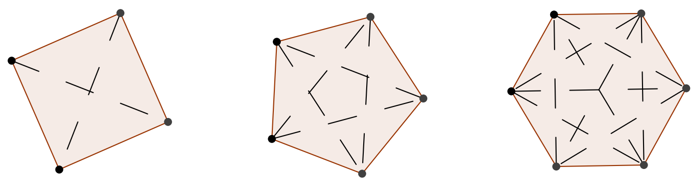
Inducción matemática

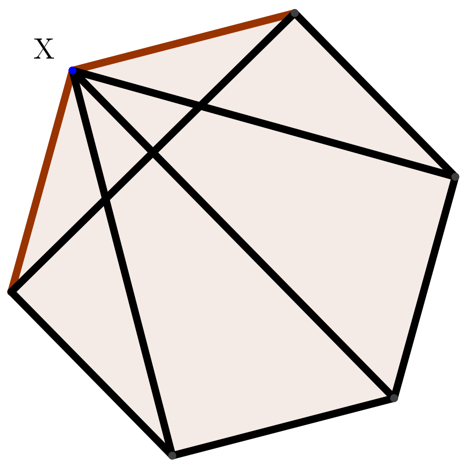
Ejercicios de repaso

Lee, piensa y responde con cuidado. No olvides justificar bien tus respuestas.

1. Demuestra que $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Demuestra que $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.
3. Demuestra que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
4. Demuestra que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
5. Demuestra usando inducción que la suma de enteros impares es par si y sólo si el número de sumandos es par.
6. Demuestra que el número de diagonales (rectas entre vértices que no son lados del polígono) de un polígono convexo (puedes pensarlo como un polígono regular) de n lados es $\frac{n(n-3)}{2}$.

   Sugerencia. En la imagen que sigue, aparecen los polígos de cuatro, cinco y seis lados. Sus diagonales son las líneas que aparecen punteadas. Para hacer la prueba por inducción, consideremos un caso concreto. Supongamos que se vale para pentágonos, es decir, un pentágono tiene diez diagonales. Para el «paso inductivo» (ojo, no es un el paso inductivo porque es un **caso concreto**), considera un hexágono y fíjate en uno de sus vértices, sea X. Quita X del hexágono y «completa» el pentágono que queda (nota que hemos agregado un lado del pentágono que es una diagonal del hexágono). En este pentágono, sabemos que hay diez diagonales. Todas las diagonales de este pentágono son diagonales del hexágono. Pero además falta agregar el lado que usamos para formar el pentágono (que, recuerda, es una diagonal del hexágono) así como las diagonales que se forman con X. ¿Cuánto da?





7. Demuestra que la primera derivada de la función $f(x) = x^n$ es nx^{n-1}.

8. Definamos la sucesión $\{f_n\}$ de números enteros como:

$$f_1 = 1,\ f_2 = 1 \text{ y } f_n = f_{n-1} + f_{n-2},$$

para todo entero n con n mayor o igual que tres.

(a) Demuestra que para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = f_{k+2} - 1.$$

(b) Supón que $f_0 = 0$. Demuestra que si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ entonces } A^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$$

9. ¿Cuál es el error en la siguiente demostración?

Proposición. Todos los caballos son del mismo color.

Demostración. Sea $P(n)$ la siguiente propiedad: *Todos los caballos en un conjunto con n caballos tienen el mismo color.*

Caso base. $P(1)$ es verdadera obviamente. *Hipótesis inductiva.* Supongamos que $P(n)$ es verdadera para un número natural fijo n; es decir, en cualquier conjunto con n caballos, todos tienen el mismo color. *Paso inductivo.* Por demostrar que $P(n+1)$ es verdadera. Sea $C = \{c_1, \ldots, c_{n+1}\}$ un conjunto con $n+1$ caballos, cada caballo está representado por c_i para i en $\{1, 2, \ldots, n+1\}$. Consideremos el conjunto $C \setminus c_{n+1}$ con n caballos, como este conjunto cumple la hipótesis de inducción entonces podemos afirmar que los caballos $c_1, \ldots, c_n$ son todos del mismo color. Consideremos ahora el conjunto $C \setminus \{c_1\}$, el cual también cumple la hipótesis inductiva, por lo que $c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}$ son todos del mismo color; de aquí que $c_1, \ldots, c_{n+1}$ son todos del mismo color, por lo tanto todos los caballos en C tienen el mismo color.