I

Álgebra Moderna III : 28 de agosto

Clase pasada: Polinomio mínimo

Hoy: Adjuntar elementos.

$$\begin{array}{c} L \\ | \\ F \end{array} \quad \text{extensión}$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ entonces

$$F[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = \{ h(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid h \in F[x] \}$$

$$F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \in F[\alpha_1, \dots, \alpha_n] \mid \beta \neq 0 \right\}$$

<u>Propo</u> 1) $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es un campo.

= EJER =

2) si $K \subset L$ es un campo que contiene a $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, entonces

$F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \subset K.$

esto hace a $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$
el campo más pequeño que
contiene a F & $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ en L.

Demostración:

1) EJER

2) Debemos demostrar que si K contiene
a $\alpha_1 \dots, \alpha_n$, entonces $F(\alpha_1 \dots \alpha_n) \subset K$.

Observar $\quad F[\alpha_1, \dots, \alpha_n] \subset K$

$\Rightarrow \quad F(\alpha_1 \dots, \alpha_n) \subset K \quad \boxed{\text{B}}$

"adjuntar al campo F los
elementos $\alpha_1 \dots, \alpha_n$".

Ejemplo:
$$x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$$

$$x^4 - 2 = (x - \sqrt[4]{2})(x + \sqrt[4]{2})(x - i\sqrt[4]{2})(x + i\sqrt[4]{2})$$

este polinomio factoriza <u>completamente</u>

en $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, -\sqrt[4]{2}, i\sqrt[4]{2}, -i\sqrt[4]{2}) = L$

$$L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i) \longleftarrow \underline{\text{EJERCICIO}}$$

Ejemplo:
$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \arrow[dd, dash] \\
\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \arrow[d, dash] & \\
\mathbb{Q} \arrow[r, phantom, "="] & \mathbb{Q}
\end{tikzcd}$$

Polinomio mínimo
$x^4 - 10x^2 + 1$

Lema: $\alpha \in L$ extensión de campos & p el polino mínimo de α.

$$\begin{array}{c} L \\ | \\ F \end{array}$$

entonces

$$F[\alpha] \cong F[x]/\langle p \rangle .$$

Demostración:

$$\varphi : F[x] \longrightarrow L$$
$$h \longmapsto h(\alpha)$$

afirmación: 1) $\varphi(F[x]) = F[\alpha]$

2) $\ker \varphi = \langle p \rangle$

3) $F[x]/\ker\varphi \cong \operatorname{Im} \varphi$

$\boxed{\leq}$

<u>Proposición:</u> $\alpha \in L$ extension de campo.

$$\begin{array}{c} L \\ | \\ F \end{array}$$

α es algebraico <u>ssi</u> $F[\alpha] = F(\alpha)$

<u>Demostración:</u> α algebraico $\Rightarrow$ $F[\alpha]$ es un campo.

que contiene a F & α.

Esto implica $F(\alpha) \subset F[\alpha]$.

La contensión contraria es cierta.

$\Leftarrow)$ si $F[\alpha] = F(\alpha)$ entonces

$1/\alpha \in F[\alpha] = F(\alpha)$ $(\alpha \neq 0)$

$\Rightarrow$ $1/\alpha = a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n$ &

$0 = -1 + a_0\alpha + \cdots + a_n\alpha^{n+1}$ y por tanto

α es algebraico$/F$.

Ejemplo: $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) = \mathbb{Q}[\alpha_1,\alpha_2]$ $\quad \alpha_1=\sqrt{2}$
$\alpha_2=\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \mathbb{Q}[\alpha_1,\alpha_2] = a_0 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_1\alpha_2$$

$$= \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$$

en este campo:

$$x^4-10x^2+1 = (x-\alpha_1-\alpha_2)(x+\alpha_1+\alpha_2)(x-\alpha_1+\alpha_2)(x+\alpha_1-\alpha_2)$$

factoriza completamente.

observar

$$\mathbb{Q}[x]/_{x^4-10x^2+1} \cong \mathbb{Q}(\alpha_1+\alpha_2)$$

&

$$\alpha_1+\alpha_2 = \sqrt{2}+\sqrt{3} = \beta$$

$$x^4-10x^2+1 = (x-\beta)(x+\beta)(x-10\beta+\beta^3)(x+10\beta-\beta^3)$$

esto implica 2 cosas:

1) $\beta^3 - 10\beta = \pm(\sqrt{2} - \sqrt{3})$

$\Rightarrow \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

Pero la inclusión opuesta es cierta.

$\Rightarrow \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

2) $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ raíz de $x^4 - 10x^2 + 1 = f(x)$

al construir un campo que contenga a $\mathbb{Q}$ y α, llegamos a $\mathbb{Q}(\alpha)$ que contiene todas las otras raíces de $f(x)$.

"incluir a una raíz las incluye a todas".

Más adelante:

1) es un ejemplo del teorema del elemento primitivo.

2) Extensiones de campo normales