

Hoy: Clasificación de Superficies: 15 oct

* Superficies racionales
minimales

* Modelos minimales

COROLARIO: S superficie racional minimal

Entonces $S \cong \mathbb{P}^2$ o $S \cong \mathbb{F}_n$ $n \neq 1$.

Demostración: $k = \mathbb{C}$

El teorema pasado indica

$$S \cong \begin{cases} \mathbb{P}^2 \\ \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{P}^3 \\ S \rightarrow \mathbb{P}^1 \text{ haz de curvas} \end{cases}$$

o $\rho(S) = 2 \cdot K_S$ generado por el divisor canónico.

la última clase de superficies es vacía.

Minimalidad de $S \Rightarrow S \rightarrow \mathbb{P}^1$ donde todas las fibras son irreducibles $\cong \mathbb{P}^1$

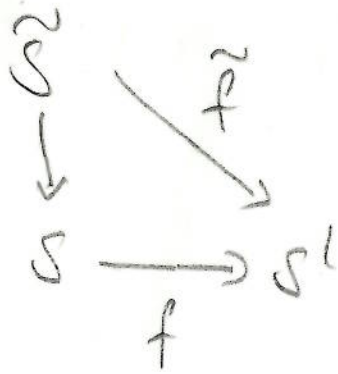
$$\Rightarrow S \cong \mathbb{P}(E) := \mathbb{F}_n \quad n \neq 1.$$

|
 \mathbb{P}^1

Teorema: S & S' dos superficies minimales no regladas. Entonces $\varphi: S \rightarrow S'$ birracional es un isomorfismo. En particular, toda superficie no reglada admite un modelo minimal único.

Demostración: Empecemos con

Argumento por contradicción $S \xrightarrow{f} S'$



resolución
minimal.

$E \subseteq \tilde{S}$ divisa
excepcional

$C = \tilde{f}(E)$. Observamos $C \cdot K_S \leq K_{\tilde{S}} \cdot E = -1$

igualdad ssi E es disjunta de
las curvas contraídas por \tilde{f}

Sin embargo $K_S \cdot C = 1$. no es posible
por minimalidad

\Rightarrow $K_S \cdot C \leq -2 \quad \& \quad C^2 \geq 0$

← Esto
simplica

$P_m = 0$.

pag. 26

Supongamos $D \in |nK_S| \Rightarrow D \cdot C > 0$

Contradicción.

Tenemos dos casos:

$g=0$; Teorema de Castelnuovo simplifica
 S es racional, excluido.

$g>0$; $\alpha: S \rightarrow B$ el morfismo
de Albanese es suprayectivo
en una curva suave de género g .

Nota C está en la fibra de α pues
es racional. Mas aún, $rC = F := \alpha^{-1}(p)$

para algún $r \in \mathbb{Z}$, $\Rightarrow C^2 = 0$, y por
tanto $K_S \cdot C = -2$.

$$\begin{aligned} g(rC) - 2 &= (F + K_S)F \\ &= -2r \end{aligned}$$

$$g(F) = 2(1-r) \quad (\text{moneda es negativo})$$

$$\Rightarrow r=1 \quad \& \quad g(F) = 0. \quad \square$$