Algebra Moderna III : 22 de agosto 2

Curso pasado: $K = \mathbb{Q}[\sqrt{a}]$

$a \in \mathbb{Z}$ libre de

$$d = \begin{cases} a & a \equiv 1 \pmod 4 \\ 4a & a \equiv 2,3 \pmod 4 \end{cases}$$

$$R = \begin{matrix} \text{anillo} \\ \text{enteros} \\ \text{algebraicos} \end{matrix} \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{a}]$$

$$= \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\left(\frac{d+\sqrt{d}}{2}\right) \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{a}]$$

$$\begin{array}{ccccc} R_{\mathfrak{p}} & \in & R & \subseteq & \mathbb{Q}[\sqrt{a}] \\ | & & \uparrow & & \uparrow \\ \langle p \rangle & \in & \mathbb{Z} & \subseteq & \mathbb{Q} \end{array}$$

extensiones de campos & anillos

$\uparrow_{\text{primo}}$

$$R \cdot p \cap \mathbb{Z} = \langle p \rangle$$

¿Es $R \cdot p$ un ideal primo de R?

$$R \cdot p = \begin{cases} p_1 \cdot p_2 & \left(\frac{d}{p}\right) = 1 \quad \text{Escindido} \\ p & \left(\frac{d}{p}\right) = -1 \quad \text{Inerte} \\ p^2 & p \mid d \quad \text{Ramificado} \end{cases}$$

Reciprocidad Cuadrática:

$$\chi_a : \left(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}\right)^* \longrightarrow \{1,-1\}$$

homomorfismo de gps.

&

$R.P$ escinde $\iff \chi_a(p) = 1$

$R.P$ inerte $\iff \chi_a(p) = -1$

OBSERVACIÓN $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ actúa en $\mathbb{Q}[\sqrt{a}]$ y deja fijo $\mathbb{Q}$:

$$\alpha+\beta\sqrt{a} \longmapsto \alpha+\beta\sqrt{a}$$
$$\alpha+\beta\sqrt{a} \longmapsto \alpha-\beta\sqrt{a}$$

$\mathbb{Q}[\sqrt{a}]$
|
$\mathbb{Q}$

Más aún: cuando $p \equiv 1 \pmod 4$

$x^2+1 = (x+a)(x-a)$ con $a^2 \equiv -1 \pmod 4$

y en este caso

$$\mathbb{Q}[x]/x^2-a$$

$(i-a) = A \subseteq \mathbb{Z}[i] - \mathbb{Q}[\sqrt{a}]$

$A \cap \mathbb{Z} = \langle p \rangle$

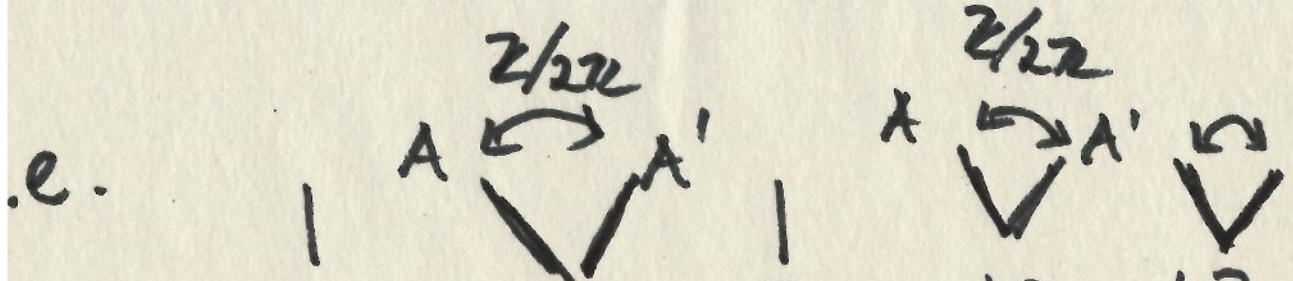
$p \in \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$

$A' \cap \mathbb{Z} = \langle p \rangle$

$\mathbb{Z}[i] \cdot p = A \cdot A'$ & $A' = (p, i+a)$

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ manda A en A'.

i.e.



i.e. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ i permuta las raices de x^2-a en $\mathbb{Q}[\sqrt{a}]$!

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ es un gp asociado a x^2-a: Grupo de Galois de $\mathbb{Q}[\sqrt{a}]/\mathbb{Q}$ ó del polinomio x^2-a

¿Para qué la historia de χ_a y todo esto

- Demostraremos Reciprocidad Cuadrática con estas técnicas

- Exhibir el gp de Galois de un polinomio f i NO es sólo