

Álgebra Moderna III: 5 de Septiembre

I

Clase pasada: Campos de descomposición
 $\hookrightarrow [L:F] \leq n!$

Hoy: más campos de descomposición.

UNICIDAD DE LOS CAMPOS DE DESCOMPOSICIÓN
HASTA POR ISOMORFISMO.

Supongamos $\varphi: F_1 \xrightarrow{\cong} F_2$ iso de campos

si $f \in F_1[x]$, entonces $\varphi(f) \in F_2[x]$.

si L & M campos de descomposición
de f & $\varphi(f)$, respectivamente

entonces

$$\begin{array}{ccc} L & & M \\ | & & | \\ F_1 & \xrightarrow{\varphi} & F_2 \end{array}$$

Teorema: Sea $f \in F_1[x]$ & $\varphi: F_1 \xrightarrow{\cong} F_2$
 como arriba. Entonces existe un
 isomorfismo $\bar{\varphi}: L \xrightarrow{\cong} M$, tal que

$$\bar{\varphi}|_{F_1} = \varphi.$$

Demostración: Por inducción en el
 grado $\deg(f) = n > 0$.

$$n=1 \quad \checkmark \quad L \cong F_1 \xrightarrow[\varphi]{\cong} F_2 \cong M \quad \checkmark$$

supongamos el teorema cierto para $\deg(f) = n-1$.
 ($n > 1$)

Argumentar: \bullet) sabemos $L \cong F_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

con $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ raíces de f .

También sabemos

$$F_1 \subseteq F_1(\alpha_1) \subset L_1 \rightarrow \begin{array}{l} \text{campo de} \\ \text{descomposición} \\ \text{de } g_1 = f/(x-\alpha_1). \end{array}$$

Argumento 1) $h =$ polinomio minimal de α_1 , entonces

$$F_1(\alpha_1) \cong F_1[\alpha_1] \cong F_1[x] / \langle h \rangle$$

$$\alpha_1 \longmapsto x + \langle h \rangle$$

Argumento 2) si $F_1 \xrightarrow{\varphi} F_2$ isomorfismo de campos

entonces, $F_1[x] \xrightarrow{\tilde{\varphi}} F_2[x]$

$$a_0 + \dots + a_n x^n \longmapsto \varphi(a_0) + \varphi(a_1)x + \dots + \varphi(a_n)x^n$$

$$\text{irreducibles} \longmapsto \text{irreducibles}$$

$$h \longmapsto \boxed{\text{factor irreducible de } \varphi(f)} = h_2$$

Sea β_1 una raíz de h_2 . ($= \varphi(h_1)$)

Entonces, $F(\beta_1) = F[\beta_1] \cong F_2[x] / \langle \tilde{\varphi}(h) \rangle$

como $\tilde{\varphi} : F_1[x] \xrightarrow{\cong} F_2[x]$ &
 $h \longmapsto \tilde{\varphi}(h)$

entonces, $\tilde{\varphi} : F_1[x] / \langle h \rangle \xrightarrow[\tilde{\varphi}]{\cong} F_2[x] / \langle \tilde{\varphi}(h) \rangle$

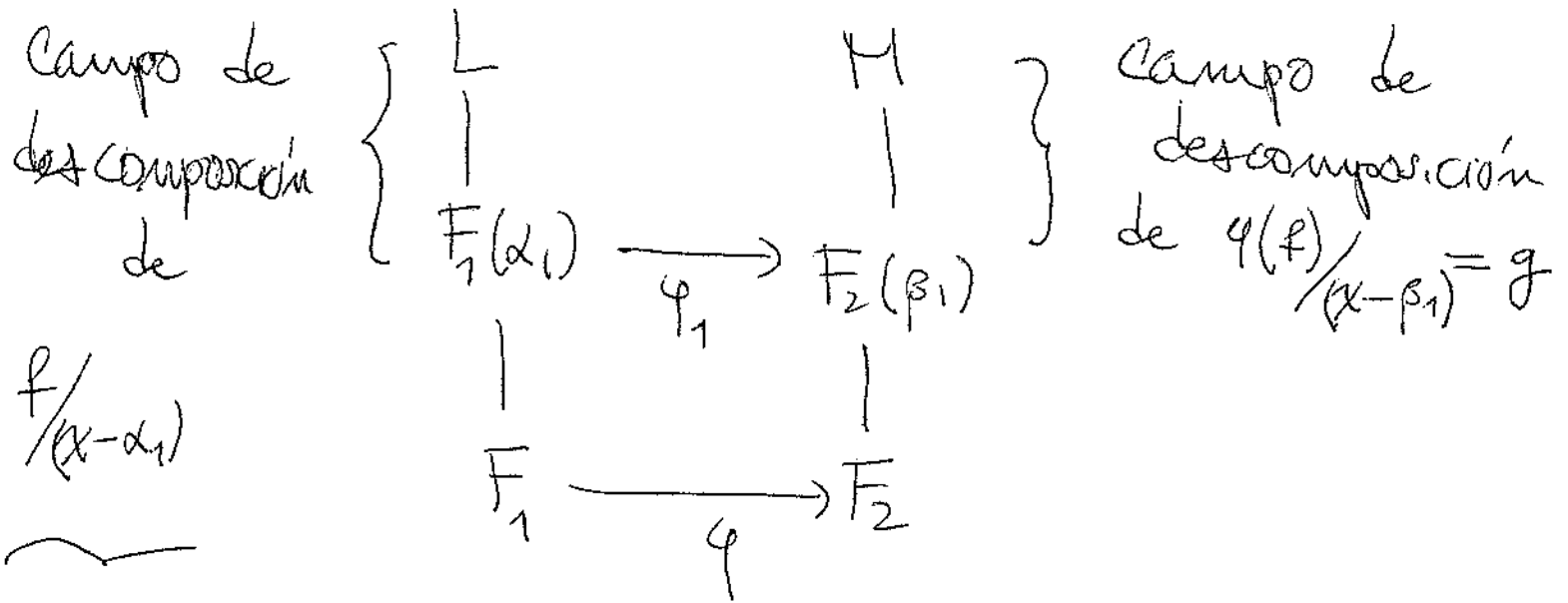
entonces, $\tilde{\varphi} : F(\alpha_1) \xrightarrow{\cong} F(\beta_1)$
 $\alpha_1 \longmapsto \beta_1$

&

$$\tilde{\varphi}|_{F_1} = \varphi$$

Argumento 3) Dado $\varphi_1: F_1(\alpha_1) \xrightarrow{\cong} F_2(\beta_1)$ III

tenemos



y $\varphi_1: F_1(\alpha_1) \xrightarrow{\cong} F_2(\beta_1)$

Hipotesis de inducción a $f/(x-\alpha_1)$ & g
& φ_1 nos da un

$\psi: L \xrightarrow{\cong} M$ tal que

$\psi|_{F_1(\alpha_1)} = \varphi_1$ pero $\varphi_1|_F = \varphi \Rightarrow$

$$\boxed{\psi|_{F_1} = \varphi}$$

entonces ψ es el isomorfismo buscado.

□

CORO: Si F_1 & F_2 son dos campos de descomposición de $f \in F[x]$, entonces \exists

$$\varphi: F_1 \xrightarrow{\cong} F_2 \quad \text{tal que}$$

$$\varphi|_F = \text{Identidad.}$$

Demostración: Aplicar Teorema a $\varphi = \text{Id}$.

Propo.: L campo de φ $\alpha, \beta \in L$
 $|$ descomposición
 F de algún polinomio raíces de un
en $F[x]$. $h \in F[x]$ irreducible/ F .

entonces, $\exists \varphi: L \xrightarrow{\cong} L$ isomorfismo

tal que $\varphi(\alpha) = \beta$ & $\varphi|_F = \text{Identidad}$.

Demostración: h es el polinomio minimal de α & β . Entonces

$$F(\alpha) \cong F[\alpha] \cong F[x] / \langle h \rangle \cong F[\beta] \cong F(\beta)$$

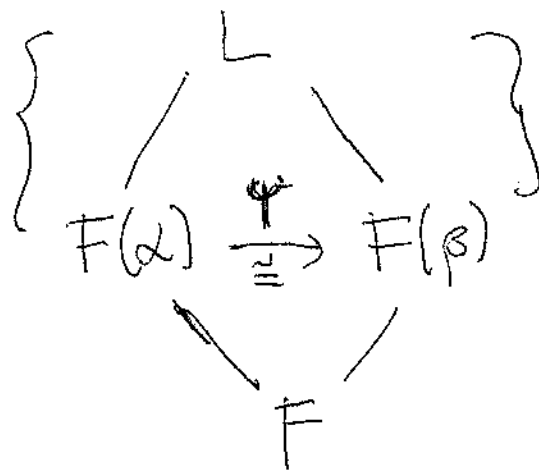
$$\alpha \xrightarrow{\varphi} x + \langle h \rangle \xleftarrow{\varphi'} \beta$$

$$\varphi|_F = \text{Id}$$

$$\varphi'|_F = \text{Id}$$

$$\Rightarrow \exists \psi: F(\alpha) \cong F(\beta) \quad \& \quad \psi|_F = \text{Id}$$

Campo de
descomposi-
ción
de
 $f / F(\alpha)$



Campo de
descomposición
de $f / F(\beta)$

El teorema pasado $\Rightarrow \exists \varphi: L \xrightarrow{\cong} L$

tal que $\varphi|_F = \text{Identidad}$

$$\& \varphi(\alpha) = \beta.$$

