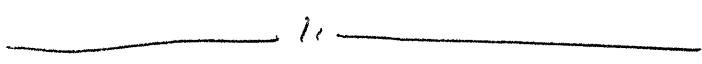
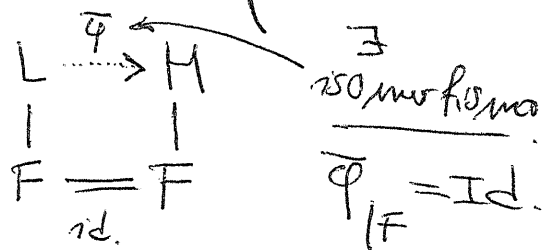


# Algebra Moderna III : 11 Septiembre

clase pasada: Campos de descomposición

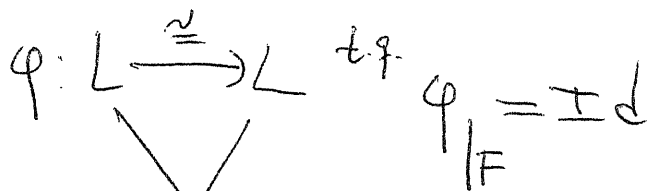
hoy: Extensiones normales



$L$   
 $|$   
 $F$ 
 campo de descomposición de algún polinomio

Pregunta:

¿Cuántos automorfismos



existen?

¿Existe un número finito de ellos?

¿Qué le haces a las raíces de polinomios?

↳ n.e. ¿raíces van a raíces? ...

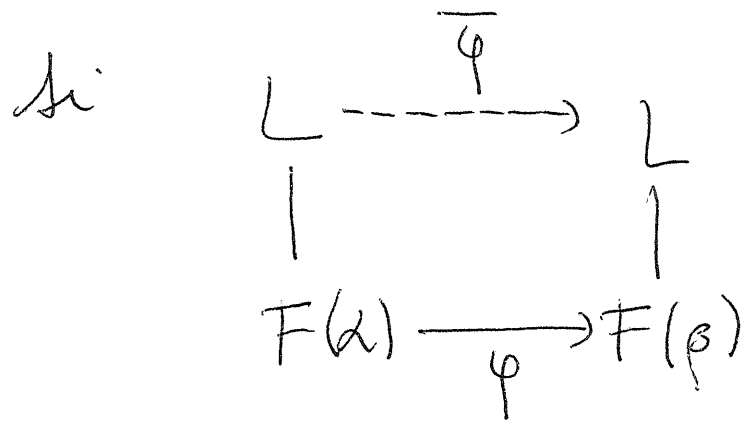
Una respuesta parcial es:

Proposición:  $L$  Campo de  
|  
 $F$  descomposición  
de  
 $f$ .

Supongamos  $h \in F[x]$  irreducible e con  
raíces  $\alpha$  y  $\beta$  en  $L$ . Entonces, existe  
un automorfismo  $\varphi: L \xrightarrow{\cong} L$  t.q.  $\varphi|_F = \text{Id}$ .  
y manda  $\alpha \mapsto \beta$ .

Demostración:  $h$  es el polinomio minimal  
de  $\alpha$  y  $\beta$ , de ahí

$$\left. \begin{array}{l} \xrightarrow{\varphi} \\ F(\beta) \cong F[x]/h \cong F(\alpha) \\ \beta \mapsto x+h \longleftarrow \alpha \end{array} \right\} \begin{array}{l} \varphi(\alpha) = \beta \\ \varphi|_F = \text{Id}. \end{array} \quad \dots$$



Campo de descomposici3n de  $f/F(\alpha)$  o  $f/F(\beta)$

entonces el teorema pasado nos da el isomorfismo que buscamos.  $\square$

————— «————— (Raices Van a Raices)

si en  $L$  campo de descomposici3n de  $g \in F[x]$  y  $\alpha \in L$  es raiz de un polinomio irreducible  $f \in F[x]$

¿es posible que ninguna otra raiz de  $f$  este en  $L$ ?

si este es el caso, para un  $\varphi: L \xrightarrow{\cong} L$   
 $\swarrow \quad \searrow$   
 $F \quad F$   
 tal que  $\varphi|_F = Id$  ¿Que pasa con  $\varphi(\alpha)$ ? ...

Respuesta:

Teorema:  $L$  | campos de  
 $F$  | descomposición  
 de  $f \in F[x]$ . si  $g \in F[x]$  es  
 irreducible y  
 tiene una raíz  
 en  $L$ ,

entonces todas sus raíces están en  $L$ .

Demostración:

$$f = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_m) \text{ en } L$$

$$g(\beta) = 0 \text{ con } \beta \in L = F[\alpha_1, \dots, \alpha_m]$$

por demostrar que toda raíz de  $g$  está en  $L$ .

$$S(x) = \prod_{\sigma \in S_m} (x - h(\alpha_{\sigma(1)}, \dots, \alpha_{\sigma(m)}))$$

$$= \prod_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} (x - h(\alpha_{\sigma(1)}, \dots, \alpha_{\sigma(m)}))$$

$\sigma = id$  dice



$$x - h(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = x - \beta$$

añadamos  
por notación.

$$S(\beta) = 0 \implies$$

$g \mid S(x)$  pues  $g$  es el polinomio minimal de  $\beta$ .

pero  $S(x) = (x - h(\alpha_1, \dots, \alpha_n))(x - h(\alpha_{\sigma(1)}, \dots, \alpha_{\sigma(n)})) \dots$

evidentemente factoriza en  $L$ .

$\implies g$  factoriza en  $L$ .



EJER: Esta prueba tiene un hueco.

¿Cuál es?

¡Resolvete!

VI

Def. Una  $L$  extensión se dice NORMAL  
 $F$  si todo polinomio irreducible/ $F$

que tenga una raíz en  $L$ , factoriza en términos lineales en  $L$ .

CORO:  $L$  extensión campo de descomposición.  $\Leftrightarrow$  normal & finita.

Demostración:  $\Rightarrow$  ✓

$\Leftarrow$ ) finita:  $L = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$   $\alpha_i$  alg/ $F$ .  
sea (grado  $n$ )

$P_i(x)$  = polinomio minimal de  $\alpha_i$   $\Rightarrow$

$f = P_1 \dots P_n$  &  $L$  es el campo de descomposición de  $f$ .

\* Cada  $P_i$  factoriza en términos lineales en  $L$  (normalidad)

$\Rightarrow$   $f$  factoriza en términos lineales en  $L$ .

\*



$$L = F(\alpha_1, \dots, \alpha_m) < K < L$$



Campo  $F$   
 $\oplus$   
raíces de  $f$ .

$$\Rightarrow K = F(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$$

$$\Rightarrow K = L \quad \text{campo de descomposición.}$$

Pregunta: si  $f$  es irreducible/ $F$  &  $\alpha$  una raíz de  $f$  en  $L$ . ¿Puede  $\alpha$  tener multiplicidad mayor a 1?