Álgebra Moderna III: 12 noviembre

Clase pasada: Correspondencia de Galois: Campos fijados por subgrupos.

Hoy: Campos conjugados & subgp normales.

Ej:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \mathbb{Q}(\omega, \sqrt[3]{2}) \arrow[dll, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & & \text{Galois} \\
\mathbb{Q}(\omega) \arrow[drr, dash] & \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \arrow[dr, dash] & \mathbb{Q}(\omega\sqrt[3]{2}) \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\cdot\omega^2) \arrow[dl, dash] & \\
\text{Galois} & & \mathbb{Q} & \text{No Galois} &
\end{tikzcd}
$$

- $\mathbb{Q}(\omega)$ conjuga así mismo
- $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $\mathbb{Q}(\omega\sqrt[3]{2})$, $\mathbb{Q}(\omega^2\sqrt[3]{2})$ conjugados
- $\mathrm{Gal}\left(\mathbb{Q}(\omega,\sqrt[3]{2}) \setminus \mathbb{Q}\right) \cong AGL(\mathbb{F}_3)$

Lema: $\begin{array}{c} L \\ | \\ K \\ | \\ F \end{array}$ extensiones de campo finitas. Entonces

a) $Gal(L\backslash K) < Gal(L\backslash F)$

b) si $\sigma \in Gal(L\backslash F)$, entonces

$$Gal(L\backslash \sigma K) = \sigma\, Gal(L\backslash K)\, \sigma^{-1} \text{ en } Gal(L\backslash F)$$

Demostración: a) EJERCICIO.

b)

$\gamma \in \sigma\, Gal(L\backslash K)\sigma^{-1}$ $\quad \beta \in \sigma \cdot K$

$\hookrightarrow \gamma = \sigma \cdot \tau\, \sigma^{-1}$ con $\tau \in Gal(L\backslash K)$

$$\begin{aligned} \gamma(\beta) &= \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}(\beta) \\ &= \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}(\sigma(\alpha)) \\ &= \sigma \circ \tau(\alpha) \\ &= \sigma(\alpha) = \beta \end{aligned}$$

entonces

$$\sigma \, Gal(L \backslash K) \, \sigma^{-1} \subseteq Gal(L \backslash \sigma K)$$

pues $\gamma_{|\sigma K} = Id$.

En la dirección opuesta $\sigma^{-1} \gamma \cdot (\sigma(\alpha)) = \sigma^{-1}\sigma(\alpha) = \alpha$.

Teorema:
$$\left.\begin{array}{c} L \\ | \\ K \\ | \\ F \end{array}\right\} \text{Extensión de Galois}$$
entonces las siguientes son equivalentes:

a) $K = \sigma K \quad \forall \, \sigma \in Gal(L \backslash F)$

b) $Gal(L \backslash K) \triangleleft Gal(L \backslash F)$

c) $F \subseteq K$ es Galois.

Demostración: $(a) \Rightarrow (b)$ Lema anterior

(b) $\Longrightarrow$ (a) si $\mathrm{Gal}(L\backslash K) \lhd \mathrm{Gal}(L\backslash F)$ &

$\sigma \in \mathrm{Gal}(L\backslash F)$ entonces (Lema)

$$\mathrm{Gal}(L\backslash K) = \sigma\, \mathrm{Gal}(L\backslash K)\, \sigma^{-1} = \mathrm{Gal}(L\backslash \sigma K)$$

pero

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & L \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\ K \arrow[dr, no head] & & \sigma K \arrow[dl, no head] \\ & F & \end{tikzcd}$$

son Galois

$\Longrightarrow$

$K =$ campo fijado por $\mathrm{Gal}(L\backslash K)$

$\sigma \cdot K =$ " " " $\mathrm{Gal}(L\backslash \sigma K)$

$\Longrightarrow K = \sigma \cdot K$ como deseabamos.

(a) $\Longrightarrow$ (c) Tenemos que probar que $\begin{matrix} K \\ | \\ F \end{matrix}$ es $\underbrace{\text{normal}}_{\substack{\text{campos de} \\ \text{descomposición} \\ \text{de } f \in F[x].}}$ y separable

Tomemos $\alpha \in K$. Su polinomio mínimo (hasta por mult. por una cte) es $$h(x) = \prod_{i=1}^{r} (x - \alpha_i)$$

con $\alpha_i = \sigma_i(\alpha)$ $\quad \sigma_i \in Gal(L, F)$

observar $\sigma_i(\alpha) = \sigma_i K = K$ por hipótesis.

$\Rightarrow$ todas las raíces de $h(x) \in F[x]$ están en K.

$\Rightarrow$ K normal. Separable es claro.

$(c) \Rightarrow (a)$ $\quad \alpha \in K \quad \sigma \in Gal(L \setminus F)$

y tomemos su polinomio minimal $/F$.

$\Rightarrow \sigma(\alpha) \in \sigma K$

$\in K \leftarrow$ por normalidad

$\Rightarrow \sigma K \subset K$, pero

$[K : \sigma K] = 1$

$\Rightarrow \sigma K = K$ como deseábamos $\blacksquare$ (usamos separabilidad ¿?)

Example

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & L = \mathbb{Q}(\omega, \sqrt[3]{2}) \arrow[dll, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
\mathbb{Q}(\omega) \arrow[drr, dash] & \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \arrow[dr, dash] & & \mathbb{Q}(\omega\sqrt[3]{2}) \arrow[dl, dash] & \mathbb{Q}(\omega^2\sqrt[3]{2}) \arrow[dll, dash] \\
\text{Galois} & & \mathbb{Q} & & \text{No Galois}
\end{tikzcd}
$$

$$\mathrm{Gal}(L \setminus \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_3^* \cong AGL(\mathbb{Z}_3) = \left\{ ax+b \;\middle|\; \begin{array}{l} a \in \mathbb{Z}_3^* \\ b \in \mathbb{Z}_3 \end{array} \right\}$$

- $\overbrace{\mathrm{Gal}(L \setminus \mathbb{Q}(\omega))}^{\text{orden } 3} \triangleleft \mathrm{Gal}(L \setminus \mathbb{Q})$

- $\underbrace{\mathrm{Gal}(L \setminus \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))}_{\text{orden } 2} < \mathrm{Gal}(L \setminus \mathbb{Q})$ no es normal por el Teorema

Sea $T = \{x+b \mid b \in \mathbb{Z}_3\}$ (orden 3) $\quad D = \{ax \mid a \in \mathbb{Z}_3^*\}$ (orden 2)

subgrupos en $AGL(\mathbb{Z}_3)$

$T \triangleleft \mathrm{Gal}(L \setminus \mathbb{Q})$ $\quad$ D tiene 2 conjugados.

entonces

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & \{e\} \arrow[dll, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[drr, dash] & & \\ T \arrow[drr, dash] & D \arrow[dr, dash] & & D' \arrow[dl, dash] & D'' \arrow[dll, dash] \\ & & \mathrm{Gal}(L \backslash \mathbb{Q}) & & \end{tikzcd}$$

Moraleja: $\mathrm{Gal}(L\backslash\mathbb{Q})/T$ es un grupo

$\mathrm{Gal}(L\backslash\mathbb{Q})/D$ NO es grupo.

$$\mathrm{Gal}(L\backslash\mathbb{Q})/T = \{a \in \mathbb{Z}_3^*\} = \text{cíclico}$$

$$\cong \mathbb{Z}/2$$

este isomorfismo está clase en pasada $\rightsquigarrow$ $\cong \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\omega)\backslash\mathbb{Q})$

dos automorfismos $\sigma_1, \sigma_2 \in Gal(L \backslash F)$

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, shift left, "\sigma_2"] \arrow[r, shift right, "\sigma_1"'] \arrow[d, dash] & L \arrow[d, dash] \\
K \arrow[d, dash] & K \arrow[d, dash] \\
F \arrow[r, equal] & F
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\sigma_1|_K = \sigma_2|_K$$

serán elementos de

$$Gal(L \backslash F) \big/ Gal(L \backslash K)$$

¿Cuándo es esto un grupo? $\nearrow$

El teorema de arriba responde esta pregunta: este cociente es grupo

(1) cuando la extensión K sobre F sea Galois

(2) cuando el campo K sea igual a todos sus conjugados

(3) cuando Gal(L/K) sea un subgrupo normal de Gal(L/F).