Clasificación de superficies: 5 septiembre

Ayer: Lemas: $C \leq S$ curva racional en una superficie proy, suave, regular: $C_i \cdot C \geq 0$.
$C_i =$ componente irred.

Hoy: $C^2 \leqslant 2$ & $\varphi_{|C|} : S \longrightarrow S' = \begin{cases} \mathbb{P}^2 & C^2=1 \\ Q \subseteq \mathbb{P}^3 & C^2=2 \\ \mathbb{P}^1 & C^2=0 \end{cases}$

Demostración: A divisor no lin equiv mK_S

$\left.\begin{array}{l} H \text{ amplio} \\ bH+A \text{ amplio } b \gg 0 \end{array}\right\}$ podemos elegir el grado menor de C bajo un encaje de S.

Asumamos $C^2 \leq 2$. Sabemos $|C|$ no tiene puntos base. Analizaremos la im $\varphi_{|C|}$:

$(C^2=0)$ $\varphi_{|mC|} : S \longrightarrow B = \text{curva}$ $\begin{pmatrix} \text{no es } mC \\ \text{amplio} \end{pmatrix}$

$$H^1(\mathcal{O}_B) \hookrightarrow H^1(\mathcal{O}_S) \quad \text{injectivo}$$

$\Rightarrow H^1(B) = 0$. Como B es geo-irreducible (c

Entonces B es geo-racional.

Tenemos que las fibras de $\varphi_{|mC|}$ son linealmente equiv. Consideremos

$D = \varphi^{-1}_{|mC|}(p)$ ~~geo~~-irred $/\bar{k}$. Entonces

$D \cdot K_S < 0$ pues $C \cdot K_S = -2$

También $D^2 = 0$. Adjunción dice que

D suave racional & $S \longrightarrow B$ es un haz de cónicas*

$$\left(\begin{array}{l} C = C_1 + C_2 + \cdots + C_e \text{ irred} \\ C^2 = C(C_1 + \cdots + C_e) = 0 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow C \cdot C_i = 0$.

$C \cdot (K_S) = -2$

$(C_1 + \cdots + C_k) K = -2$

$\Rightarrow \boxed{k \leq 2}$

si $C^2 > 0 \Rightarrow \dim |C| = C^2 + 1$.

$\boxed{C^2 = 1} \Rightarrow S \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^2$

Suprayectivo & morfismo.

$H^2 \cdot \deg \varphi = C^2 = 1 = \deg \varphi \Rightarrow \varphi$ birracional

$\Rightarrow \varphi$ isomorfismo.

$\boxed{C^2 = 2}$ $\qquad \varphi_{|C|} : S \longrightarrow \mathbb{P}^3 \qquad$ grado$(\mathrm{Im}\,\varphi) \geq 2$

$$2 = C^2 = \deg \mathrm{Im}(\varphi) \cdot \deg \varphi \geq 2 \deg \varphi$$

$\Rightarrow \varphi$ isomorfismo $\mathrm{Im}\,\varphi$ es una cuádrica (suave: Ejercicio)

Mostremos $C^2 \leq 2$: Sabemos $D \in |C|$ elemento definido sobre k. D es geo-irred. (suave & racional) ó $D = C_1 + C_2$

- geo-irred
- conjugados$/k$
- racional$/\bar{k}$

(*)

$\Rightarrow D$ tiene a lo más un solo punto singular.

Supongamos: $\exists$ P_1, P_2 dos puntos k-racionales en S.

Si $C^2 \geq 3 \Rightarrow \dim |C| \geq 4$, entonces $\exists$ $C_0 \subseteq S$ con un punto singular @ P_1 y que contiene P_2.

Argumento:

$$0 \to \mathcal{O}_S(C-2P_1-P_2) \to \mathcal{O}_S(C) \to \frac{\mathcal{O}_S}{m_{P_1}^2 \cap m_{P_2}},$$

$$0 \to \mathcal{O}_S(C) \otimes \mathcal{O}_S(\underbrace{-2P_1-P_2}_{Z}) \to \mathcal{O}_S(C) \to \boxed{\frac{\mathcal{O}_S}{\langle 2P_1+P_2 \rangle}} = \mathcal{O}_Z$$

Tomando cohomología:

$$\boxed{} \to H^0(\mathcal{O}_S(C)) \to \underbrace{H^0\left(\mathcal{O}_S/\langle 2P_1+P_2\rangle\right)}_{\text{dim } 4 \,:\, \deg m_p^2 = 3}$$

$\Rightarrow H^0(\mathcal{O}_S(C)) \otimes H^0(\mathcal{O}_S(-Z))$

es de dimensión al menos 1.

$C_0 \in |C|$ curva singular en P_1 & conteniendo P_2

(5)

(*)

$\Rightarrow$ C_0 tiene dos componentes irred conjugadas sobre k.

Ambas componentes pasan por P_1 & P_2

$\Rightarrow$ C_0 es singular en P_1 & P_2 $\Rightarrow\Leftarrow$.

¿ Siempre podemos encontrar en S 2 k-puntos ?

<u>Teorema</u> (Swinnerton-Dyer, 1981)

$$S = \{ x_1^3 + x_1^2 x_0 + x_1 (x_0^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_2 x_3) + x_2^3 + x_2^2 x_3 + x_3^3 \}$$

definida sobre $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ tiene un solo punto definido sobre $\mathbb{F}_2$.

Único ejemplo con un k-punto si <u>k = finito</u>.