FUNCIONES ZETA DINÁMICAS

HÉCTOR SÁNCHEZ MORGADO

1. Funciones zeta dinámicas

X espacio métrico, $T : X \hookleftarrow$ continua tal que $\#\mathrm{Fix}(T^n) < \infty\ \forall n$. La función zeta de Artin-Mazur es la serie formal

$$\zeta(z) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \#\mathrm{Fix}(T^n) z^n/n$$

Problemas básicos.

1. Construir continuación analítica "óptima".
2. Investigar el significado de los ceros, polos y valores especiales.

Ejemplo 1. Sea A matriz $k \times k$ de ceros y unos. A se llama aperiódica si $\exists_{m>0} \forall_{i,j} A^m_{ij} > 0$. Consideremos el espacio

$$X_A = \{x = (x_i) \in \{1, \dots, k\}^{\mathbb{Z}} : A_{x_i x_{i+1}} = 1\, \forall i\}.$$

con la métrica ($0 < \theta < 1$)

$$d_\theta(x, y) = \begin{cases} \theta^{-N} & \text{si} \quad N = \min\{|n| : x_n \neq y_n\} \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases}.$$

El *corrimiento* $\sigma : X_A \hookleftarrow$ se define por $\sigma(x)_i = x_{i+1}$. Remplazando $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{N} \cup \{0\}$ se definen (X_A^+, d_θ^+) y σ^+.

Se tiene que $\#\mathrm{Fix}(\sigma^n) = \mathrm{Tr}\, A^n$ y así

$$\zeta(z) = \det(I - zA)^{-1}.$$

Volviendo al caso general, cada punto $x \in \mathrm{Fix}(T^n)$ pertenece a la órbita periódica $\gamma = \{x, Tx, \dots, T^{n-1}x\}$ y $l_\gamma = \#\gamma$ es el período mínimo de cualquier $y \in \gamma$. Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de órbitas periódicas, entonces $\zeta(z) = \prod_{\gamma \in \mathcal{P}} (1 - z^{l_\gamma})^{-1}$.

Definición 1. Sea $\varphi_t : M \hookleftarrow$ un flujo tal que el conjunto de órbitas periódicas $\mathcal{P}$ es a lo más numerable. La funcion zeta de Ruelle es el producto formal $R_\varphi(s) = \prod_{\gamma \in \mathcal{P}} (1 - e^{-s l_\gamma})^{-1}$.

Comparese con la función zeta de Riemann $\zeta(s) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-s})^{-1}$ donde $\{p_n\}$ es la sucesión de primos.

Para Γ un subgrupo discreto cocompacto de PSL(2,$\mathbb{R}$), Selberg definió la función zeta

$$S(z) = \prod_{k=0}^{\infty} \prod_{[\gamma]\in P_\Gamma} 1 - e^{-(z+k)l\gamma}$$

donde P_Γ es el conjunto de clases de conjugación de elementos primitivos de Γ. Smale extiendió la definición de Selberg para flujos como en la Definición 1. Se tiene que $R_\varphi(z) = S_\varphi(z)/S_\varphi(z+1)$.

Ejemplo 2. Sean $T : X \hookleftarrow$ homeomorfismo, $r : X \to \mathbb{R}^+$ continua. Sea $X^r = \{(x,\tau) : x \in X, 0 \le \tau \le r(x)\}/\sim$ donde $(x, r(x)) \sim (Tx, 0)$. El flujo *suspensión* ϕ esta dado por $\phi_t[x,\tau] = [x, \tau + t]$. Poniendo $r^n(x) = r(x) + r(Tx) + \cdots + r(T^{n-1}x)$, tenemos

$$R_\phi(s) = \zeta_r^*(s) := \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{x\in \mathrm{Fix}(T^n)} e^{-sr^n(x)}.$$

Observe que $\zeta_1^*(s) = \zeta(e^{-s})$.

Definición 2. Sea $\varphi_t : M \hookleftarrow$ flujo suave generado por el campo vectorial Y. Un conjunto compacto invariante sin puntos de equilibrio Λ se llama *hiperbólico* si $T_\Lambda M$ se descompone continuamente como $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u \oplus E^c$ donde $E^c = \mathbb{R}\,Y$, E^u, E^s son $D\varphi$-invariantes y $||D\varphi_t|E^s||$, $||D\varphi_{-t}|E^u||$ convergen exponencialmente a 0 cuando $t \to \infty$. Un conjunto hiperbólico Λ se llama *básico* si

- Λ contiene una órbita densa
- Las órbitas periódicas forman un conjunto denso en Λ
- Λ es *aislado*, o sea, $\exists U$ vecindad de Λ tal que $\Lambda = \bigcap_{t\in\mathbb{R}} \varphi_t U$.

Fried ha realizado un estudio sistemático de diversas funciones zeta para flujos, siendo el escenario general el siguiente. Sea Λ un conjunto hiperbólico, aislado para el flujo φ en una variedad M. Sea ξ un haz vectorial complejo sobre Λ, sea $\psi_t : \xi \to \xi$ un levantamiento de $\varphi_t|\Lambda$. Si ψ es suficientemente contractivo usamos la traza $\chi_\gamma(\psi)$ de la holonomia de ψ y la linealización $\mathbb{P}_\gamma$ de la transformación de Poincaré a lo largo de cualquier órbita periódica γ para definir la función zeta

$$\zeta(\psi) = \exp - \sum_\gamma \frac{1}{\mu(\gamma)} \frac{\chi_\gamma(\psi)}{|\det(I - \mathbb{P}_\gamma)|}. \tag{1}$$

2. Dinámica simbólica

Si Λ es un conjunto básico, via particiones de Markov, $\varphi_t|\Lambda$ puede modelarse por la suspensión $\phi_t : X_A^r \hookleftarrow$ de un corrimiento $\sigma : X_A \hookleftarrow$

con A aperiódica. De hecho existe $\pi : X_A^r \to \Lambda$ Lipschitz y suprayectiva tal que $\varphi_t \pi = \pi \phi_t$. La falta de inyectividad de π se debe a las órbitas que cruzan las fronteras de los rectangulos de la partición. Para evitar el sobreconteo de órbitas periódicas que cruzan la frontera, Manning y Bowen idearon argumentos combinatorios utilizando corrimientos auxiliares.

Sea F_θ el espacio de Banach de funciones Lipschitz $f : (X_A, d_\theta) \to \mathbb{C}$ con $\|f\|_\theta = \|f\|_\infty + |f|_\theta$ donde $|f|_\theta = \mathrm{Lip}(f)$. Definimos similarmente el espacio F_θ^+.

Definición 3. Dos funciones $f, g \in F_\theta$ se llaman *cohomologas* y escribimos $f \sim g$, si $\exists\ h \in C(X_A)$ tal que $f = g + h \circ \sigma - h$.

Proposición 1. *Si $f \in F_\theta$ entonces existen $g, h \in F_{\sqrt{\theta}}$ tales que $f = g + h - h \circ \sigma$ y $g(x) = g(y)$ siempre que $x_n = y_n$ para $n \geq 0$. O sea que g depende solo de las coordenadas en el "futuro".*

Demostración. Para cada $j \in [k]$ escojamos una sucesión del "pasado" $z(j) = (z_n(j))_{n \leq 0}$ con $A_{z_n(1) z_{n+1}(j)} = 1$, $z_0(j) = j$. Para cada $x \in X_A$ definamos $\varphi(x)$ mediante

$$\varphi(x)_n = \begin{cases} x_n & \text{si} \quad n \geq 0 \\ z_n(x_0) & \text{si} \quad n \leq 0 \end{cases}.$$

Definamos $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(\sigma^n(x)) - f(\sigma^n \varphi(x))$. La serie converge ya que

$$|f(\sigma^n(x)) - f(\sigma^n \varphi(x)| \leq \|f\|_\theta\, \theta^n.$$

$$\begin{aligned} h(x) - h(\sigma x) &= \sum_{n \geq 0} f(\sigma^n(x)) - f(\sigma^n \varphi(x)) - f(\sigma^{n+1} x) - f(\sigma^n \varphi \sigma(x)) \\ &= f(x) - \left[f(\varphi(x)) + \sum_{n \geq 0} f(\sigma^{n+1} \varphi(x)) - f(\sigma^n \varphi \sigma(x)) \right] \\ &:= f(x) - g(x) \end{aligned}$$

obviamente g depende solo del futuro. Probando que $h \in F_{\sqrt{\theta}}$, tenemos que $g \in F_{\sqrt{\theta}}$.

Sean $x, y \in X_A$ tales que $x_i = y_i$ para $|i| < 2N$, entonces

$$|f(\sigma^n x) - f(\sigma^n y)|, |f(\sigma^n \varphi x) - f(\sigma^n \varphi y)| \leq |f|_\theta\, \theta^{2N-n}$$

para $0 \leq n \leq N$. Si $n \geq 0$

$$|f(\sigma^n x) - f(\sigma^n \varphi x)|, |f(\sigma^n y) - f(\sigma^n \varphi y)| \leq |f|_\theta \theta^n.$$

Así

$$
\begin{aligned}
|h(x)-h(y)| &\le 2|f|_\theta \sum_{h=0}^{N} \theta^{2N-n} + 2|f|_\theta \sum_{n\ge N+1} \theta^n \\
&= 2|f|_\theta\, \theta^N \left[\frac{1-\theta^{N+1}}{1-\theta} + \frac{\theta}{1-\theta}\right] \le 4|f|_\theta \frac{\theta^N}{1-\theta}
\end{aligned}
$$

□

La Proposición 1 define una transformación continua $W : F_\theta \to F_{\sqrt{\theta}}$ dada por $W(f) = g$. Más aún, si d_θ^+ denota la métrica en X_θ^+ análoga a d_θ, $W(f)$ puede identificarse con un elemento de $F_{\sqrt{\theta}}^+$.

Cuando $f \in F_\theta$ depende unicamente del futuro $W(f) = f$. El corrimiento $\sigma : X_A \hookleftarrow$ $(\sigma : X_A^+ \hookleftarrow)$ induce un operador $\sigma^* : F_\theta \to F_\theta$ $(\sigma^* : F_\theta^+ \to F_\theta^+)$ definido por $\sigma^* f = f \circ \sigma$.

Definición 4. Operador de Perron-Frobenius-Ruelle

Para $f \in F_\theta^+$ definimos $L_f : F_\theta^+ \to F_\theta^+$ mediante

$$L_f W(x) = \sum_{\sigma y = x} \exp\circ f(y)\, W(y).$$

L_f es un operador lineal acotado. Cuando f es real y $L_f 1 = 1$ decimos que L_f está normalizado

Desigualdad básica. *Sea $f = u + iv \in F_\theta^+$. Si L_u está normalizado entonces $\exists C > 0$ tal que*

$$|L_f^n W|_\theta \le C\, \|W\|_\infty + \theta^n\, |W|_\theta$$

para todo $W \in F_\theta^+$, $n \ge 0$.

Demostración Primero demostraremos que $\exists C_0 > 0$ tal que

$$|L_f W|_\theta \le C_0\, \|W\|_\infty + \theta |W|_\theta$$

Para $x \in X_A^+$, $i \in [k]$ tal que $A_{ix_0} = 1$ definimos $ix \in X_A^+$ mediante $(ix)_0 = i$, $(ix)_{n+1} = x_n$ para $n \ge 0$. Si $x, y \in X_A^+$, $x_0 = y_0$, entonces $d_\theta^+(ix, iy) \le \theta d_\theta^+(x, y)$ y así

$$
\begin{aligned}
&|L_f W(x) - L_f W(y)| \le \sum_{Aix_0=1} |e^{f(ix)} W(ix) - e^{f(iy)} W(iy)| \\
&\le \sum_{Aix_0=1} |e^{f(ix)} - e^{f(iy)}||W(ix)| + \sum_{Aix_0=1} e^{u(iy)} |W(ix) - W(iy)| \\
&\qquad \le k|\exp\circ f|_\theta\, \theta\, d_\theta^+(x,y)\, \|W\|_\infty + \theta\, d_\theta^+(x,y)
\end{aligned}
$$

Procediendo por inducción supongamos $|L_f^n W|_\theta \leq C_{n-1}\left\|W\right\|_\infty + \theta^n |W|_\theta$. Entonces

$$\begin{aligned} |L_f^{n+1} W|_\theta &\leq C_{n-1}\left\|L_f W\right\|_\infty + \theta^n |L_f W|_\theta \\ &\leq C_{n-1}\left\|W\right\|_\infty + \theta^n (C_0 \left\|W\right\|_\infty \theta |W|_\theta) \\ &\leq (C_{n-1} + \theta^n C_0)\left\|W\right\|_\infty + \theta^{n+1}|W|_\theta \end{aligned}$$

$$C_{n-1} + \theta^n C_0 = \sum_{k=1}^{n} \theta^k C_0 = \frac{1-\theta^{n-1}}{1-\theta} C_0 \leq \frac{C_0}{1-\theta}.$$

□

Teorema 1. *Sean A aperiódica y $f \in F_\theta^+$ con $f(X_A^+) \subset \mathbb{R}$, entonces*

(1) *$\exists\, \lambda$ eigenvalor maximal positivo simple de $L_f : C(X_A^+) \to C(X_A^+)$, con eigenfunción estrictamente positiva $h \in F_\theta^+$*
(2) *El resto del espectro de $L_f : F_\theta^+ \to F_\theta^+$ está contenido en un disco de radio $R < \lambda$.*
(3) *$\exists!\ \mu \in \mathcal{M}(X_A^+)$ tal que $L_f^* \mu = \lambda \mu$. O sea que μ es una probabilidad tal que*
$$\int L_f v \, d\mu = \lambda \int v d\mu$$
para toda $v \in C(X_A^+)$.
(4) *Si h es como en (1) y tal que $\int h d\mu = 1$ entonces*
$$\lim_{n\to\infty} \lambda^{-n} L_f^n(v) = h \int v d\mu$$
para toda $v \in C(X_A^+)$
(5) *Si h es como en (4), $m = h\mu$ es σ-invariante.*

Demostración. Sea

$$\Omega = \left\{ g \in C(X_A^+, [0,1]) : g(x) \leq g(y) \exp\left(\frac{|f|_\theta\, \theta^n}{1-\theta}\right) \mathrm{si}\, d_\theta(x,y) < \theta^n \right\}.$$

Es fácil ver que Ω es convexo y cerrado bajo límites uniformes. Si $x, y \in X_A^+\ \ x_i = y_i\ \ |i| \leq n$,

$$|g(x) - g(y)| \leq g(y)(\exp\left(\frac{|f|_\theta\, \theta^n}{1-\theta}\right) - 1) \leq \|g\|_\infty \frac{|f|_\theta\, \theta^n}{1-\theta}\ \exp\left(\frac{|f|_\theta\, \theta^n}{1-\theta}\right).$$

Así, $\Omega \subset F_\theta^+$ y Ω es una familia equicontinua. Por el teorema de Ascoli, Ω es compacto con la norma uniforme.

Para cada $N \in \mathbb{N}$ definimos $L_N(g) = L_f(g + 1/N)/\left\|L_f(g+1/N)\right\|_\infty$, $g \in \Omega$. Si $x, y \in X_A^+$, $x_i = y_i$ para $|i| \leq N$, entonces

$$L_f\left(g + \frac{1}{N}\right)(x) \leq L_f\left(g + \frac{1}{N}\right)(y)\ \exp\left(\frac{|f_\theta|\theta^N}{1-\theta}\right)$$

y por lo tanto $L_N(\Omega) \subset \Omega$.

Como Ω es convexo y compacto (con la norma uniforme) podemos aplicar el teorema de punto fijo de Schauder-Tijonov a cada $L_N : \Omega \to \Omega$ para ver que $\exists h_N \in \Omega$ tal que $L_N(h_N + 1/N) = \lambda_N h_N$, donde $\lambda_N = \|L_f(h_N + 1/N)\|_\infty$

Por la compacidad de Ω existe una subsucesión $h_{N_m} \to h \in \Omega$, y por continuidad, $L_f h = \lambda h$ donde $\lambda = \|L_f(h)\|_\infty$. Para ver que λ es positivo notemos que

$$\lambda_N h_N(x) = \sum_{\sigma y = x} e^{f(y)}(h_N(y) + 1/N) \geq (\inf |h_N| + 1/N) \exp(-\|f\|_\infty),$$

luego $\lambda_N(\inf h_N) \geq (\inf h_N + 1/N) \exp(-\|f\|_\infty)$. Así $\lambda_N \geq \exp(-\|f\|_\infty)$ y entonces $\lambda \geq \exp(-\|f\|_\infty)$.

Supongamos que h no es estrictamente positiva, entonces $\exists x \in X_A^+$ tal que $h(x) = 0$. Luego

$$\sum_{\sigma^n y = x} \exp \circ f^n(y) h(y) = \lambda^n h(x) = 0$$

para $n \geq 1$, donde $f^n(y) = f(y) + \cdots + f(\sigma^{n-1} y)$. En particular $h(y) = 0$ si $\sigma^n y = x$ para algún $n \geq 0$. Como σ es transitivo, el conjunto de tales y es denso en X_A^+, así $h \equiv 0$. Pero $\lambda = \|L_f h\|_\infty > 0$, lo cual da una contradicción.

Para demostrar que λ es simple, sea $g \in C(X_A^+)$ otra eigenfunción correspondiente a λ y sea

$$t = \inf \left\{ \frac{g(x)}{h(x)} : x \in X_A^+ \right\} = \frac{g(z)}{h(z)}.$$

Entonces $g(x) - t h(x) \geq 0 = g(z) - t h(z)$ para todo $x \in X_A^+$. Repitiendo el razonamiento previo concluímos que $g - th \equiv 0$.

Con h y λ como arriba, sea $g = f - \log h \circ \sigma + \log h - \log \lambda$. Entonces $L_g = \lambda^{-1} \Delta(h)^{-1} L_f \Delta(h)$ donde $\Delta(h)$ es el operador multiplicación por h. Más aún $L_g 1 = 1$ y así L_g está normalizado. Observemos que esto nos permite deducir las propiedades restantes de L_f de las propiedades correspondientes de L_g.

Como $\mathcal{M}(X_A^+)$ es convexo y compacto, el operador $L_g^* : \mathcal{M}(X_A^+) \to \mathcal{M}(X_A^+)$ tiene un punto fijo m, por el teorema de Schauder-Tijonov. Demostraremos la unicidad de m y (4) simultaneamente.

Sea $v \in F_\theta^+$, entonces $\left\{ L_g^n v \right\}$ es equicontinua ya que si $x_i = y_i$ para $i < n$.

$$L_g^n v(x) x - L_g^n v(y) \leq |L_g^n v|_\theta \theta^k \leq C\theta^k \|v\|_\infty + \theta^{k+n} |v|_\theta.$$

Por lo tanto hay una subsucesión convergente $L_g^{n_m}v \to v^*$. Ya que $\sup L_g^{n+1}v \le \sup L_g^n v$, para todo $N \in \mathbb{N}$

$$\sup v^* = \inf_n(\sup L_g^n \theta) = \sup L_g^N v^*.$$

Sea $v^*(x_0) = \sup v^* = L^N g v^*(x_N)$. Así

$$v^*(x_0) = \sum_{\sigma^N y = x_N} \exp \circ g^N(y) v^*(y)$$

Como L_g está normalizado, ésta es una combinación convexa y así $v^*(y) = v^*(x_0)$ cuando $\sigma^N y = x_N$. Como σ es topológicamente mezcladora, v^* es constante. Como $L_g^* m = m$,$\int L_g^n v\, dm = \int v dm$ y así $v^* = \int v dm$.

Como F_θ^+ es uniformemente denso en $C(X_A^+)$ podemos suponer que $v \in C(X_A^+)$. El argumento anterior puede repetirse a cualquier subsucesión $\left\{L_g^{k_n} v\right\}$ y así $\lim_{n\to\infty} L_g^n v = \int v dm$. Esto completa la demostración de (3) y (4).

Para probar (2) es suficiente demostrar que $L_g \mid C^\perp$ tiene radio espectral < 1 donde

$$C^\perp = \left\{ w \in F_\theta^+ : \int w dm = 0 \right\}.$$

$$|L_g^{n+r} w|_\theta \le C \left\| L_g^r w \right\|_\infty + \theta^n |L_g^r w|_\theta.$$

$$\lim_{r\to\infty} \left\| L_g^r w \right\|_\infty = \int w dm = 0.$$

Como el conjunto $\left\{ w \in C^\perp : \|w\|_\theta \le 1 \right\}$ es compacto (con la norma uniforme), para n, r grandes tenemos $\varepsilon > 0$ tal que $\left\| L_g^{n+r} w \right\|_\theta \le \varepsilon < 1$ si $w \in C^\perp$, $\|w\|_\theta \le 1$.

Para probar (5), sea $v \in C(X_A^+)$, entonces $L_g(v \circ \sigma) = v$ y así $\int v \circ \sigma dm = \int L_g(v \circ \sigma) dm = \int v dm$. $\square$

Definición 5. Sea $T : (X, \mathcal{A}, \mu) \hookleftarrow$ una transformación que preserva medida. Sean $\mathcal{P}$ partición finita e $\mathcal{J}$ σ-subálgebra de $\mathcal{A}$. Se definen

- La *información condicional* de $\mathcal{P}$ dada $\mathcal{J}$

$$I_\mu(\mathcal{P} \mid \mathcal{J}) = -\sum_{P \in \mathcal{P}} \chi_P \log E_\mu(\chi_P \mid \mathcal{J}).$$

- La *entropía condicional* de $\mathcal{P}$ dada $\mathcal{J}$

$$H_\mu(\mathcal{P} \mid \mathcal{J}) = \int I_\mu(P \mid \mathcal{J}) d\mu = \int -\sum_{P \in \mathcal{P}} \phi \circ E_\mu(\chi_P \mid \mathcal{J}) d\mu.$$

- La entropía de T con respecto a $\mathcal{P}$
$$h(T,\mathcal{P}) = H(\mathcal{P} \mid \bigvee_{i=1}^{\infty} T^{-i}\mathcal{P}).$$
donde $\bigvee_{i=1}^{\infty} T^{-i}\mathcal{P}$ es la σ-subálgebra de $\mathcal{A}$ generada por $\cup_{i=1}^{\infty} T^{-i}\mathcal{P}$.
- La entropía de T
$$h(T) = h_\mu(T) = \sup\{h(T,\mathcal{P}) : \mathcal{P}\text{es partición finita}\}$$

Definición 6. Sea $T : (X,\mathcal{A},\mu) \hookleftarrow$ una transformación que preserva medida. Una partición $\mathcal{P}$ con $H(\mathcal{P}) < \infty$ se llama T-generador si $\bigvee_{n=0}^{\infty} T^n\mathcal{P} = \mathcal{A}$

Ejemplo 3. Sea $\sigma : X_A \hookleftarrow$ el corrimiento. Dados $j \in \mathbb{Z}, i_0, \ldots, i_m \in [k]$, definimos el cilindro
$$C(j; i_0, \ldots, i_m) = \{(x_n) \in X : x_{l+j} = i_l, 0 \le l \le m\}.$$
Sea $\mathcal{P} = \{C(0;0), \ldots, C(0;k-1)\}$ la partición al tiempo cero. Los átomos de $\bigvee_{i=j}^{j+m} \sigma^{-i}\mathcal{P}$ son los cilindros $C(j; i_0, \ldots, i_n)$. Por lo tanto $\mathcal{P}$ es un σ-generador.

Teorema de Kolmogorov y Sinai. *Si $\mathcal{P}$ es un T-generador, entonces $h(T,\mathcal{P}) = h(T)$.*

Definición 7. Sean $f : X \to \mathbb{R}$, $T : X \hookleftarrow$ continuas. La *presión topológica* de f es la cantidad
$$P(f) = \sup\{h_\nu(T) + \int f d\nu : \nu \text{ es } T\text{-invariante}\}$$
y la probabilidad μ se llama *estado de equilibrio* para f si
$$P(f) = h_\mu(T) + \int f d\mu.$$
La *entropía topológica* de T es $h_{\text{top}}(T) = P(0)$.

La función $P : C(X) \to \mathbb{R}$ tiene las siguientes propiedades
- Es creciente: $f \le g \Rightarrow P(f) \le P(g)$.
- Es convexa: $t \in [0,1] \Rightarrow P(tf + (1-t)g) \le tP(f) + (1-t)P(g)$.
- c constante y $f \sim g + c \Rightarrow P(f) = P(g) + c$.
- $|P(f) - P(g)| \le \|f - g\|_\infty$.

Proposición 2. *Si $f \in F_\theta$ es real entonces m es el único estado de equilibrio para f y $\lambda = \exp P(f)$.*

Ejemplo 4. En el caso en que f depende de dos coordenadas solamente o sea $f(x) = f(x_0, x_1)$ se tiene la matriz k x k $M_{ij} = A_{ij}\ \exp f(i,j)$. Sea λ el eigenvalor dominante positivo. En este caso $h(x) = h(x_0)$ donde $\sum\limits_i h(i)Mij = h(j)$.

Definiendo $g(i,j) = \log h(i) - \log h(j) - \log\lambda + f(i,j)$ la matriz correspondiente a L_g es

$$P_{ij} = A_{ij}\ \exp g(i,j) = \frac{M_{ij}h(i)}{\lambda h(j)},$$

su transpuesta es la matriz correspondiente a L_g^* y es estocástica ya que

$$\sum_i P_{ij} = \frac{\sum_i M_{ij}h(i)}{\lambda h(j)} = \frac{\lambda h(j)}{\lambda h(j)} = 1$$

Sea π tal que $\sum_j P_{ij}\pi(j) = \pi(i)$ y $\sum_i \pi(i) = 1$. Sea $C = C(0; i_0, \dots, i_n)$, entonces

$$L_g\chi_C(X) = \sum_i P_{ix_0}\chi_C(ix) = P_{i_0i_1}\,\chi_C(1; i_1, \dots, i_n)(x).$$

Así

$$m(C(j; i_0, \dots, i_n)) = \int \chi_C\, dm = \int L_g\chi_C\, dm = P_{i_0i_1} m(C(1; i_1, \dots, i_n)).$$

También

$$L_g\chi_{C(0;i)}(X) = P_{i_0x_0} = \sum_l P_{i_0l}\chi_{C(0;l)}(x).$$

Así

$$m(C(0;i)) = \int L_g X_{c(0;i)} = \sum_j P_{ij} m(C(0;j)).$$

Luego $m(C(0;i)) = \pi(i)$ y entonces

$$m(C(j; i_0, \dots, i_n)) = P_{i_0i_1}\cdots P_{i_{n-1}i_n}\pi(i_n).$$

Proposición 3.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\sum_{x\in Fix(\sigma^n)} e^{f^n(x)} = P(f)$$

Demostración. Dada $\varepsilon > 0$, podemos escoger una función g con $\|g - f\|_\infty < \varepsilon$ que depende solo de un número finito de coordenadas $x_0, \dots, x_l$. Remplazando luego palabras de longitud $l$por símbolos, si es necesario, podemos suponer que g es función de x_0, x_1. Como en el Ejemplo 4, sea $M_g(i,j) = A_{ij} \exp g(i,j)$. Entonces

$$\sum_{x \in \mathrm{Fix}(\sigma^n)} e^{g^n(x)} = \sum_{x_0 \cdots x_{n-1} x_0} \exp g(x_0, x_1) \cdots \exp g(x_{n-1}, x_0)$$
$$= \mathrm{Tr}\, M_g^n = e^{nP(g)} \lambda_2^n \cdots \lambda_k^n$$

donde $e^{P(g)}, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ son los eigenvalores de M_g. Es entonces claro que

$$\frac{1}{n} \log \sum_{x \in \mathrm{Fix}(\sigma^n)} e^{g^n(x)} \to P(g)$$

Ya que

$$\left| \frac{1}{n} \log \sum_{x \in \mathrm{Fix}(\sigma^n)} e^{f^n(x)} - \frac{1}{n} \log \sum_{x \in \mathrm{Fix}(\sigma^n)} e^{g^n(x)} \right| \leq \varepsilon,$$

$$\limsup_{n \to \infty} \left| \frac{1}{n} \log \sum_{x \in \mathrm{Fix}(\sigma^n)} e^{f^n(x)} - P(g) \right| \leq \varepsilon.$$

Como $|P(g) - P(f)| \leq \|g - f\|_\infty < \varepsilon$, tenemos

$$\limsup_{n \to \infty} \left| \frac{1}{n} \log \sum_{x \in \mathrm{Fix}(\sigma^n)} e^{f^n(x)} - P(f) \right| \leq 2\varepsilon.$$

$\square$

Corolario 1. *Si $f \in F_\theta$ y $P(\Re f) < 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que La serie*

$$Z(g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{x \in Fix(\sigma^n)} e^{g^n(x)}$$

converge absolutamente en $B_\varepsilon(f)$.

Definición 8. Sea $L : B \to B$ operador lineal acotado en el espacio de Banach B. El radio espectral esencial de L es el mínimo ρ tal que fuera del disco de radio ρ el espectro de L consiste de eigenvalores aislados con multiplicidad finita.

Teorema 2. *Para $f \in F_\theta$ el radio espectral de L_f es $\leq e^{P(\Re f)}$. Si A es aperiódica y L_f tiene un eigenvalor de módulo $e^{P(f)}$, este eigenvalor es simple y el resto del espectro está contenido en un disco de radio*

$R < e^{P(f)}$. El radio espectral esencial de L_f es $\theta e^{P(\Re f)}$. Todo punto del disco abierto de radio $\theta e^{P(\Re f)}$ es un eigenvalor de L_f.

Teorema 3. *La función exp($Z(f)$) se extiende a una función analítica en $\{f \in F_\theta^+ : P(\Re f) < -\log\theta\}$.*

Sea $r \in F_\theta$ positiva. Si μ es una probabilidad σ-invariante se define una probabilidad μ_r invariante bajo el flujo suspensión $\phi_t : X_A^r \hookleftarrow$ mediante.

$$\int_{X_A^r} F d\mu_r = \frac{\int_{X_A}(\int_0^{r(x)} F(x,t)dt)d\mu(x)}{\int_{X_A} r d\mu}.$$

El trabajo de Abramov relaciona las entropías:

$$h_{\mu_r}(\phi_1) = \frac{h_\mu(\sigma)}{\int r d\mu}.$$

La función $t \mapsto P(-tr)$ es continua, estrictamente decreciente y su imagen es todo $\mathbb{R}$. Por lo tanto $\exists h \in \mathbb{R}$ tal que $P(-hr) = 0$. Sea m el estado de equilibrio para $-hr$, entonces

$$h_\mu(\sigma) - h\int r d\mu \leq h_m(\sigma) - h\int r dm = 0$$

para toda probabilidad σ-invariante μ. Así

$$h_{\mu_r}(\phi_1) = \frac{h_\mu(\sigma)}{\int r d\mu} \leq h = \frac{h_m(\sigma)}{\int r dm}$$

con igualdad sólo para $\mu = m$. Por lo tanto $h = h_{\text{top}}(\phi_1)$.

Teorema 4. *Si $r \in F_\theta$, la función zeta de Ruelle $\zeta_r^*(s) = e^{Z(-sr)}$ es analítica en $\Re s > h_{top}(\phi_1)$ y admite una extensión meromorfa al semiplano $\Re s > \delta$, donde $2P(-\delta r) = -\log\theta$.*

Utilizando el procedimiento combinatorio de Bowen y Manning, tenemos

Teorema 5. *Sea Λ un conjunto básico de un flujo C^1 φ. La función zeta $R_\varphi(s)$ es analítica, nunca 0 en $\Re s > h_{top}(\varphi_1)$ y tiene extensión meromorfa a $\Re s > (1-\varepsilon)h_{top}(\varphi_1) con un polo simple en s = h_{top}(\varphi_1)$.*

3. Sistemas analíticos y suaves

Sean M variedad compacta, $T : M \hookleftarrow$ λ-expansiva, $f : M \to \mathbb{C}$, todas analíticas. Sean $\mathcal{U}$ una pequeña vecindad compleja de M y $\mathcal{A}$ el espacio de funciones holomorfas en $\mathcal{U}$ con extensión continua a la frontera. Podemos extender analiticamente T y f a $\mathcal{U}$ preservando la

λ -expansividad de T. Denotemos por $S_k, k = 1, \ldots, d$ las ramas de la inversa de T, de tal suerte que $L_f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ está dado por

$$L_f g = \sum_k (e^f g) \circ S_k.$$

Si z_k es el único punto fijo de S_k tenemos

$$\operatorname{Tr} L_f = \sum_k \frac{\exp(f(z_k))}{\det(1 - DT(z_k)^{-1})}.$$

Sea $\mathcal{A}_p$ el espacio de p-formas en $\mathcal{U}$ con coeficientes en $\mathcal{A}$. Definamos

$$L_{f,p} : \mathcal{A}_p \to \mathcal{A}_p, \quad \omega \mapsto \sum_k S_k^*(e^f \omega).$$

Así

$$\operatorname{Tr} L_{f,p} = \sum_k \frac{\exp(f(z_k))\operatorname{Tr} \wedge^p DT(z_k)^{-1}}{\det(1 - DT(z_k)^{-1})}$$

y utilizando $\det(I - A) = \sum_p (-1)^p \operatorname{Tr} \wedge^p A$, tenemos

$$Z(f) = \sum_p (-1)^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Tr} L_{f,p}^n.$$

Teorema 6. *1) Los operadores $L_{f,p} : \mathcal{A}_p \to \mathcal{A}_p$ son nucleares 2) $\exp Z(f) = \prod_p \det(I - L_{f,p})^{(-1)^{p+1}}$ es el cociente de funciones analíticas en $\mathcal{A}_p$.*

Resultados analogos valen para difeomorfismos y flujos analíticos de Anosov, bajo la severa hipótesis de analiticidad de la foliación estable, la cual es satisfecha por los flujos geodésicos de superficies de curvatura constante negativa.

Supongamos ahora que M es C^∞, T y f son C^r, T es λ-expansiva. Sea $\Omega_p^r(M)$ el espacio de Banach de p-formas de clase C^r .

Teorema 7. *El radio espectral de $L_{f,p} : \Omega_p^r(M) \to \Omega_p^r(M)$ es $\leq \lambda^{-p} e^{P(\Re f)}$. El radio espectral esencial de $L_f = L_{f,0}$ es $\leq \lambda^{-r} e^{P(\Re f)}$ y $\det(I - L_f)$ es analítica para $P(\Re f) < r \log \lambda$. Para $p \geq 1$ el radio espectral esencial de $L_{f,p}$ es $\leq \lambda^{1-p-r} e^{P(\Re f)}$ y $\det(I - L_{f,p})$ es analítica para $P(\Re f) < (r + p - 1) \log \lambda$*

El hecho de que la foliaciones (in)estables de sistemas dinámicos hiperbólicos son usualmente sólo Hölder continuas, aún para sistemas analíticos, es un fuerte obstáculo para extender las funciones zeta a dominios grandes.

Recientemente Fried, desarrollando una idea de Rugh, ha demostrado que si el flujo ϕ es C^ω, Λ es un conjunto básico y el haz ξ es también C^ω, entonces la funcion $\zeta(\psi)$ definida en (1) es una función meromorfa, que se conjetura analítica, de ψ_t. Cada ejemplo de función zeta de la variable $z \in \mathbb{C}$ que aparece en la literatura es el cociente de 2 funciones de la forma especial $\zeta(\psi^{za})$, siendo ψ^{za} una curva parametrizada por z, en el espacio de levantamientos:

$$\psi_t^{za}(v) = \exp\left(-z\int_0^t a(\psi_s v)ds\right)\psi_t(v)$$

donde a es una función dada en ξ constante en las fibras. Para $a = 1$ escribimos $T_\psi^\flat(z) = \zeta(\psi^z)$.

Denotando por $\mathbb{S}_\gamma$ el sumando estable de $\mathbb{P}_\gamma$ tenemos que

$$S(z) = \exp -\sum_\gamma \frac{1}{\mu(\gamma)}\frac{e^{-zl\gamma}}{\det(I-\mathbb{S}_\gamma)}.$$

Para escribir $S(z) = T_{\psi^+}^\flat(z)/T_{\psi^-}^\flat(z)$ se requieren $\xi^\pm, \psi^\pm$ tales que

$$|\det(I-\mathbb{P}_\gamma)| = \det(I-\mathbb{S}_\gamma)(\chi_\gamma(\psi^+) - \chi_\gamma(\psi^-)).$$

Se elije por lo tanto $\xi^\pm = w \otimes \wedge^{\pm(-1)^u} E^u$, donde u es el rango de E^u, w su haz de orientación y $\wedge^+ E^u$, $\wedge^- E^u$ la suma de las potencias exteriores pares e impares respectivamente. Se toma el le- vantamiento natural $\wedge^j(D\varphi_t|E^u)$ de $\varphi_t|\Omega$ a $\wedge^j E^u$.

Para escribir $R(z) = \exp -\sum_\gamma e^{-zl\gamma}/\mu(\gamma) = T_{\psi^+}^\flat(z)/T_{\psi^-}^\flat(z)$, se escoge $\xi^\pm = w \otimes \wedge^{\pm(-1)^u}(TM/E^c)$, con los levantamientos naturales.

Dado un levantamiento α_t de $\varphi_t|\Omega$ a un haz η se definen las correspondientes funciones zeta de Ruelle y Selberg

$$R_\alpha(z) = \exp -\sum_\gamma \frac{\chi_\gamma(\alpha)}{\mu(\gamma)} e^{-zl\gamma} \tag{2}$$

$$S_\alpha(z) = \exp -\sum_\gamma \frac{\chi_\gamma(\alpha)}{\mu(\gamma)}\frac{e^{-zl\gamma}}{\det(I-\mathbb{S}_\gamma)} \tag{3}$$

Sea η un haz plano de rango d sobre M con levantamiento plano y holonomía $\rho : \pi_1 M \to Gl(d,\mathbb{C})$. La función de torsión de la representación ρ es

$$Z_\rho(z) = \prod_{\gamma:\mu(\gamma)=1} \det(I - \chi_\gamma(w)e^{-zl\gamma}\rho(\gamma))^{(-1)^u}. \tag{4}$$

Aquí elegimos simplemente $\xi^\pm = \eta \otimes \wedge^\pm(TM/E^c)$ con los levantamientos naturales.