UNIVERSIDAD AUTÓNOMA “BENITO JUÁREZ” DE OAXACA

Álgebra moderna III: tarea 10

Fecha de entrega: 14 de diciembre, 2017

EJERCICIO 1

Sea α raíz del polinomio
$$f(x) = x^5 - 6x + 3.$$
¿Es α un número complejo que se puede obtener mediante radicales?

EJERCICIO 2

Argumentar a favor o en contra: ¿existe un polinomio irreducible $f \in \mathbb{Q}[x]$ que tenga raíces radicales y también raíces no radicales?

EJERCIOCIO 3

Sea $\Phi_p(x)$ polinomio ciclotómico con $p \in \mathbb{Z}$ primo. Mostrar que existe una fórmula, que sólo involucra radicales, para expresar las raíces de Φ_p en términos de sus coeficientes. Es decir, $\Phi_p(x)$ es soluble por radicales. ¿Qué radicales son necesarios?

Sumas cuadráticas de Gauss

Sea ζ una p-ésima raíz primitiva de la unidad con $p = 3, 5, 7, 11, 17$. Evaluar la suma[1]

$$g = \sum_{a=1}^{p-1} \left(\frac{a}{p}\right) \zeta^a.$$

Ejercicio 5

Para $p = 7, 11, 13, 17$, sea $G = (\mathbb{Z}/p)^*$ el grupo ciclíco de unidades de $\mathbb{Z}/p$. Definamos el sub conjunto H como

$$H = \{q \in G \mid q \text{ es residuo cúbico}\}.$$

¿Es H sub grupo de G? si lo es, ¿cuál es el índice $[G : H]$?

Ejercicio 5 bis

Sea $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\zeta_7) = L$ extensión ciclotómica y $\mathbb{Q} \subset L_H \subset \mathbb{Q}(\zeta_7)$, donde $H \subset (\mathbb{Z}/7)^*$ es como en el ejercicio anterior. Del ejercicio anterior se sigue que $L_H = \mathbb{Q}(\tau)$ para algún τ, ¿cuál? Mostrar[2] que $\sigma_q \in \mathrm{Gal}(L \backslash L_H)$ si y solo si $\sigma_q(\tau) = \tau$ y esto es si y solo si $q \in (\mathbb{Z}/7)^*$ es residuo cúbico.

¿Y con un poco más de generalidad?: para p, q primos distintos y $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\tau) \subset \mathbb{Q}(\zeta_p)$, tal que $[\mathbb{Q}(\tau) : \mathbb{Q}] = 3$. ¿Es $\tau = \sqrt[3]{d}$, para algún entero d?

Punto extra

Consideremos una familia de polinomios $f_y(x) = x^5 - 3xy + y$, donde $y \in \mathbb{Z}$. Escribamos

$$\chi(y) = |\mathrm{Gal}(f_y)|$$

donde $\mathrm{Gal}(f_y)$ es el grupo de Galois de $f_y \in \mathbb{Q}[x]$. ¿Cómo se ve la gráfica de χ en $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$? ¿Qué significan los ceros de χ para las raíces de f?

---

[1] *Pista: esta suma es igual a la raíz cuadrada de $\pm$ un número primo.*

[2] El automorfismo $\sigma_q \in \mathrm{Gal}(L \backslash \mathbb{Q})$ está definido por mandar ζ a ζ^q.