UNIVERSIDAD AUTÓNOMA "BENITO JUÁREZ" DE OAXACA

Álgebra moderna III: tarea 7

Fecha de entrega: 6 de noviembre, 2017

EJERCICIO 1

Mostrar que la ecuación $x^p - 1 = 0$, con $p \in \mathbb{Z}$ primo, es una ecuación abeliana.

EJERCICIO 2

Considerar $x^p - 2$ sobre $\mathbb{Q}$. Mostrar que su campo de descomposición L está dado por

$$L = \mathbb{Q}(\sqrt[p]{2}, \zeta_p \sqrt[p]{2}, \zeta_p^2 \sqrt[p]{2}, \ldots, \zeta_p^{p-1} \sqrt[p]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[p]{2}, \zeta_p).$$

En particular esta extensión tiene grado igual a $[L : \mathbb{Q}] = p(p-1)$.

GRUPO DE GALOIS DE UNA EXTENSIÓN RADICAL SIMPLE

Considerar el campo $L = \mathbb{Q}(\sqrt[p]{2}, \zeta_p)$ y sea $\sigma \in \mathrm{Gal}(L\backslash\mathbb{Q})$. Exhibir dos enteros i, j tal que σ esté determinada por ellos unívocamente.
Sugerencia: $\sigma(\zeta_p) = ?$ *y* $\sigma(\sqrt[p]{2}) = ?$

EJERCICIO 4

Sean (i, j) los enteros del ejercicio anterior. Mostrar que

$$(i, j) \in \{1, \ldots, p-1\} \times \{0, \ldots, p-1\},$$

y que todos los pares posibles ocurren. Concluir que estos pares (i, j) parametrizan a todos los elementos de $\mathrm{Gal}(L\backslash\mathbb{Q})$, donde L es como en el ejercicio anterior.

EJERCICIO 5

Toda la notación es como en el ejercicio anterior. Si escribimos $\sigma = \sigma_{i,j}$ y $\tau = \tau_{r,s}$ elementos de $\mathrm{Gal}(L\backslash\mathbb{Q})$, entonces ¿qué par de enteros (n, m) le asociamos a $\sigma\cdot\tau$ en términos de (i, j, r, s)?

EJERCICIO 6

Sean $a, b \in \mathbb{F}_p$. Definimos la aplicación $\gamma_{a,b} : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$ como $\gamma_{a,b}(u) = au + b$. Si $a \neq 0$, El conjunto $AGL(1,\mathbb{F}_p)$ de todas las $\gamma_{a,b}$ es un grupo bajo la composición, ¿de qué orden?

EJERCICIO 7

La notación es como en el ejerciocio 3. Usar los ejecicios anteriores para mostrar que

$$\mathrm{Gal}(L\backslash\mathbb{Q}) \cong AGL(1,\mathbb{F}_p).$$

En particular, verificar que $\mathrm{Gal}(L\backslash\mathbb{Q})$ no es abeliano.[1]

EXPOSICIONES

La notación es como en el ejercicio 3. Mostrar que

$$AGL(1,\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p \rtimes \mathbb{F}_p^*.$$

[1] Observar el ejercicio 1 de esta lista.