UNIVERSIDAD AUTÓNOMA "BENITO JUÁREZ" DE OAXACA

Álgebra moderna III: tarea 8

Fecha de entrega: 16 de noviembre, 2017

PREGUNTA

Considere un polinomio f de grado 5, y cuyos coeficientes son 1's ó -1's pero tal que el coeficiente de cada x^k se determina de manera aleatórea.[1] Por ejemplo, uno de estos polinomios es

$$f(x) = -x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - x - 1.$$

Haciendo esta asignación aleatórea de coeficientes, generamos polinomios de grado 5.

¿Qué grado tiene el campo de descomposición de f con más frecuencia?
¿Qué grupo de Galois aparece aquí con más frecuencia?

EJERCICIO 1

Dada una extensión finita $F \subset L$ y un subgrupo $H < \mathrm{Gal}(L\backslash F)$, mostrar que

$$L_H = \{\alpha \in L \mid \sigma(\alpha) = \alpha \text{ para todo } \sigma \in \mathrm{Gal}(L\backslash F)\}$$

es un sub campo de L que contiene a F.

CERRADURA NORMAL

Considere la extensión $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Construir una extensión $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subset M$ tal que la extensión $\mathbb{Q} \subset M$ sea normal y que además M sea el campo más pequeño[2] con dicha propiedad.

[1] por ejemplo con un volado usando una moneda de un peso donde aguila es -1 y sol es 1.
[2] *Más pequeño* en el mismo sentido que el de de campo de descomposición.

Ejercicio 3

Decidir cuál de las siguientes extensiones es de Galois:

- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$.
- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ donde α, β son raíces distintas de $x^3 + 2x^2 + x + 1$.

Ejercicio 4

Argumentar a favor o en contra de la siguiente afirmaciones:

- Todas las extensiones de campo de grado dos son de Galois.
- Todas las ecuaciones abelianas inducen extensiones de Galois.
- Todas las extensiones ciclotómicas son de Galois.

Correspondencia de Galois

- Describir todos los subgrupos del grupo de Galois de la extensión $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.
- Exhibir los campos fijados por los sub grupos del inciso de arriba como subcampos de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.
- Los subcampos del inciso de arriba ¿son todos los subcampos de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$? Argumentar a favor o en contra.

Correspondencia de Galois

- Describir todos los subgrupos del grupo de Galois de la extensión $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\zeta_7)$ donde ζ_7 es una 7-éptima raíz primitiva de la unidad.
- Exhibir los campos fijados por los sub grupos del inciso de arriba como subcampos de $\mathbb{Q}(\zeta_7)$.
- Los subcampos del inciso de arriba ¿son todos los subcampos de $\mathbb{Q}(\zeta_7)$? Argumentar a favor o en contra.

- Describir todos los subgrupos del grupo de Galois de la extensión $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\zeta_3, \sqrt[3]{2})$ donde ζ_3 es una raíz primitiva de la unidad.
- Exhibir los campos fijados por los sub grupos del inciso de arriba como subcampos de $\mathbb{Q}(\zeta_3, \sqrt[3]{2})$.
- Los subcampos del inciso de arriba ¿son todos los subcampos de $\mathbb{Q}(\zeta_3, \sqrt[3]{2})$? Argumentar a favor o en contra.