi - c_2\xi^2 = c_1$$

$$\frac{\partial S^2}{\partial \eta}(4a^2 - \eta^2) + c_2\eta^2 = -c_1.$$

Que podemos integrar como

$$S(\xi, \eta, c_1, c_2) = \int \sqrt{\frac{c_1 + c_2 + 2k\xi}{\xi^2 - 4a^2}} d\xi + \int \sqrt{\frac{-c_1 - c_2\eta^2}{4a^2 - \eta^2}} d\eta.$$

Teoría de Aubry-Mather

1. Transformaciones twist del anillo

En este capítulo consideraremos transformaciones del anillo $\mathbb{A} = \mathbb{S}^1 \times [a, b]$ donde $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Más generalmente, dadas funciones continuas $u_{\pm} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ podríamos pensar que

$$\mathbb{A} = \{(p, z) : u_-(z) \leq p \leq u_+(z)\}.$$

Tenemos la transformación $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $\exp(q) = e^{2\pi i q}$ y denotando por \mathcal{A} la banda $\mathbb{R} \times [a, b]$, la transformación cubriente

$$\text{proj} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{A}, \text{proj}(q, p) = (\exp(q), p).$$

Dada una transformación continua $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ hay una transformación continua $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, llamada levantamiento de f tal que

$$(5.1) \quad f \circ \text{proj} = \text{proj} \circ F.$$

Se sigue de (5.1) que $F(q+1, p) = F(q, p) + (n, 0)$ con n entero, el cual es independiente de (q, p) por la continuidad de F . Si G es otro levantamiento de f se sigue de (5.1) que $G(q, p) = F(q, p) + (m, 0)$ con m entero, que por la continuidad de F y G no depende de (q, p) . Por consiguiente el número n no depende del levantamiento y se conoce como el grado $\deg f$ de f . Nosotros supondremos que f es un difeomorfismo que preserva la orientación y por lo tanto $\deg f = 1$, o sea que para cualquier levantamiento F de f , $F(q+1, p) = F(q, p) + (1, 0)$. Es decir que si $T(q, p) = (q+1, p)$ entonces $F \circ T = T \circ F$.

DEFINICIÓN 5.1. Sea $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, $F = (Q, P)$ un difeomorfismo que satisface

1. F preserva las fronteras de \mathcal{A} : $P(q, a) = a$, $P(q, b) = b$.
2. F es canónica, o sea $dP \wedge dQ = dp \wedge dq$, o bien $\det DF = 1$.
3. La función $p \rightarrow Q(q_0, p)$ es monótona para cada $q_0 \in \mathbb{R}$.
4. $F \circ T = T \circ F$.

Entonces F define una transformación **twist** $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$.

La condición 3 en la definición 5.1 se puede escribir como $\frac{\partial Q}{\partial p} \neq 0$.

Si esta derivada es positiva (negativa) decimos que f es una transformación twist positiva (negativa). Como vimos en la sección 4 del Capítulo 4, esta forma de la condición 3 implica que la transformación $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\psi(q, p) = (q, Q(q, p))$ es un difeomorfismo local, y por la condición 3 misma tenemos que ψ es un encaje.

OBSERVACIÓN 5.1. Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación canónica tal que $F \circ T = T \circ F$. Existe $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $dS = PdQ - pdq$.

La definición de T dice que $p \circ T = p$, $q \circ T = q + 1$ y la condición 4 en la definición 5.1 significa que $P \circ T = P$ y $Q \circ T = Q + 1$. Así

$$d(S \circ T) = P \circ T d(Q \circ T) - p \circ T d(q \circ T) = PdQ - pdq = dS$$

y entonces $S \circ T - S$ es una constante que denotamos por flux F . Sea $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva tal que $\beta(1) = T(\beta(0))$ de tal forma que $\text{proj} \circ \beta$ es una curva en el cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ que recorre una vez \mathbb{S}^1 . Entonces

$$\text{flux } F = S(\beta(1)) - S(\beta(0)) = \int_{\beta} PdQ - pdq = \int_{F(\beta)} pdq - \int pdq.$$

Así, flux F es el área neta, limitada por $\text{proj} \circ \beta$ y su imagen bajo f , del cilindro definida por F .

Si F preserva las curvas frontera de algún anillo entonces flux $F = 0$.

En virtud de esta observación damos la siguiente

DEFINICIÓN 5.2. Sea $F = (Q, P)$ un difeomorfismo de \mathbb{R}^2 tal que

1. F es isotópico a la identidad.
2. $\psi : (q, p) \mapsto (q, Q(q, p))$ es un difeomorfismo de \mathbb{R}^2 .
3. Existe $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $d(S \circ \psi) = PdQ - pdq$ y

$$S(q + 1, Q + 1) = S(q, Q).$$

Entonces F define una transformación **twist monótona** f del cilindro con función **generatriz** S .

EJEMPLO 5.1. Consideremos la dinámica de una bola en una mesa de billar con frontera convexa \mathcal{C} . El movimiento está sujeto a leyes simples: entre rebotes sucesivos la bola viaja en línea recta y en un rebote los ángulos de incidencia y reflexión son iguales. Sea x la longitud de arco con respecto a un punto fijo en la frontera, que supondremos orientada en el sentido antihorario. Sea θ el ángulo de reflexión en un punto de rebote $C(x) \in \mathcal{C}$ y sea $y = -\cos \theta$. Debido a la convexidad de \mathcal{C} , el par (x, y) determina su sucesor (X, Y) y viceversa. Si incrementamos y manteniendo x fijo, la convexidad de \mathcal{C} implica que

$C(X)$ se mueve sobre \mathcal{C} en la dirección positiva. O sea $\frac{\partial X}{\partial y} > 0$. Sea $S(x, X) = -\|C(X) - C(x)\|$ entonces, ya que $C'(x)$ es un vector tangente unitario,

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x} &= \frac{C'(x) \cdot (C(X) - C(x))}{S(x, X)} = -y \\ \frac{\partial S}{\partial X} &= \frac{C'(X) \cdot (C(X) - C(x))}{-S(x, X)} = Y \end{aligned}$$

por lo que

$$(5.3) \quad YdX - ydx = dS(x, X).$$

2. Un principio variacional

Una transformación twist da lugar a un sistema dinámico, cuyas órbitas están dadas por las imágenes de puntos (z, p) bajo iteraciones sucesivas de f .

LEMA 5.1. *Supongamos que $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^2$ define una transformación twist monótona del anillo o el cilindro y sea S su función generatriz. Entonces hay una correspondencia biunívoca entre órbitas $\{(z_k, p_k) = f^k(z_0, p_0) : k \in \mathbb{Z}\}$ y sucesiones $\{q_k : k \in \mathbb{Z}\}$ que satisfacen*

$$(5.4) \quad \partial_1 S(q_k, q_{k+1}) + \partial_2 S(q_{k-1}, q_k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

estando la correspondencia dada por $z_k = \exp(q_k)$, $p_k = -\partial_1 S(q_k, q_{k+1})$.

Demostración. Si $\{(z_k, p_k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es una órbita de f , escojamos q_0 tal que $\exp(q_0) = z_0$ y $\forall k \in \mathbb{Z}$ definamos q_k por $(q_k, p_k) = F^k(q_0, p_0)$. Entonces $(q_k, p_k) = F(q_{k-1}, p_{k-1}) \forall k \in \mathbb{Z}$ y de $d(S \circ \psi) = PdQ - pdq$ tenemos

$$p_k = -\partial_1 S(q_k, q_{k+1}) = \partial_2 S(q_{k-1}, q_k).$$

Recíprocamente si $\{q_k : k \in \mathbb{Z}\}$ satisface (5.4), hagamos $p_k = -\partial_1 S(q_k, q_{k+1}) \forall k \in \mathbb{Z}$ y así $(q_k, p_k) = \psi^{-1}(q_k, q_{k+1})$. De $d(S \circ \psi) = PdQ - pdq$ y (5.4) tenemos

$$\begin{aligned} F(q_{k-1}, p_{k-1}) &= F \circ \psi^{-1}(q_{k-1}, q_k) = (q_k, \partial_2 S(q_{k-1}, q_k)) \\ &= (q_k, -\partial_1 S(q_k, q_{k+1})) = (q_k, p_k) \end{aligned}$$

□

Las ecuaciones (5.4) pueden interpretarse como la “ecuaciones de Euler - Lagrange discretas” para una cierta función de acción. En realidad a un segmento dado de puntos (q_N, \dots, q_M) podemos asociarle su

acción definida por

$$W(q_N, \dots, q_M) = \sum_{k=N}^{M-1} S(q_k, q_{k+1})$$

Siguiendo la analogía, la “transformación de Legendre discreta” esta dada por la inversa $(q, Q) \mapsto (q, -\partial_1 S(q, Q))$ de ψ . Definiendo

$$V(q_N, p_N, \dots, q_M, p_{M-1}) = \sum_{k=N}^{M-1} p_k(q_{k+1} - q_k) - S(q_k, q_{k+1}),$$

tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial p_k} &= q_{k+1} - q_k, \quad N \leq k < M \\ \frac{\partial V}{\partial q_k} &= p_{k-1} - p_k - \partial_1 S(q_k, q_{k+1}) - \partial_2 S(q_{k-1}, q_k), \quad N < k < M. \end{aligned}$$

Por lo tanto las ecuaciones (5.4) son equivalentes a las “ecuaciones de Hamilton discretas”

$$(5.5) \quad \begin{aligned} q_{k+1} - q_k &= \frac{\partial V}{\partial p_k} \\ p_k - p_{k+1} &= \frac{\partial V}{\partial q_{k+1}}. \end{aligned}$$

COROLARIO 5.1. *El segmento (q_N, \dots, q_M) es la proyección al eje horizontal de un segmento de órbita de F si y sólo si es un punto crítico de la restricción \tilde{W} de W al conjunto de segmentos (x_N, \dots, x_M) con puntos fijos $x_N = q_N, x_M = q_M$.*

Demostración. Dada (q_N, \dots, q_M) definamos

$$p_k = -\partial_1 S(q_k, q_{k+1}), \quad P_k = \partial_2 S(q_{k-1}, q_k)$$

de tal forma que $F(q_k, p_k) = (q_{k+1}, P_{k+1})$. Entonces

$$d\tilde{W}(q_N, \dots, q_M) = \sum_{k=N+1}^{M-1} (P_k - p_k) dq_k$$

Así (q_N, \dots, q_M) es un punto crítico de \tilde{W} si y sólo si $P_k = p_k$ que es otra manera de expresar (5.4) o sea que $((q_N, p_N), \dots, (q_M, p_M))$ es un segmento de órbita de F . \square

Si existen $m, n \in \mathbb{N}$ tales que la órbita $\{(q_k, p_k) : k \in \mathbb{Z}\}$ de F satisface

$$(5.6) \quad q_{k+n} = q_k + m$$

es decir $F^n(q_k, p_k) = T^m(q_k, p_k)$, entonces $f^n(\text{proj}(q_k, p_k)) = \text{proj}(q_k, p_k)$, o sea que la órbita $\{\text{proj}(q_k, p_k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es periódica. Diremos que una sucesión $\{q_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es de tipo (m, n) si satisface (5.6) y denotaremos por X_{mn} al conjunto de ellas. Podemos identificar a X_{mn} con el subespacio afín de \mathbb{R}^{n+1} dado por la ecuación $q_{n+1} = q_1 + m$. Una órbita de F , cuya proyección en el eje q es una sucesión de tipo (m, n) se llamará (m, n) órbita. Después de n iteraciones de F una (m, n) órbita ha sido trasladada un entero m en la dirección q . En el anillo, podemos interpretar esto diciendo que después de n iteraciones de f , la órbita ha dado m vueltas.

PROPOSICIÓN 5.1. *Una sucesión de tipo (m, n) es la proyección de una (m, n) órbita si y sólo si es un punto crítico de $W_{mn} : X_{mn} \rightarrow \mathbb{R}$*

$$W_{mn}(q_1, \dots, q_n) = S(q_n, q_1 + m) + \sum_{k=1}^{n-1} S(q_k, q_{k+1})$$

DEFINICIÓN 5.3. Sea $\{(q_k, p_k) : k \in \mathbb{Z}\}$ una órbita de F . En caso de existir, el límite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k}{k}$$

se llama **número de rotación** de la órbita.

Obviamente una (m, n) órbita tiene número de rotación m/n .

3. El teorema de Aubry - Mather

Si $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es el levantamiento de un homeomorfismo de la circunferencia que preserva orientación, entonces es estrictamente creciente y $G(q+1) = G(q) + 1$. Así, si $\{q_k : k \in \mathbb{Z}\}$ es una órbita de G , debe satisfacer que

$$(5.7) \quad \forall k, j, m \in \mathbb{Z} \quad x_k \leq x_j + m \Rightarrow x_{k+1} \leq x_{j+1} + m.$$

Decimos que una sucesión de números reales $\{q_k : k \in \mathbb{Z}\}$ está **ordenada ciclicamente** si satisface (5.7). Claramente, el conjunto de sucesiones ordenadas ciclicamente, es un cerrado para la topología de la convergencia puntual en el conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$. El orden parcial en sucesiones de reales da tres tipos de estricticidad

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \leq \mathbf{q} &\iff x_k \leq q_k \forall k \in \mathbb{Z} \\ \mathbf{x} < \mathbf{q} &\iff \mathbf{x} \leq \mathbf{q} \wedge \mathbf{x} \neq \mathbf{q} \\ \mathbf{x} \prec \mathbf{q} &\iff x_k < q_k \forall k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Definiendo $\tau_{mn} : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ por $(\tau_{mn}\mathbf{x})_k = x_{k+n} + m$, la condición (5.7) es equivalente a

$$\forall j, m \in \mathbb{Z} \quad \tau_{jm}\mathbf{x} \leq \mathbf{x} \quad \text{ó} \quad \mathbf{x} \leq \tau_{jm}\mathbf{x}.$$

Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ el levantamiento de una transformación twist f del cilindro con función generatriz S . Un segmento (q_N, \dots, q_M) es **minimizante** (de la acción) si

$$W((q_N, \dots, q_M) \leq W(x_N, \dots, x_M)$$

para cualquier otro segmento (x_N, \dots, x_M) con los mismos puntos fijos $x_N = q_N, x_M = q_M$. Ya que segmentos minimizantes son puntos críticos de W , ellos corresponden a segmentos de órbita llamados **segmentos de órbita minimizantes**. Una sucesión $\{q_k : k \in \mathbb{Z}\}$ se llama **minimizante** (global de la acción) si todos sus segmentos son minimizantes. La órbita correspondiente se llama **minimizante**. El conjunto de minimizantes es un cerrado para la topología de la convergencia puntual.

TEOREMA 5.2. Aubry-Mather.

Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ el levantamiento de una transformación twist C^2 del cilindro con función generatriz S que satisface

$$(5.8) \quad \lim_{|Q-q| \rightarrow \infty} S(q, Q) = \infty.$$

Entonces F tiene órbitas de todos los números de rotación. De hecho, podemos escoger estas órbitas $\{(q_k, p_k) : k \in \mathbb{Z}\}$ de tal forma que

1. La sucesión $\{q_k : k \in \mathbb{Z}\}$ esta ordenada ciclicamente y es un minimizante global de la acción.
2. Ellas yacen en conjuntos cerrados Λ invariantes bajo F , llamados conjuntos de Aubry-Mather, los cuales son gráficas Lipschitz sobre su proyección π en la recta $p = 0$, con constante de Lipschitz que depende solo de $a = \inf_{\Lambda} \frac{\partial Q}{\partial p}$.
3. Todas las órbitas en Λ están ordenadas ciclicamente y tienen el mismo número de rotación.
4. La proyección π es un conjunto invariante del levantamiento G de un homeomorfismo de la circunferencia y por lo tanto $F|_{\Lambda}$ es conjugado a $G|_{\pi}$.

LEMA 5.2. Sea $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ una transformación twist $C^k, k \geq 2$ del anillo compacto. Entonces f puede extenderse a una transformación twist C^k del cilindro, de tal forma que coincide con la transformación $\text{proj}(q, p) \mapsto \text{proj}(q + cp, p)$ afuera de un compacto. En particular satisface la condición (5.8)

TEOREMA 5.3. Aubry-Mather para el anillo.

Sea F el levantamiento de una transformación twist del anillo y sean ρ_-, ρ_+ los números de rotación de las restricciones a las fronteras inferior y superior respectivamente. Entonces F tiene órbitas con cualquier número de rotación en $[\rho_-, \rho_+]$. Esas órbitas son minimizantes, recurrentes, están ordenadas ciclicamente y yacen en conjuntos invariantes compactos que forman gráficas Lipschitz. Esos conjuntos pueden ser órbitas periódicas, circunferencias invariantes o conjuntos de Cantor sobre los cuales la transformación es semiconjugada a rotaciones irracionales.

Esquema de la demostración. Minimizando W_{mn} , encontramos órbitas periódicas para todos los números racionales de rotación. El lema fundamental de Aubry 5.5 implica que los minimizantes de W_{mn} están ordenados ciclicamente, es decir, están ordenados como órbitas de homeomorfismos de la circunferencia. Como el conjunto de sucesiones ordenadas ciclicamente es cerrado, al tomar límites de sucesiones de órbitas periódicas, obtenemos otras órbitas ordenadas ciclicamente. El número de rotación de estas órbitas límite existe de acuerdo al siguiente lema.

LEMA 5.3. Supongamos que $\{q_k : k \in \mathbb{Z}\}$ está ordenada ciclicamente, entonces $\rho(\mathbf{q}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{q_k}{k}$ existe y de hecho

$$|q_k - q_0 - k\rho(\mathbf{q})| \leq 1.$$

Una sucesión $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ es una función $\mathbf{q} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$. Podemos interpolar esta función para obtener una función afín a trozos. La gráfica de esta función se conoce como el **diagrama de Aubry** de la sucesión. Decimos que dos sucesiones \mathbf{q}, \mathbf{x} se cruzan si sus correspondientes diagramas de Aubry lo hacen. El cruce puede darse en un entero k en cuyo caso $(q_{k-1} - x_{k-1})(q_{k+1} - x_{k+1}) < 0$ ó en un número no entero $t \in (k, k+1)$ en cuyo caso $(q_k - x_k)(q_{k+1} - x_{k+1}) < 0$. Observe que \mathbf{q} y \mathbf{x} nunca se cruzan si y sólo si $\mathbf{q} \leq \mathbf{x}$ ó $\mathbf{x} \leq \mathbf{q}$ y que por lo tanto una sucesión \mathbf{q} es ordenada ciclicamente si y sólo si no se cruza con ninguno de sus trasladados $\tau_{mn}\mathbf{q}$.

LEMA 5.4. Supongamos que $(q - x)(Q - X) \leq 0$. Entonces

$$S(q, Q) + S(x, X) - S(q, X) - S(x, Q) \geq 0,$$

y la igualdad se da si y sólo si $(q - x)(Q - X) = 0$.

LEMA 5.5. (Fundamental de Aubry) Dos minimizantes distintos se pueden cruzar sólo una vez.

COROLARIO 5.4. *Los minimizantes de W_{mn} están ordenados cíclicamente y el conjunto de sus trasladados está completamente ordenado respecto al orden parcial en \mathbb{R}^Z .*

PROPOSICIÓN 5.2. *Los minimizantes de W_{mn} son minimizantes globales.*

PROPOSICIÓN 5.3. *Sea F el levantamiento de una transformación twist del cilindro con función generatriz satisfaciendo (5.8). Entonces W_{mn} tiene un mínimo para todo par m, n .*

Bibliografía

- [AM] R. Abraham & J. Marsden *Foundations of Mechanics*. Perseus.
- [Ar] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics Vol. 60, Spinger. New York 1989.
- [Be] R. Berndt *An Introduction to Symplectic Geometry*. Graduate Studies in Mathematics Vol. 26 AMS
- [Go] C. Golé *Symplectic Twist Maps*. Advanced Series in nonlinear dynamics Vol. 18. World Scientific
- [McDS] D. Mc Duff & D. Salamon *Introduction to Symplectic Topology* . Oxford University Press.
- [Sp] M. Spivak. *Calculo en Variedades*. Reverté.