Álgebra Moderna III: 6 noviembre

Clase pasada: Ecuaciones abelianas

Hoy: Correspondencia de Galois

Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ número algebraico. Es decir

$f(\alpha) = 0$ con $f \in \mathbb{Q}[x]$.

¿es $\mathbb{Q}(\alpha)$ normal? ¿bajo qué condiciones lo es?

si lo es

Calculamos, $Gal(f) = Gal(E \setminus \mathbb{Q})$

con E = campo de descomposición de f.

¿Que información tiene $Gal(f)$ de α?

Def.: $\begin{array}{c} L \\ | \\ F \end{array}$ extensión finita de campos

Dado $H < Gal(L \backslash F)$ subgrupo,

$$L_H := \{\alpha \in L \mid \sigma(\alpha) = \alpha \quad \forall \sigma \in H\}$$

le llamamos el campo fijado por H.

Teorema: $\begin{array}{c} L \\ | \\ F \end{array}$ extensión finita. Entonces

1) L es el campo de descomposición de algún $f \in F[x]$

ssi

2) F es el campo fijo de $Gal(L \backslash F)$ actuando en L

ssi

3) $\begin{array}{c} L \\ | \\ F \end{array}$ es normal & separable.

Demostración: Veamos 1) ⇒ 2)

Sea K el campo fijado por $Gal(L\backslash F)$.

Sabemos $F < K < L$.

=EJER=

Se sigue que

$$[L:F] = |Gal(L\backslash F)| \qquad [L:K] = |Gal(L\backslash K)|$$

Observar que $Gal(L\backslash K) < Gal(L\backslash F)$ &

por hipótesis $Gal(L\backslash K) > Gal(L\backslash F)$.

$$\Rightarrow \quad \underbrace{|Gal(L\backslash K)|}_{[L:K]} = \underbrace{|Gal(L\backslash F)|}_{= [L:K][K:F]}$$

$$\Rightarrow [K:F] = 1 \quad \Rightarrow \quad K = F.$$

2) ⟹ (3) Sea $\alpha \in L$. Encontraremos el polinomio mínimal de α con un argumento de Lagrange: $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n$ elementos distintos de L obtenidos aplicando $Gal(L \backslash F)$ a α. Consideremos

$$h(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i) \in L[x]$$

Afirmamos que $h \in F[x]$ y que es irreducible$/F$.

↳ $h(\sigma(\alpha)) = 0 \Rightarrow$ coeficientes de h están contenidos en F. (campo fijo por Gal)

$\Rightarrow$ $\underline{h \in F[x]}$.

↳ irreducibilidad: $g \in F[x]$ factor irreducible de h.

III

entonces $g(\alpha) = g(\sigma(\alpha)) = 0$ $\forall \sigma \in Gal(L|F)$.

$\Rightarrow g \mid h$ por definición &

$h \mid g$ por construcción.

$\Rightarrow h = g$ y por tanto irreducible$/_F$.

$\Rightarrow h$ es el polinomio minimal de α

es separable por construcción, y factoriza completamente en L.

$\Rightarrow L$ es normal & separable pues $\alpha \in L$ fue arbitrario.

3) $\Rightarrow$ 1) = EJERCICIO =

$\blacksquare$

Def: Una extensión se llama de Galois si es finita y satisface cualquier condición del teorema anterior.

Eg:

$$\begin{array}{c} \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

es Galois pues el campo de descomposición de $(x^2-2)(x^2-3) \in \mathbb{Q}[x]$.

$$\begin{array}{c} \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

NO es Galois pues x^3-2 es irreducible$/\mathbb{Q}$ tiene una raiz en $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ pero no las otras (por tanto no es normal).

Eg:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2}) \arrow[dl, dash, "¿?"'] \arrow[dr, dash, "¿?"] & \\
\mathbb{Q}(i) \arrow[dr, dash, "\text{ES Galois}"'] & & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \arrow[dl, dash, "\text{NO ES Galois}"] \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

campo de descomposición de $x^4-2 \in \mathbb{Q}[x]$. por tanto Galois.

Proposición: $\begin{array}{c} L \\ | \\ F \end{array}$ Galois que tiene un campo intermedio K.

$\Rightarrow$ $\begin{array}{c} L \\ | \\ K \end{array}$ es Galois.