Álgebra Moderna III: 12 septiembre

Clase pasada: Extensiones normales

Hoy: Extensiones separables y **GEOMETRÍA**

Def: Un polinomio $f \in F[x]$ es separable si todas sus raíces son simples.

Def.- L / F extensión algebraica.

1) $\alpha \in L$ es separable si su polinomio minimal es separable

2) $F < L$ es una extensión separable si todo $\alpha \in L$ es separable$/F$.

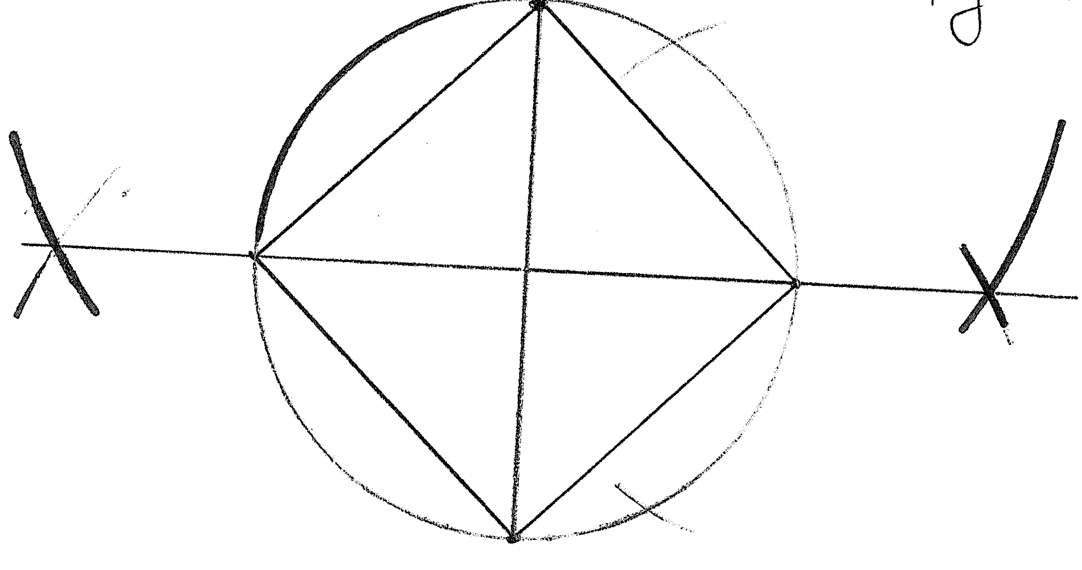
Propo Si F tiene característica cero entonces todo polinomio es separable.

Demostración: tarea

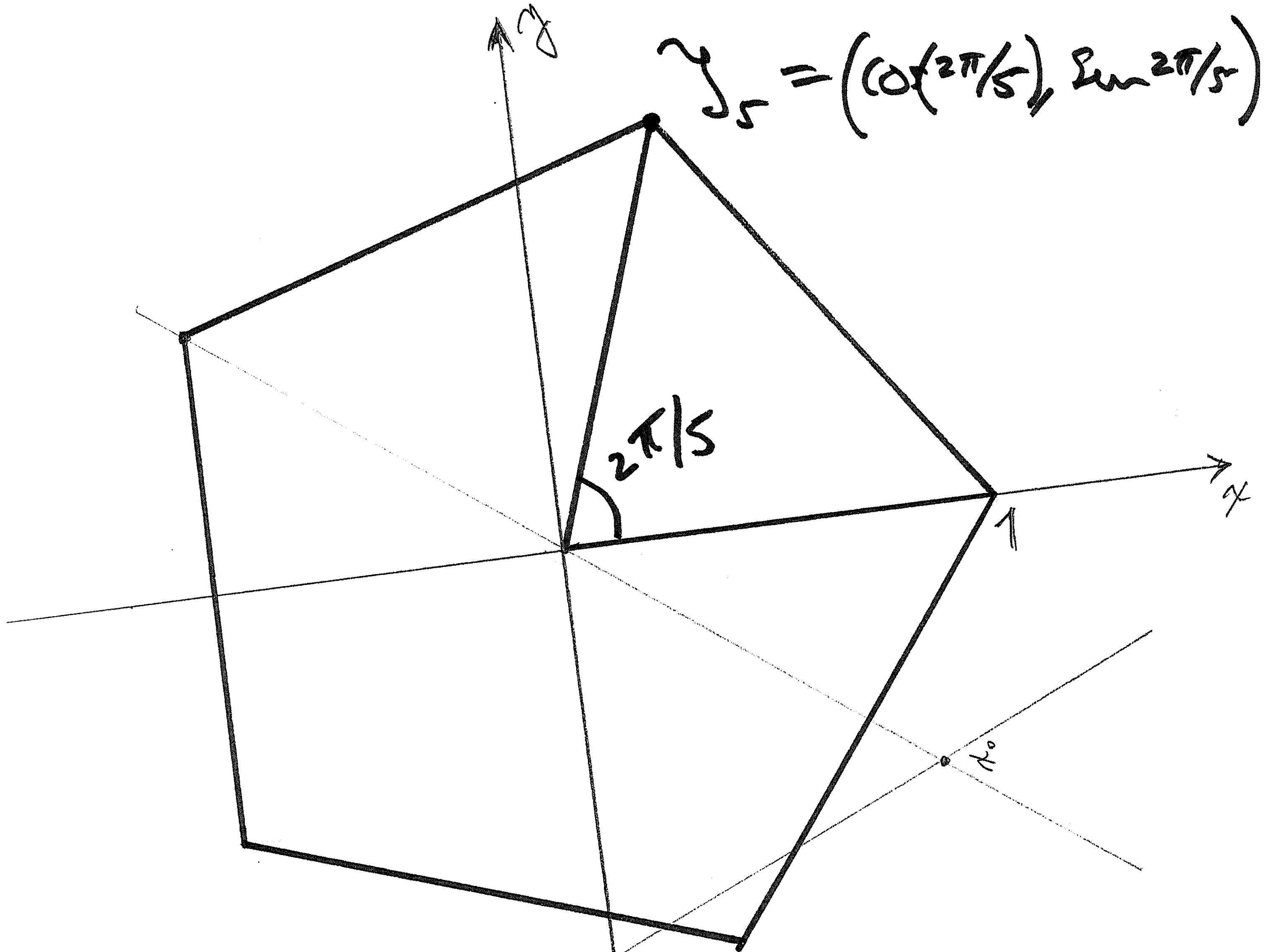
Geometría de regla y compás

raíces de la unidad $x^n = 1$ en $\mathbb{C}$ dividen al círculo en n-partes regulares, i.e., forman un polígono regular de n lados. (¿por qué?).

Eg: $n=4$



$$x^4 - 1 = (x-1)(x+1)\underbrace{(x^2+1)}_{\Phi_4}$$



$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=(x-1)(\Phi_5)$$

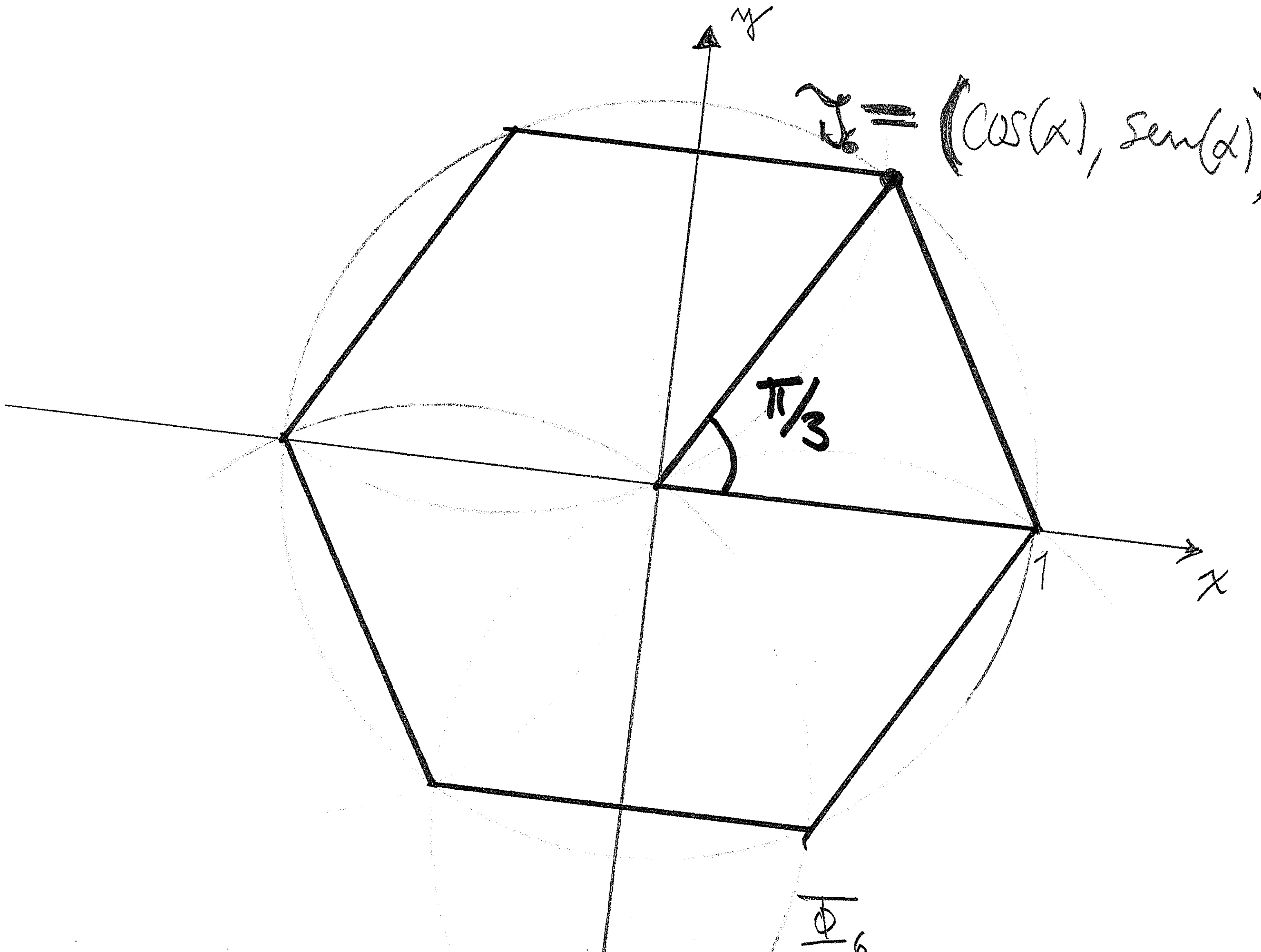
ζ_5 raíz de Φ_5

$$\mathbb{Q}(\zeta_5) \qquad\qquad \mathbb{Q}(\cos 2\pi/5)$$

grado 4	grado 2

$\mathbb{Q}$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{Q}$ pues $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

HEXÁGONO CON REGLA Y COMPÁS



$$x^6-1=(x-1)(x+1)\underbrace{(x^2+x+1)}_{\Phi_3 \,=\, \text{ciclotómico}}\overbrace{(x^2-x+1)}^{\Phi_6}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}(\zeta_6) \arrow[dd, dash] \arrow[dr, dash] & \\
& \mathbb{Q}(\mathrm{sen}(\pi/3)) \\
\mathbb{Q} \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

extensiones de campo.

Dado que podemos partir segmentos en 2 usando regla y compás, podemos construir polígonos regulares con n lados con

$$n = 2, 3, 4, 5, 6, \underline{?}, 8, \underline{?}, 10, \underline{?}, 12, \underline{?}, \ldots$$

¿Cuáles son los valores de n para los cuales podemos construir un polígono regular de n lados con regla y compás?

¿Qué ~~extensiones~~ generan

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}(\cos(\alpha)) & \text{e} & \mathbb{Q}(\operatorname{sen}(\alpha)) \\ | & & | \\ \mathbb{Q} & & \mathbb{Q} \end{array}$$

con $\underline{\underline{\alpha}}$ ángulo de ζ_n (raíz 1^{ra} primitiva de la unidad)?