Álgebra Moderna III : 7 noviembre

Clase pasada: Correspondencia de Galois (Campo fijado por $H < Gal$)

Hoy: Correspondencia de Galois II (subgrupos normales & Extensiones normales)

Def.- $\begin{array}{c} L \\ | \\ K \\ | \\ F \end{array}$ extensiones finitas de campos, para algún $\sigma \in Gal(L \backslash F)$

llamamos a

$$\sigma \cdot K = \{ \sigma(\alpha) \mid \alpha \in K \}$$

el conjugado de K.

Observar:

$$\begin{array}{c} L \\ | \\ \sigma K \\ | \\ F \end{array} \quad \& \quad [K:F] = [\sigma K : F]$$

Argumento: $\sigma|_F = Id \Rightarrow \begin{array}{c} \sigma K \\ | \\ F \end{array}$

$\sigma : L \xrightarrow{\cong} L \Rightarrow \sigma K \subset L$

$$\begin{array}{c} L \\ | \\ \sigma K \\ | \\ F. \end{array}$$

$\sigma|_K : K \longrightarrow \sigma K$ lineal$/F$. inyectiva & supreyectiva en su imagen. $\Rightarrow$

$$[K:F] = [\sigma K : F].$$

Eg: $\mathbb{Q}(\omega, \sqrt[3]{2})$ = Campo de descomposición de x^3-2.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \mathbb{Q}(\omega, \sqrt[3]{2}) \arrow[dll, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{Q}(\omega) \arrow[drr, dash] & \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \arrow[dr, dash] & \mathbb{Q}(\omega\sqrt[3]{2}) \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}(\omega^2\sqrt[3]{2}) \arrow[dl, dash] \\
 & & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

$\omega = e^{2\pi i/3}$

$\sigma \in Gal(\omega, \sqrt[3]{2})$ $\qquad \sigma(\omega) \in \{\omega, \omega^2\}$

$\sigma(\sqrt[3]{2}) \in \{\sqrt[3]{2}, \omega\sqrt[3]{2}, \omega^2\sqrt[3]{2}\}$

$\Rightarrow$ σ está determinada por $i, j \in \mathbb{Z}$

$\sigma(\omega) = \omega^i \qquad i \in \{1,2\}$

$\sigma(\sqrt[3]{2}) = \omega^j\sqrt[3]{2} \qquad j \in \{0,1,2\}$

$\Rightarrow$ $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ conjuga a $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $\mathbb{Q}(\omega\sqrt[3]{2})$, $\mathbb{Q}(\omega^2\sqrt[3]{2})$

Punto de inflexión:

$$\left.\begin{array}{c} L \\ | \\ K \\ | \\ F \end{array}\right\} \quad Gal(L\backslash K) < Gal(L\backslash F)$$

&

$$\boxed{Gal(L\backslash \sigma K) = \sigma\, Gal(L\backslash K)\,\sigma^{-1}}$$

argumento: $\quad Gal(L\backslash \sigma K) \subset \sigma\, Gal(L\backslash K)\,\sigma^{-1}$