Álgebra Moderna III: 5 de Septiembre

Clase pasada: Campos de descomposición
$\hookrightarrow [L:F] \leq n!$

Hoy: más campos de descomposición.

UNICIDAD DE LOS CAMPOS DE DESCOMPOSICIÓN HASTA POR ISOMORFISMO.

Supongamos $\varphi : F_1 \xrightarrow{\cong} F_2$ iso de campos

si $f \in F_1[x]$, entonces $\varphi(f) \in F_2[x]$.

si L e M campos de descomposición de f e $\varphi(f)$, respectivamente

entonces
$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, dash] & M \arrow[d, dash] \\ F_1 \arrow[r, "\varphi"'] & F_2 \end{tikzcd}$$

Teorema: Sea $f \in F_1[x]$ & $\varphi : F_1 \xrightarrow{\cong} F_2$ como arriba. Entonces existe un isomorfismo $\overline{\varphi} : L \xrightarrow{\cong} M$, tal que $\overline{\varphi}_{|F_1} = \varphi$.

Demostración: Por inducción en el grado $\deg(f) = n > 0$.

$n=1$ ✓ $L \cong F_1 \xrightarrow[\varphi]{\cong} F_2 \cong M$ ✓

supongamos el teorema cierto para $\deg(f) = n-1$. $(n>1)$

Argumentos: •) sabemos $L \cong F_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ con $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ raíces de f.

También sabemos

$$\underbrace{F_1 \subseteq F_1(\alpha_1) \subset L_1}$$ campo de descomposición de $g_1 = f/(x-\alpha_1)$.

Argumento 1) $h =$ polinomio minimal de α_1, entonces

$$F_1(\alpha_1) \cong F_1[\alpha_1] \cong F_1[x]/\langle h \rangle$$

$$\alpha_1 \longmapsto x + \langle h \rangle$$

Argumento 2) si $F_1 \xrightarrow{\varphi} F_2$ isomorfismo de campos

entonces, $F_1[x] \xrightarrow{\tilde{\varphi}} F_2[x]$

$$a_0 + \cdots + a_n x^n \longmapsto \varphi(a_0) + \varphi(a_1)x + \cdots + \varphi(a_n)x^n$$

irreducibles $\longmapsto$ irreducibles

$h \longmapsto \boxed{\text{factor irreducible de } \varphi(f)} = h_2$

Sea β_1 una raíz de h_2. $(= \varphi(h))$

Entonces, $F(\beta_1) = F[\beta_1] \cong F_2[x] / \langle \tilde{\varphi}(h) \rangle$

como $\tilde{\varphi} : F_1[x] \xrightarrow{\cong} F_2[x]$ &

$h \longmapsto \tilde{\varphi}(h)$

entonces, $\tilde{\tilde{\varphi}} : F_1[x] / \langle h \rangle \xrightarrow[\tilde{\varphi}]{\cong} F_2[x] / \langle \tilde{\varphi}(h) \rangle$

entonces, $\tilde{\tilde{\varphi}} : F(\alpha_1) \xrightarrow{\cong} F(\beta_1)$

$\alpha_1 \longmapsto \beta_1$

&

$$\boxed{\tilde{\tilde{\varphi}}\big|_{F_1} = \varphi}$$

Argumento 3) Dado $\varphi_1 : F_1(\alpha_1) \xrightarrow{\cong} F_2(\beta_1)$

tenemos

Campo de descomposición de $f/(x-\alpha_1)$ grado $n-1$

Campo de descomposición de $\varphi(f)/(x-\beta_1) = g$

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, dash] & M \arrow[d, dash] \\ F_1(\alpha_1) \arrow[r, "\varphi_1"'] \arrow[d, dash] & F_2(\beta_1) \arrow[d, dash] \\ F_1 \arrow[r, "\varphi"'] & F_2 \end{tikzcd}$$

y $\varphi_1 . F_1(\alpha_1) \xrightarrow{\cong} F_2(\beta_1)$

Hipotesis de inducción a $f/(x-\alpha_1)$ & g & φ_1 nos da un

$$\psi : L \xrightarrow{\cong} M \quad \text{tal que}$$

$$\psi|_{F_1(\alpha_1)} = \varphi_1 \quad \text{pero } \varphi_1|_F = \varphi \implies$$

$$\boxed{\psi|_{F_1} = \varphi}$$

entonces ψ es el isomorfismo buscado.

$\boxed{\Sigma}$

<u>CORO</u>: Si F_1 & F_2 son dos campos de descomposición de $f \in F[x]$, entonces $\exists$

$$\varphi : F_1 \xrightarrow{\cong} F_2 \quad \text{tal que}$$

$$\varphi|_F = \text{Identidad}.$$

Demostración: Aplicar Teorema a $\varphi = Id$.

<u>Propo</u>: $\begin{array}{c} L \\ | \\ F \end{array}$ campo de descomposición de algún polinomio en $F[x]$. y $\alpha, \beta \in L$ raíces de un $h \in F[x]$ irreducible/F.

entonces, $\exists$ $\varphi: L \xrightarrow{\cong} L$ isomorfismo tal que $\varphi(\alpha) = \beta$ & $\varphi_{|F} = \text{Identidad}$.

Demostración: h es el polinomio mínimo de α & β. Entonces

$$F(\alpha) \cong F[\alpha] \cong F[x]/\langle h \rangle \cong F[\beta] \cong F(\beta)$$

$$\alpha \xmapsto{\ \varphi\ } x + \langle h \rangle \xleftarrow{\ \varphi'\ } \beta$$

$$\varphi_{|F} = Id \qquad \varphi'_{|F} = Id.$$

$\Rightarrow \exists$ $\psi : F(\alpha) \cong F(\beta)$ & $\psi_{|F} = Id.$

Campo de descompos de $f/F(\alpha)$

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ F(\alpha) \arrow[rr, "\varphi'", "\cong"'] \arrow[dr, dash] & & F(\beta) \arrow[dl, dash] \\ & F & \end{tikzcd}$$

Campos de descomposición de $f/F(\beta)$

El teorema pasado $\Rightarrow \exists\ \varphi : L \xrightarrow{\cong} L$

tal que $\varphi|_F =$ Identidad

& $\varphi(\alpha) = \beta$. $\blacksquare$