

Álgebra Moderna III: 6 noviembre

Clase pasada: Ecuaciones abelianas

Hoy: Correspondencia de Galois

————— " —————

Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ número algebraico. Es decir

$$f(\alpha) = 0 \text{ con } f \in \mathbb{Q}[x].$$

¿es $\mathbb{Q}(\alpha)$ normal? ¿bajo qué condiciones lo es?

si lo es

Calculamos, $\text{Gal}(f) = \text{Gal}(E \mid \mathbb{Q})$

con $E =$ campo de descomposición de f .

¿Que información tiene $\text{Gal}(f)$ de α ?

Def: $\begin{array}{c} L \\ | \\ F \end{array}$ extensión finita de campos

Dado $H < \text{Gal}(L/F)$ subgrupo,

$$L_H := \{ \alpha \in L \mid \sigma(\alpha) = \alpha \quad \forall \sigma \in H \}$$

le llamamos el campo fijado por H .

Teorema: $\begin{array}{c} L \\ | \\ F \end{array}$ extensión finita. Entonces

1) L es el campo de descomposición de algún $f \in F[x]$

ssi

2) F es el campo fijo de $\text{Gal}(L/F)$ actuando en L

ssi

3) $\begin{array}{c} L \\ | \\ F \end{array}$ es normal & separable.

2) \Rightarrow (3) Sea $\alpha \in L$. Encontraremos el polinomio minimal de α con un argumento de Lagrange: $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n$ elementos distintos de L obtenidos aplicando $\text{Gal}(L/F)$ a α . Consideremos

$$h(x) = \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i) \in L[x]$$

Afirmamos que $h \in F[x]$ y que es irreducible/ F .

$\hookrightarrow h(\sigma(\alpha)) = 0 \Rightarrow$ coeficientes de h están contenidos en F . (campo fijo por Gal)

$\Rightarrow \underline{h \in F[x]}$.

\rightarrow irreducibilidad: $g \in F[x]$ factor irreducible de h .

entonces $g(\alpha) = g(\sigma(\alpha)) = 0 \quad \forall \sigma \in \text{Gal}(L/F)$. III

$\Rightarrow g \mid h$ por definición $\&$

$h \mid g$ por construcción. \leftarrow

$\Rightarrow h = g$ y por tanto irreducible/F.

$\Rightarrow h$ es el polinomio minimal de α
es separable por construcción, y factoriza
completamente en L .

$\Rightarrow L$ es normal $\&$ separable pues $\alpha \in L$
fue arbitrario.

3) \Rightarrow 1) = EJERCICIO =



Def: Una extensión se llama de Galois si es finita y satisface cualquier condición del teorema anterior.

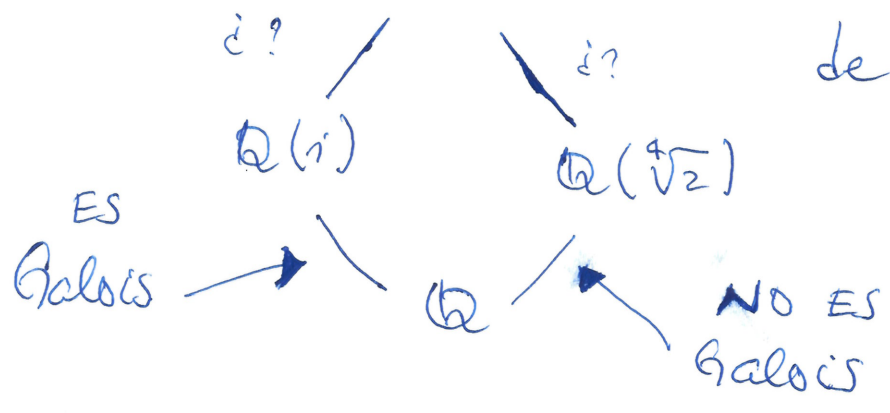
Eg: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$
 \mathbb{Q} es Galois por ser el campo de descomposición de $(x^2-2)(x^2-3) \in \mathbb{Q}[x]$.

$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$
 \mathbb{Q} NO es Galois por ser x^3-2 es irreducible/ \mathbb{Q} tiene una raíz en $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ pero no las otras (por tanto no es normal).

Eg:

$$\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$$

campo de descomposición
de $x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$.
por tanto
Galois.



Proposición: L
|
 F Galois que tiene un
campo intermedio K .

\Rightarrow L
|
 K es Galois.