Clasificación de Superficies: 13 Septiembre

Hoy: Digresión campos perfectos. k

$\underbrace{\text{campos perfectos}}$ extensiones algebraicas de k son separables.

$P \in S_k$ Punto cerrado ideal maximal en $\mathcal{O}_U$ $(U \subseteq S)$.

P es una orbita de $Gal(\bar{k} \setminus k)$ de puntos $\{P_1, \ldots, P_d\}$.

Eg. $\mathbb{A}^1 = \operatorname{Spec} k[x]$ $a_1, \ldots a_m \in \bar{k}$

Galois conjugados y completos.

i.e. = $q_a(t) \in k[t]$ polinomio minimal de $a_1 = a$

& $a_2, \ldots, a_m$ raíces de $q_a(x)$.

Entonces

$$\prod_j (t-a_j) = \sum (-1)^j \sigma_j t = q_a(t)$$

invariantes bajo $Gal(\bar{k}\backslash k)$

Polinomio con raíces $\{a_1, \dots a_n\}$ en $k[t]$; distintas (perfecto).

en $\mathbb{A}^1_k$ $\langle q_a(x) \rangle$ es un punto cerrado

que puedo pensar como órbita de $Gal(\bar{k}\backslash k)$ en $\mathbb{A}^1_{\bar{k}}$.

—— // ——

No ejemplo: $a \in \bar{k} \setminus k$ con $a^p = b \in k$

$\Rightarrow$ $x^p - b$ irreducible
con raíz $\{a\}$ de mult p.

$P \in S_k$ punto cerrado. (i.e. órbita de Galois $p_1, \dots, p_d \in S_{\bar{k}}$)

$S'_k \longrightarrow S_k$ la explosión de S_k en P.

E = curva reducida irreducible sobre k

$\Rightarrow$ $S'_{\bar{k}} = Bl_{p_1, \dots, p_d} S_{\bar{k}}$.

$E_{\bar{k}}$ = d copias disjuntas de $\mathbb{P}^1$.

en particular $E^2 = -d$ & $E \cdot K_{S'} = -d$

llamamos a E "curva -1".

Podemos pensar a una curva -1 como una órbita de $Gal(\bar{k} \setminus k)$ de curvas disjuntas $E_1, \dots, E_d \in S_{\bar{k}}$.

si $\overline{k}=k \Rightarrow Gal(\overline{k}\backslash k) \cong \{e\}$ (4

$\Rightarrow d=1$ y recuperamos la definición usual de "curva -1".

Una superficie es minimal si no contiene curvas -1. Es decir, S_k es minimal si $S_{\overline{k}}$ no contiene una órbita de $Gal(\overline{k}\backslash k)$ de curvas -1 disjuntas.

Precaución: $S_{\overline{k}}$ puede contener curvas -1 y bien S_k no contiene ninguna.

(eg. S_k cúbica de rango de Picard 1).

$\hookrightarrow$ $x^3+y^3+z^3+aw^3=0 / \mathbb{Q}$. $a\in\mathbb{Q}$ que no es cubo

Teorema (Segre, 1951)

S_k cúbica suave en $\mathbb{P}^3_k$

Considerar la acción de $Gal(\bar{k} \setminus k)$ en las 27 líneas de $S_{\bar{k}}$. Entonces, LSEE

1) $\rho_k(S) = 1$

2) La suma de las líneas en cada órbita de Gal es linealmente equiv a un multiplo de $\mathcal{O}(1)$.

3) Ninguna órbita de Galois consiste de líneas disjuntas de S. $\Big\}$ minimal sobre k.