Álgebra Moderna III : 24 agosto

Clase pasada:

$$\begin{array}{ccc} R_d & \leq & \mathbb{Q}[\sqrt{d}] \\ | & & | \\ p \in \mathbb{Z} & \leq & \mathbb{Q} \end{array}$$

p ← primo

extensión de campos de grado 2

entonces $\langle p \rangle \leq \mathbb{Z}$ ideal primo & preguntamos si $p \cdot R_d$ escinde. ¿?

$p \cdot R_d$ escinde $\iff \chi_d(p) = 1$

$p \cdot R_d$ inerte $\iff \chi_d(p) = -1$

con

$$\chi_d : \left(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}\right)^* \longrightarrow \{-1, 1\}$$

$$a \longmapsto \left(\frac{a}{d}\right)$$

homomorfismo de grupos.

Hoy: Extensiones algebraicas de campos

pag 73, D. Cox

$$\begin{array}{c} \alpha \in L \\ | \\ F \end{array}$$ extensión. Decimos α es algebraico sobre F si $f(\alpha)=0$ con $f \in F[x]$

Eg: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ es algebraico/$\mathbb{Q}$.

$$f(x) = (x-\sqrt{2}-\sqrt{3})(x-\sqrt{2}+\sqrt{3})(x+\sqrt{2}-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

$$= x^4 - 10x^2 + 1$$

Ex: - si α es algebraico/$\mathbb{Q}$ ¿es $1/\alpha$ algebraico/$\mathbb{Q}$?

- si α y β son algebraicos/$\mathbb{Q}$ ¿son $\alpha\beta$ y $\alpha+\beta$ algebraicos/$\mathbb{Q}$?

Si $\alpha \in \begin{array}{c} L \\ | \\ F \end{array}$ algebraico/F $\Rightarrow \exists$ $f \in F[x]$ tal que $f(\alpha) = 0$

Existe un f de grado mínimo.

<u>Prop.</u> $\alpha \in \begin{array}{c} L \\ | \\ F \end{array}$ algebraico/F. Entonces $\exists!$ $p \in F[x]$ tal que

mónico

a) $p(\alpha) = 0$

b) si $f(\alpha) = 0$ para algún $f \in F[x]$, entonces

$f = g \cdot p$. $g \in F[x]$.

<u>Dem:</u> a) ✓ b) Supongamos $f(\alpha) = 0$

$f \neq p$. donde

p tiene como raíz a α y tiene grado mínimo.

$$f = qp + r \qquad r = 0 \quad ó \quad \deg(r) < \deg(p)$$

$$0 = f(\alpha) = q(\alpha)\,p(\alpha) + r(\alpha) \quad \Rightarrow$$

$r(\alpha) = 0$. si $r \neq 0$ contradicción

y por tanto

$\boxtimes$

<u>Def.</u>- $p \in F[x]$ de la ~~te~~ proposición anterior se llama el polinomio mínimo de $\alpha \in L/F$

¿ Es p irreducible$/F$?

<u>Prop.</u> $\alpha \in L/F$ algebraico$/F$ & $p(x)$ su polinomio mínimo.

Si $f \in F[x]$ es mónico ($\neq$ cte)

$$f = p \iff f \text{ es irreducible}/F \text{ \& } f(\alpha) = 0$$

<u>Dem:</u> $\Rightarrow$) Si

$$p = gh \quad \text{con } g, h \in F[x],$$

$$0 = p(\alpha) = g(\alpha)h(\alpha) \Rightarrow \Leftarrow.$$

$\Leftarrow$) f irreducible & $f(\alpha) = 0$. Entonces

$$p \mid f \Rightarrow f = hp$$

$$\underset{\text{irred}}{\Rightarrow} h \text{ constante}$$

$$\underset{p \text{ mónico}}{\Rightarrow} f = p$$

∎

Eg: 0) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ algebraico con polinomio mínimo x^2-2.

$$\begin{array}{c} \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

1) $\sqrt{2}+\sqrt{3} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}]$ algebraico/$\mathbb{Q}$

¿es x^4-10x^2+1 su polinomio mínimo?

↳ Proposición anterior dice que "sólo" necesitamos ver si x^4-10x^2+1 es irreducible/$\mathbb{Q}$.

<u>EJER</u>: Probar $x^4-10x+1$ es irred/$\mathbb{Q}$.

¿Quién es $\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}]$?

$\parallel$

Todas las expresiones polinomiales/$\mathbb{Q}$ en $\mathbb{C}$ que se puedan formar. (y sus inversos)

Eg: x^4-10x^2+1 irred / $\mathbb{Q}$

pero

$$x^4-10x^2+1=(x^2-2\sqrt{3}+1)(x^2+2\sqrt{3}+1) \quad / \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$$

¡ reducible !

Pregunta:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}[\sqrt{3}][\sqrt{2}] \arrow[r, phantom, "\overset{?}{=}"] \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}[\sqrt{2}][\sqrt{3}] \arrow[r, phantom, "\overset{?}{=}"] \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}] \arrow[dd, dash] \\
\mathbb{Q}[\sqrt{3}] \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \arrow[d, dash] & \\
\mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{Q} \arrow[d, dash] \\
\text{si adjunto una raíz de } x^4-10x+1 \quad = \arrow[r, squiggly] & \mathbb{Q}[\sqrt{2}-\sqrt{3}]
\end{tikzcd}$$

a $\mathbb{Q}$, ¿este campo contiene alguna otra raíz ?

es decir, x^4-10x^2+1

¿Qué tanto factoriza en

$\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}]$? $\quad \alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$

sabemos

$$x^4-10x^2+1=(x-\alpha)\,\underbrace{g(x)}$$

¿Quién es $g(x)$?

<u>OBSERVACIÓN</u>: si $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$,

$$\alpha^3-10\alpha=\sqrt{2}-\sqrt{3}.$$

en $\mathbb{Q}[\alpha][x]$ el polinomio $x^4-10x+1$

es igual a $(x-\alpha)(x+\alpha)(x-10\alpha+\alpha^3)(x+10\alpha-\alpha^3)$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}]=\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}].$$