Clasificación de superficies: 27 agosto

<u>Teorema</u> (Iskovskih, 1979) S superficie suave, projectiva geométricamente irreducible minimal sobre un campo perfecto k. Si $q(S) = 0 = h^0(2K_S)$ entonces S es isomorfa a una de las siguientes:

1) plano projectivo
2) $Q \subseteq \mathbb{P}^3$ cuádrica
3) haz de cónicas sobre a(geo) curva racional.
4) Superficie cuyo grupo de Picard es generado por el haz canónico.

= Hemos visto ejemplos de cúbicas en $\mathbb{P}^3$ que satisfacen (4).

Definición: Un haz de cónicas es una superficie suave S junto con un morfismo $S \to C$ tal que cada fibra es isomorfa a una cónica (posiblemente singular).

Demostración (Teorema Iskovskih)

La demostración tiene tres partes, resumiendo

S una superficie $q(S) = P_2(S) = 0$.

Asumamos K_S no genera Picard, deseamos mostrar que S es isomorfa a una de las tres opciones listadas.

Para ello: sistemas lineales en S.

Busquemos en $|D + mK_S|$ con $D \neq K_S$ para $\underline{\underline{m}}$ especial.

tres partes:

1) <u>Lema 1</u>: $|D+mK_S| = \emptyset$ para $n \gg 0$.

= Termination of adjunction =

m = maximo valor tal que $|D+mK_S| \neq \emptyset$

D = curva no linealmente eq. mK_S

$\Rightarrow$ $D+mK_S$ curvas efectivas no triviales en Pic. ($D \not\sim mK_S$)

2) <u>Lema 2</u>: $C \in |D+mK_S|$ componente irreducible (geométricamente) es racional suave.

Argumento (*) garantiza $C_k \subseteq S_k$ con $C^2 \geq 0$ $g(c) = 0$.

3) <u>Lema 3</u> $0 \le C^2 \le 2$

grado minimal de un encaje de S en $\mathbb{P}^k$.

$\Rightarrow$ $S \cong \mathbb{P}^2$, $Q^2 \subseteq \mathbb{P}^3$, haz de cónicas sobre una curva.

<u>Lema 1</u>: S suave $q(S) = P_2(S) = 0$.

D divisor efectivo $|D + mK_S| = \emptyset$ para $m \gg 0$.

<u>Demostración</u>: Dados S & D la conclusión no depende del campo. Asumamos $k = \bar{k}$ y S minimal*.

a) $K_S^2 \geq 0$. $\chi(\mathcal{O}_S(D)) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{D(D-K_S)}{2}$

si $\boxed{D = -K_S}$ $= \chi(\mathcal{O}_S) + K_S^2$

5

$$\underbrace{h^0(\mathcal{O}(-K)) + h^2(\mathcal{O}(-K))}_{h^0(\mathcal{O}(2K_S)) = 0 \text{ por hipótesis}} \geq K^2 + \chi(\mathcal{O}_S)$$

$$\Rightarrow h^0(\mathcal{O}(-K)) \geq K^2 + \chi(\mathcal{O}_S) \geq 1$$

$\Rightarrow$ $|-K_S|$ efectivo.

Si $|D + mK_S| \neq \emptyset \Rightarrow$ $\boxed{\text{alguna componente de algún elemento en } |D| \text{ contiene } m(-K_S).}$

$D = -mK + T$
$D = m(-K) + T$

$\boxed{\text{esto no puede ser para } n \gg 0.}$

$\Rightarrow$ $|D + mK_S| = \emptyset$ para $n \gg 0$. //

Supongamos ahora $K_S^2 < 0$.