Álgebra Moderna III : 29 agosto

Clase pasada: $F(\alpha) \cong F[\alpha]$ ssi α es algebraico/F.

Hoy: Extensiones algebraicas

———— " ————

$\begin{array}{c} L \\ | \\ F \end{array}$ extensión $\Rightarrow$ L es un espacio vectorial sobre F.

EJER.

<u>Defi</u> L es una extensión finita de F si $\dim_F L < \infty$.

El grado de la extensión L/F es

$$\dim_F L =: [L:F]$$

Proposición: $\alpha \in L$ | extensión, F

$$\begin{array}{c} L \\ | \\ F \end{array}$$

1) α es algebraico$/_F$ ~~ssi~~ $[F(\alpha):F] < \infty$

2) α algebraico$/_F$. Si $n = \deg(P(x))$ donde $P(x)$ es el polinomio mínimo de $\alpha /_F$ entonces $1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}$ forman una base de $F(\alpha) /_F$. Entonces $[F(\alpha):F] = n$.

Demostración: 2) α algebraico$/_F \Rightarrow$

$$F(\alpha) = F[\alpha] = \{ g(\alpha) \mid g \in F[x] \}$$

para cualquier g

$$g = hp + r \qquad \deg(r) < \deg(p) = n$$

$$= hp + a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad g(\alpha) = \underbrace{a_0 + a_1 \alpha + \dots + a_{n-1} \alpha^{n-1}}_{\text{¡generan!}}$$

$1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$ son linealmente indep.

pues de otra manera

$$0 = 1 \cdot a_0 + a_1 \alpha + \cdots + a_{n-1} \alpha^{n-1}$$

contradice $p(\alpha)$ tiene grado n.

$\Rightarrow$ $[F(\alpha) : F] = n$.

Esto también muestra: α algebraico $\Rightarrow$

$[F[\alpha] : F] < \infty$.

Resta demostrar: $[F(\alpha) : F] < \infty \Rightarrow \alpha$ algebraico.

Tenemos $\dim_F F(\alpha) = n \Rightarrow 1, \alpha, \ldots, \alpha^n$ tienen que ser l. d.

i. e.

$a_0 + a_1 \alpha + \cdots + a_n \alpha^n = 0$ para ciertos $a_0, \ldots, a_n \in F$.

$\Rightarrow$ α algebraico. $\blacksquare$

Ejemplo:

$$\begin{array}{c} \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

extensión de grado 4.

$\Rightarrow$ cualquier $\beta \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ puede escribirse como

$$\beta = a_0 + a_1(\sqrt{2}+\sqrt{3}) + a_2(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 + a_3(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3$$

con $a_0, \ldots, a_3 \in \mathbb{Q}$.

<u>Defi</u> $\begin{array}{c} L \\ | \\ F \end{array}$ una extensión de campos es algebraica si todo elemento de L es algebraico$/F$.

Lema: $\begin{array}{c} L \\ | \\ F \end{array}$ una ~~finita~~ extensión finita

a) $\begin{array}{c} L \\ | \\ F \end{array}$ es algebraica

~~b)~~ Demostración: clara.

¡ojo! El recíproco es falso.

Por lo tanto una extensión finita es un ejemplo de extensión algebraica bien comportada.

Teorema: $\begin{array}{c} L \\ | \\ F \end{array}$ extensión. $[L:F] < \infty$ ssi

$\exists\ \alpha_1, \dots, \alpha_m \in L$ algebraicos$/_F$ &

$$L = F(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$$

Demostración: $\Rightarrow)$ $\alpha_1 \dots \alpha_m$ base de L

$\Rightarrow)$ $L = \{a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n\} < F(\alpha_1 \dots \alpha_n) < L$

$\Rightarrow)$ $L = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Cada α_i's son algebraicos por la lema anterior.

Recíprocamente, supongamos $L = F(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ con α_i's algebraicos$/F$.

$$\Rightarrow) \quad \left.\begin{array}{ll} F(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = L & \\ \quad | & \} \text{ finita pues } \alpha_1 \text{ es alg}/F \\ F(\alpha_0) & \\ \quad | & \} \text{ finita pues } \alpha_0 \text{ es algebraico}/F \\ F & \end{array}\right\} \quad [L:F] < \infty.$$

Propo $\begin{array}{c} L \\ | \\ F \end{array}$ extension. si $\alpha, \beta \in L$ son algebraicos$/F$

entonces $\alpha+\beta$ & $\alpha\beta$ son algebraicos$/F$.

Demostración: El teorema pasado implica

$$\begin{array}{c} F(\alpha,\beta) \\ | \\ F \end{array} \text{ es finita} \Rightarrow \text{algebraica.}$$

$\Rightarrow$ como $\alpha+\beta$ & $\alpha\beta \in F(\alpha,\beta)$ acabamos $\boxtimes$

Eg: $\overline{\mathbb{Q}} = \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ algebraico}/\mathbb{Q}\}$

Hecho: $\overline{\mathbb{Q}}$ es algebraicamente cerrado.