Clasificación de superficies: 22 agosto.

Hoy: Criterio de racionalidad de Castelnuovo

---

Deseamos demostrar

Teorema: (Castelnuovo, 1896) Antes del "question"

$S$ superficie con $q = P_2 = 0$.

Entonces $S$ es racional.

---

Observación: $P_2 = 0$ implica $P_g = 0$

&

no se puede relajar la condición a

$q = P_g = 0$ (superficies de Enriques)

<u>Definición:</u> $V$ variedad de dimensión $n$

- $V$ se dice unirracional si existe un morfismo racional dominante
$$\mathbb{P}^n \dashrightarrow V.$$

- $V$ se dice racional si existe un un morfismo birracional
$$\mathbb{P}^n \overset{\sim}{\dashrightarrow} V.$$

<u>Thm</u> (Lüroth) Toda curva unirracional es racional.

<u>Demostración:</u>

$f: \mathbb{P}^1 \longrightarrow C$ morfismo sobreyectivo

$\Rightarrow g(C) = 0$.

<u>COROLARIO</u> (del Criterio de Racionalidad)

Toda superficie unirracional es racional

<u>Demostración</u>:

$$\begin{tikzcd} f: \mathbb{P}^2 \arrow[r, dashed] & S \\ R \arrow[u] \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

suprayectivo

$R$ es racional

$\Rightarrow \quad q = P_2 = 0$

en $S \quad \Rightarrow \quad S$ racional

---

Clemens, Griffiths $\quad X^3 \subseteq \mathbb{P}^4 \quad$ unirracional pero no racional

Y. Manin $\quad X^4 \subseteq \mathbb{P}^4 \quad$ " "

Proposición: $S$ minimal con $q = P_2 = 0$

$\Rightarrow \exists$ curva racional suave $C \subseteq S$ tal que

$$C^2 \geq 0.$$

Demostración (del Criterio de Racionalidad)

Tomemos $C$ racional suave, con $C^2 \geq 0$.

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_S(C) \longrightarrow \mathcal{O}_C(C) \longrightarrow 0$$

R.R.

$\Rightarrow$ $$h^0(\mathcal{O}_S(C)) = 2 + C^2 \qquad \text{pues } q = 0$$

$\Rightarrow$ podemos tomar un pincel en $|\mathcal{O}_S(C)|$.

$$\begin{array}{ccc} Bl_\pi S & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ \downarrow \pi & & \\ S & & \end{array}$$

, inducido por este pincel.

$\Rightarrow Bl_\pi(S)$ es reglada-geo.

$\Rightarrow$ Racional $\Rightarrow$ $S$ Racional.