Álgebra Moderna III : 18 septiembre

Clase pasada: Geometría de regla y compás.

Hoy: Números constructibles

¿Qué polígonos regulares de n lados son construibles con regla y compás?

↳ ¿Qué n's permiten esto?

↳ Analizaremos los vértices de los polígonos constructibles.

Operaciones permitidas:

C1: si $\alpha \neq \beta \in \mathbb{C}$, podemos dibujar una línea l que pasa por α y β.

C2: $\alpha \neq \beta$ & γ, podemos dibujar un círculo C con centro en γ y radio la distancia de α a β.

Con estas construcciones obtenemos más puntos

P1: l_1 & l_2 construidas como en C1.

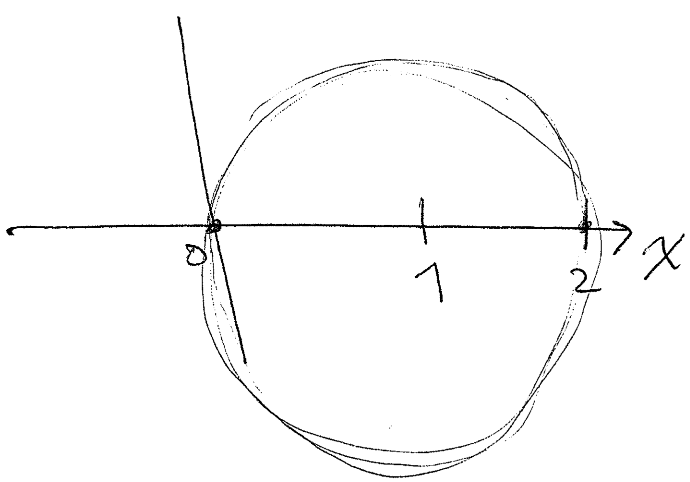
$l_1 \cap l_2 =$ punto nuevo.

P2: $\underset{\text{punto nuevo}}{\underset{\shortparallel}{l_1 \cap C}}$ con l_1 & C construidos como ~~arriba~~. en C1 & C2.

P3: $C \cap C'$ con dos círculos construidos como en C2.

<u>Definición</u>: Un $\alpha \in \mathbb{C}$ es construible si existe una sucesión finita de pasos con regla y compás usando C1, C2, P1, P2, P3 que comienza en 0 & 1 y termina en α.

Ejemplos 1) $\mathbb{Z}$ es construible.



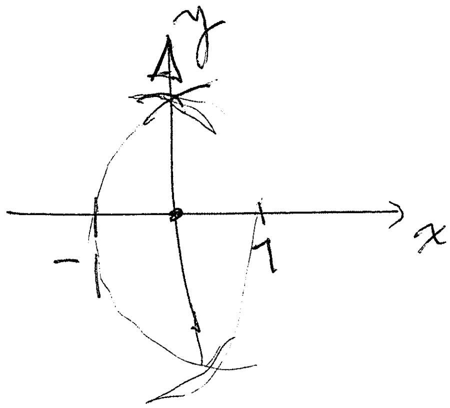
C1 nos da el eje x
C2 nos da # $\underbrace{2 \text{ y } 0.}_{P2}$

$\Downarrow$

2 es construible

iterando esto $\Rightarrow$ cualquier $n \in \mathbb{Z}$ es construible

2) $i \in \mathbb{C}$ es construible:



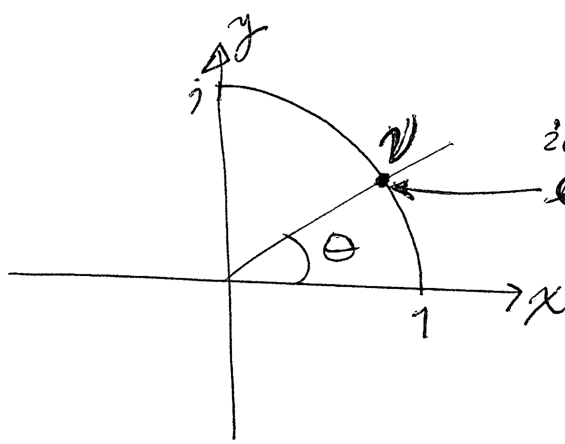
C1: da el eje x

C2: da círculo con centro en ± 1 y radio 2.

P3: da el eje y.

P3 & C2: da $\pm i \in \mathbb{C}$.

3) Supongamos P = polígono regular de n lados es construible. Entonces, v es vértice de P



$e^{i\theta}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\theta = 2\pi/n}$

$\Rightarrow v = e^{i 2\pi/n}$

n-raíz de la Unidad

$\Rightarrow$ $\exp(2\pi i/n)$ es construible.

<u>Teorema:</u> $\mathcal{C} = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha \text{ es construible}\}$.

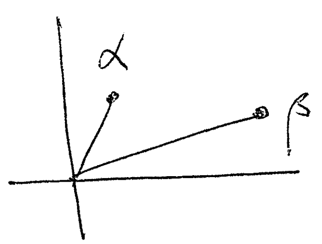
1) $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{C}$ subcampo

2) $\alpha = a + bi \in \mathcal{C}$ **ssi** $a, b \in \mathcal{C}$.

3) $\alpha \in \mathcal{C} \Rightarrow \sqrt{\alpha} \in \mathcal{C}$.

<u>Demostración:</u> i) $\alpha \in \mathcal{C} \Rightarrow -\alpha$. ✓

ii) α, β & 0 no colineales. Entonces

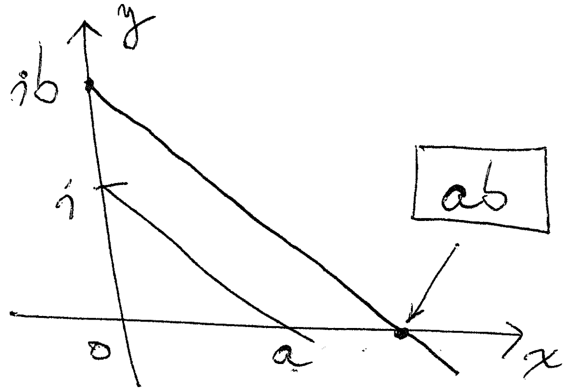


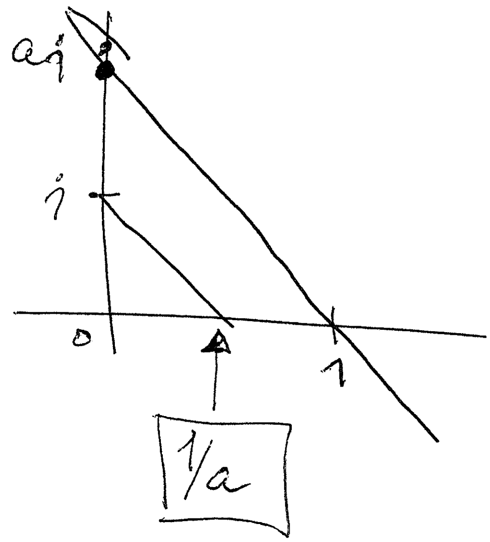
$$C_{|\alpha|} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \alpha| = |\beta|\}$$

$$C_{\beta} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \beta| = |\alpha|\}$$

$$C_{\alpha} \cap C_{\beta} = \{\alpha + \beta, \_\_\_\}$$

Pendiente ver $\mathcal{C}$ es cerrado bajo la multiplicación pero $a, b \in \mathcal{C} \cap \mathbb{R}_{>0}$





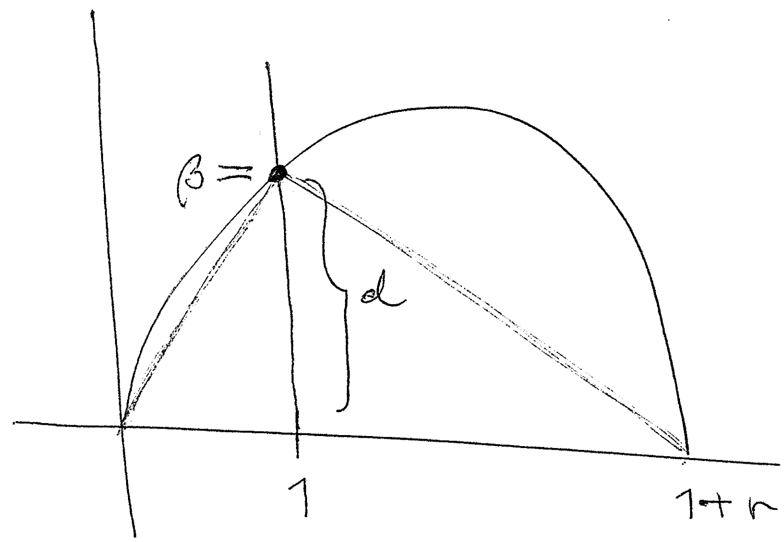
$\Longrightarrow$ $\boxed{\mathcal{C} \cap \mathbb{R}_{>0}}$ es cerrado bajo la mult. & tiene inversos.

$\Longrightarrow$ $\mathcal{C}$ es cerrado bajo la mult. & tiene inversos.

Finalmente, veamos $\sqrt{\alpha} \in \mathcal{C}$ si $\alpha \in \mathcal{C}$.

Suficiente hacerlo en $\mathcal{C} \cap \mathbb{R}_{>0}$.

veamos, $r>0$ constructible



$\boxed{d^2 = r} \Rightarrow \sqrt{r}$ es <u>constructible</u>.

<u>Defi</u> $\mathcal{C}$ le llameremos el campo de números constructibles.

<u>Teorema:</u> $\alpha \in \mathbb{C}$ y α es constructible

<u>ssi</u> $\alpha \in F_n$ donde $[F_i : F_{i-1}] = 2$

$$\begin{array}{c} F_n \\ | \\ F_{n-1} \\ | \\ \vdots \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

$1 \leq i \leq n$.