

Clasificación de Superficies: 22 agosto.

Hoy: Criterio de racionalidad de
Castelnuovo

Deseamos demostrar

Teorema: (Castelnuovo, 1896) Antes del "question" "

S superficie con $g = P_2 = 0$.

Entonces S es racional.

Observación: $P_2 = 0$ implica $P_g = 0$

&
no se puede relajar la condición a

$g = P_g = 0$ (Superficies
de Enriques)

Definición: V Variedad de dimensión n

- V se dice unirracional si existe un morfismo racional dominante

$$\mathbb{P}^n \dashrightarrow V.$$

- V se dice racional si existe un morfismo birracional

$$\mathbb{P}^n \xrightarrow{\sim} V.$$

Thm (Lüroth) Toda curva unirracional es racional.

Demostración:

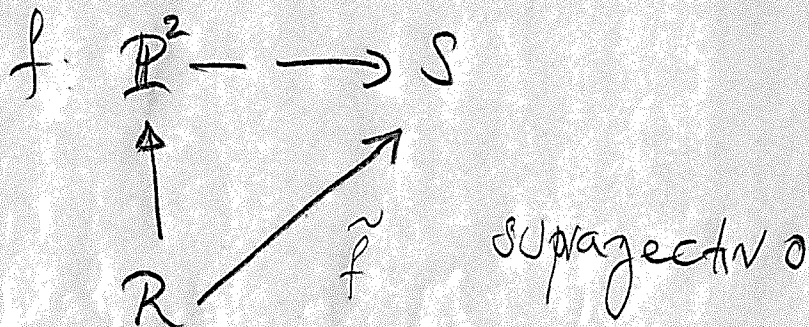
$$f: \mathbb{P}^1 \longrightarrow C \quad \text{morfismo
sopragectivo}$$

$$\Rightarrow g(C) = 0.$$

Corolario (del Criterio de Racionalidad)

Toda superficie unirracional es racional

Demostración:



R es racional

$$\Rightarrow \# \text{ puntos } = 0$$

en $S \Rightarrow S$ racional

Clemens
Griffiths

$$X^3 \subseteq \mathbb{P}^4$$

Unirracional pero
no racional

Y. Manin

$$X^4 \subseteq \mathbb{P}^4$$

u

u

Proposición: S minimal con $q = P_2 = 0$

$\Rightarrow \exists$ entero racional escalar $c \in S$ tal que
 $c^2 > 0$.

Demostración (del Criterio de Racionalidad)

Tomando c racional escalar; con $c^2 > 0$.

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_S(c) \longrightarrow \mathcal{O}_c(c) \longrightarrow 0$$

R.R.

$$\Rightarrow h^0(\mathcal{O}_S(c)) = 2 + c^2 \quad \text{pues } q = 0$$

\Rightarrow podemos tomar un punto en $|\mathcal{O}_S(c)|$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Bl}_n S & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ \downarrow \pi & & \text{, indicado} \\ S & & \text{por este punto.} \end{array}$$

$\Rightarrow \text{Bl}_n(S)$ es reglada-geo.

\Rightarrow Racional $\Rightarrow S$ racional.