UNIVERSIDAD AUTÓNOMA "BENITO JUÁREZ" DE OAXACA

Álgebra moderna III: tarea 4

Fecha de entrega: 25 de septiembre, 2017

EJERCICIO 1

Sea C una circunferencia de radio 1. Construir la línea tangente a C en un punto dado $p \in C$ con regla y compás.

EJERCICIO 2

Construir polígonos regulares de $4, 5, 6, 8, 10$ y 12 lados con regla y compás.

EJERCICIO 3

Sea $\zeta_5 = e^{2\pi/5}$ raíz de $\Phi_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ polinomio ciclotómico. Mostrar que Φ_5 es soluble por radicales. Es decir,

$$\begin{aligned} \zeta_5 &= \cos(2\pi/5) + i\sin(2\pi/5) \\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}. \end{aligned}$$

EJERCICIO 4

Sea ζ_5 como en el ejercicio anterior. Mostrar que $\mathbb{Q}(\zeta_5) = \mathbb{Q}(\xi)$, donde $\xi = \frac{i}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$. ¿Cuál es el polinomio minimal de ξ?

UN POLINOMIO DE GRADO 6 SOLUBLE POR RADICALES

Sea ζ_7 raíz del polinomio $\Phi_7(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Dividiendo Φ_7 por x^3, tenemos

$$x^3 + x^2 + x + 1 + x^{-1} + x^{-2} + x^{-3}.$$

Usar esto para demostrar que $\eta = \zeta_7 + \zeta_7^{-1} = 2\cos(2\pi/7)$ satisface la ecuación

$$y^3 + y^2 - 2y - 1.$$

Concluir que $[\mathbb{Q}(\eta) : \mathbb{Q}] = 3$.
Aplicar la formular de Cardano para η y deducir que

$$\eta = \frac{1}{3}\left(-1 + \sqrt[3]{\frac{7}{2}(1+3i\sqrt{3})} + \sqrt[3]{\frac{7}{2}(1-3i\sqrt{3})}\right).$$

CONTINUACIÓN DEL EJERCICIO ANTERIOR

Mostrar que ζ_7 es raíz de $x^2 - \eta x + 1 \in \mathbb{Q}(\eta)[x]$ y deducir que $\zeta_7 = 1/2(\eta + \sqrt{\eta^2 - 4})$. Usando la expresión de η del ejercicio anterior deducir que ζ_7 se puede escribir con radicales como [1]

$$\begin{aligned}\zeta_7 &= \cos(2\pi/7) + i\sin(2\pi/7)\\ &= \frac{1}{6}\left(-1 + \sqrt[3]{\frac{7}{2}(1+3i\sqrt{3})} + \sqrt[3]{\frac{7}{2}(1-3i\sqrt{3})}\right) + \frac{i}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{7}{2}(1+3i\sqrt{3})} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{7}{2}(1-3i\sqrt{3})}\right)^2}\end{aligned}$$

Con esto acabamos de escribir una solución al polinomio $\Phi_7(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ usando radicales.

EXPOSICIONES

Sea n un número para el cual sabemos construir un polígono regular de n lados con regla y compás (eg. $n = 3, 4, 5, 6, \_, 8, \_, 10,$, etc).

- ¿Cuál es el grado de la extensión $[\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}]$, donde ζ_n es una n-ésima raíz de la unidad.

[1] $\cos(2\pi/7)$ es aproximadamente 0.623489.