Álgebra Moderna III: 25 Sep

Clase pasada: $\alpha \in \{\#\text{'s Constructibles}$

$$\Rightarrow \quad [\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = 2^m \qquad m \geq 0.$$

Hoy: Polígonos regulares

—— " ——

Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, Supongamos $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = 2^m$

¿es α constructible?

De momento podemos decir cuando un número (y un polígono) <u>no</u> son construibles.

El siguiente teorema nos dará una pista de cómo caracterizar mejor los números constructibles (y poder decidir cuando un número es constructible).

Teorema (Gauss)
El polígono regular de 17 lados es constructible con regla y compás.

Demostración: Esta prueba es constructiva y cercana a la prueba original de Gauss.

Escribamos

$$\zeta = \cos 2\pi/17 + i \operatorname{sen} 2\pi/17$$

$$\alpha = \zeta + \zeta^{-1}$$

$$\beta = \zeta + \zeta^{4} + \zeta^{-1} + \zeta^{-4}$$

$$\gamma = \zeta + \zeta^{2} + \zeta^{4} + \zeta^{8} + \zeta^{-1} + \zeta^{-2} + \zeta^{-4} + \zeta^{-8}$$

Mostraremos que

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{Q}(\alpha) \\ \quad | \; \text{grado } 2 \\ \mathbb{Q}(\beta) \\ \quad | \; \text{grado } 2 \\ \mathbb{Q}(\gamma) \\ \quad | \; \text{grado } 2 \\ \mathbb{Q} \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha = 2\cos 2\pi/17 \text{ es constructible}$$

Empecemos con γ.

Consideremos

$$\gamma' = \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^6 + \zeta^7 + \zeta^{-3} + \cdots + \zeta^{-7}.$$

Como ζ es raiz de $\Phi_{17}(x) = x^{16} + \cdots + x + 1$

entonces $\gamma + \gamma' = -1$

Mostraremos que $\gamma \cdot \gamma' \in \mathbb{Q}$, lo cual implica que γ es cuadrático/$\mathbb{Q}$ puesto es una raiz de $x^2 - (\gamma + \gamma')x + \gamma\gamma' = 0$.

Afirmación: $\gamma \cdot \gamma' = 4 \sum_{i=1}^{16} \zeta^i = -4$.

Por tanto γ es raiz de

$$x^2 + x - 4 = 0.$$

lo cual implica

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{17}\right) \qquad \left(\text{¡descartamos el raíz negativa!?}\right)$$

Nota: $\gamma = 2\left(\cos 2\pi/17 + \cos 4\pi/17 + \cos 8\pi/17 + \cos 16\pi/17\right)$

~ 1.56155

Segunda extensión: $\mathbb{Q}(\beta) \setminus \mathbb{Q}(\gamma)$.

Escribamos

$$\beta' = \zeta^{2} + \zeta^{8} + \zeta^{-2} + \zeta^{-8}$$

Entonces $\beta + \beta' = \gamma$, además $\beta \cdot \beta' = -1$

así β es raíz de

$$x^2 - \gamma x - 1 = 0.$$

Por tanto

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2+4}\right),$$

$$= \frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{17} + \sqrt{34-2\sqrt{17}}\right).$$

NOTA: $\beta = 2\left(\cos 2\pi/17 + \cos 8\pi/17\right)$

$\sim 2.04948.$

aún sin argumento

PAUSA: afirmamos $\mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}\left(\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right)$

$$\begin{array}{c} \mathbb{Q}(\beta) \\ | \\ \mathbb{Q}(\alpha) \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

Cada una de grado 2 sobre la previa.

$\mathbb{Q}(\beta) \stackrel{?}{=} \mathbb{Q}\left(\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right)$

argumento: sea

$x = \sqrt{17} + \sqrt{34-2\sqrt{17}}$ lo cual

nos dice que

$$x^4 - 6\cdot 17 x^2 + 8\cdot 17 x + 13\cdot 17 = 0$$

que además es irreducible/$\mathbb{Q}$ por el criterio de Eisenstein.

Por tanto $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = 4.$

como $\beta \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right)$ el cual

tiene grado 4 $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}(\beta) \subset \mathbb{Q}\left(\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right)$

y el argumento está completo.

Veamos ahora la tercera extensión

$$\mathbb{Q}(\alpha) \setminus \mathbb{Q}(\beta).$$

Escribimos $\alpha' = \gamma^4 + \gamma^{-4}$.

$$\alpha + \alpha' = \beta$$

$$\alpha \cdot \alpha' = \gamma^3 + \gamma^5 + \gamma^{-3} + \gamma^{-5}$$

Escribamos

$$(\alpha \cdot \alpha')' = \gamma^6 + \gamma^7 + \gamma^{-6} + \gamma^{-7}$$

$$\alpha\alpha' + (\alpha \cdot \alpha')' = \gamma'$$

$$(\alpha \cdot \alpha')(\alpha \cdot \alpha')' = \sum_{i=1}^{16} \gamma^i = -1$$

Por tanto $\alpha \cdot \alpha'$ es raíz de

$$x^2 - \gamma' x - 1 = 0.$$

y tenemos

$$\alpha\cdot\alpha' = \frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right).$$

<u>NOTAR</u>: $\left(\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right)\left(\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right) = 8\sqrt{17}$

$$\Rightarrow \alpha\cdot\alpha' \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right) = \mathbb{Q}(\beta)$$

Ahora, α satisface

$$x^2 - \beta x + \alpha\cdot\alpha' = 0$$

Por lo tanto es cuadrático$/\mathbb{Q}(\beta)$ y

además $\alpha = 2\cos 2\pi/17$

$$= \frac{1}{8}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}+\sqrt{170-26\sqrt{17}}-\cdots\right.$$

$$\left.\cdots 4\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\right)$$

$$\alpha = 2\cos 2\pi/17$$

$$\sim 1.86494$$

Solo falta ~~pro~~ mostrar que $\mathbb{Q}(\alpha) \setminus \mathbb{Q}(\beta)$

observar que

$$\alpha = \zeta + \zeta^{-1}$$

$$\alpha^2 = \zeta^2 + 2 + \zeta^{-2}$$

$$\alpha^4 = \zeta^4 + 4\zeta^2 + 6 + 4\zeta^{-2} + \zeta^{-4}$$

portanto

$$\beta = \alpha^4 - 4\alpha^2 + \alpha + 2 = \zeta + \zeta^4 + \zeta^{-1} + \zeta^{-4}$$

$$\in \mathbb{Q}(\alpha).$$