UNIVERSIDAD AUTÓNOMA "BENITO JUÁREZ" DE OAXACA

Álgebra moderna III: tarea 2

Fecha de entrega: 7 de septiembre, 2017

EJERCICIO 1

Probar que $x^4 - 10x^2 + 1$ es irreducible sobre los números racionales.

EJERCICIO 2

Sean α y β números complejos algebraicos sobre $\mathbb{Q}$. Probar o refutar que $\alpha.\beta$ y $1/\alpha$ son algebraicos sobre $\mathbb{Q}$.

EJERCICIO 3

Sea $L\backslash K$ una extensión de campos y $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$. Mostrar que $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es campo.

EJERCICIO 4

Calcular los grados de las siguientes extensiones.

- $\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})\backslash\mathbb{Q}$
- $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})\backslash\mathbb{Q}$
- $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2+\sqrt{2}})\backslash\mathbb{Q}$
- $\mathbb{Q}(\omega, \sqrt[3]{2})\backslash\mathbb{Q}$, donde $\omega = e^{2\pi i/3}$.

Ejercicio 5

Sean $L\backslash K\backslash F$ extensiones de campos finitas. Argumentar en favor o en contra de la siguiente ecuación

$$[L:F] = [L:K][K:F].$$

Ejercicio 6

Sea $f \in \mathbb{Q}$ el polinomio mínimo de $\alpha = \sqrt{2+\sqrt{2}}$. ¿Factoriza f completamente en el campo $\mathbb{Q}(\alpha)$?

Ejercicio 7

Sea $f(x) = x^3 - x + 1 \in \mathbb{Z}/3[x]$. Mostrar que f es irreducible sobre $\mathbb{Z}/3$. Sea α un a raíz de f. Mostrar que $[\mathbb{Z}/3(\alpha) : \mathbb{Z}] = 3$. ¿El polinomio f factoriza completamente en el campo $\mathbb{Z}(\alpha)$? ¿Cuál es la cardinalidad del campo $\mathbb{Z}/3(\alpha)$?

Extra

Recordar que $\alpha \in \mathbb{C}$ es un entero algebraico si satisface un polinomio mónico con coeficientes en $\mathbb{Z}$. Por otro lado, es también un número algebraico sobre $\mathbb{Q}$. ¿Tendrá el polinomio mínimo de α coeficientes enteros?

Exposiciones

- Mostrar que $\overline{\mathbb{Q}}\backslash\mathbb{Q}$ no es una extensión finita.
- Sea $f \in \mathbb{Q}[x]$ irreducible de grado 3. Describir el criterio para saber si f tiene 3 raićes distintas.