Clasificación de Superficies : 29 agosto.

Hoy: Criterio de racionalidad de Castelnuovo

— " —

continuación del Lema 1:

Asumamos $K_S^2 < 0$.

$\Rightarrow (D + nK_S)K_S < 0$ para $n \gg 0$.

Por tanto además si $|D + nK_S| \neq \emptyset \ni C$ una componente irreducible

tenemos $C \cdot K_S < 0$.

Adjunción indica

$$C^2 = 2p_a(C) - 2 - C \cdot K_S \geq -1$$

si $C^2 = -1$ contradice minimalidad de S.

Por tanto $C^2 \geq 0 \Rightarrow C \cdot D' \geq 0$ para todo D' efectivo.

si escribimos $D' = D + nK_S$

$\Rightarrow C \cdot (D + nK_S) \geq 0$

Sim embargo $C \cdot K_S < 0$.

$\Rightarrow C(D+mK_S) < 0$ para $m \gg 0$.

$\Rightarrow |D+mK_S|$ no es efectivo para $m \gg 0$.

Esto concluye <u>Lema 1</u>.

$|D+mK_S| \neq \emptyset$ $m=$ maximal. Asumamos $|D|$ efectivo pero $|D+K_S| = \emptyset$

<u>Lema 2</u> S suave com $q(S)=0$ & D efectivo tal $|D+K_S| = \emptyset$. Entonces.

1) Toda componente geo-irreducible de D es isomorfa a $\mathbb{P}^1$.

2) $p_a(D') = 0 \quad \forall \ D' \subset D$.

3) Si $D - mK_S$ es amplio com $m \geq 0 \Rightarrow$ $D'^2 \geq 1$ com algún $D' \subset D$.

Demostración: 2) $D' \subseteq D$ componente no trivial.

$$\underbrace{h^0(\mathcal{O}_S(D'+K_S))}_{\text{Cero por hipótesis}} + \underbrace{h^0(\mathcal{O}_S(-D'))}_{\text{Cero pues } D' \text{ es efectivo}} \geq \frac{(D'+K_S)D'}{2} + \chi(\mathcal{O}_S)$$

Notar

$\chi(\mathcal{O}_S) = 1 - q + h^2(\mathcal{O}_S) > 0$. Por lo tanto

$$(D'+K_S)D' \leq -2\chi(\mathcal{O}_S) \leq -2$$

Adjunción dice (D' conexo)

$$2p_a(D') - 2 = D'(D'+K_S) \leq -2$$

$$\Rightarrow \boxed{p_a(D') = 0}$$

1) Se sigue del mismo cálculo.

3) Asumamos $D_i^2 \leq -2$ $\forall$ componente de D.

$D_j \cong \mathbb{P}^1_k$ Adjunción entonces dice

$$D_j K_s = -2 - D_j^2 \geq 0 \quad \forall j$$

$\Rightarrow$ $D \cdot K_s \geq 0$.

Si $D - mK_s$ es amplio entonces

$$(D+K_s)D = \left((D-mK_s) + (m+1)K_s \right) D$$

$$\geq (m+1) K \cdot D \geq 0$$

Lemma 2, part 2

Pero $\boxed{(D+K_s)D \leq -2}$ contradicción

$\boxed{\Xi}$

Corolario: S suave, projectiva minimal $q(S)=0$ definida sobre $k = k^{1/p}$. Asumir $\exists$ H amplio no linealmente equiv a mK_s. Entonces $\exists$ $C \subseteq S_k$ reducida irreducible $p_a(C) = 0$.