Clasificación de superficies 15 oct

Hoy:
* Superficies racionales minimales

* Modelos minimales

COROLARIO: S superficie racional minimal

Entonces $S \cong \mathbb{P}^2$ ó $S \cong \mathbb{F}_n$ $n \neq 1$.

Demostración: $k = \mathbb{C}$

El teorema pasado indica

$$S \cong \begin{cases} \mathbb{P}^2 \\ Q \subseteq \mathbb{P}^3 \\ S \longrightarrow \mathbb{P}^1 \text{ haz de cónicas} \end{cases}$$

ó $\rho(S) = \mathbb{Z} \cdot K_S$ generado por el divisor canónico.

la última clase de superficies es vacía.

Minimalidad de S $\Rightarrow$ $S \longrightarrow \mathbb{P}^1$ donde todas las fibras son irreducibles $\cong \mathbb{P}^1$

$$\Rightarrow \quad S \cong \underset{\substack{| \\ \mathbb{P}^1}}{\mathbb{P}(E)} := \mathbb{F}_n \qquad n \neq 1 .$$

<u>Teorema:</u> S & S' dos superficies minimales no regladas. Entonces $\varphi : S \dashrightarrow S'$ birracional es un isomorfismo. En particular, toda superficie no reglada admite un modelo minimal único.

<u>Demostración:</u> Empecemos con

Argumento por contradicción $\quad S \xrightarrow{f} S'$.

$$\begin{tikzcd} \tilde{S} \arrow[d] \arrow[dr, "\tilde{f}"] & \\ S \arrow[r, "f"'] & S' \end{tikzcd}$$

resolución minimal.

$E \subseteq \tilde{S}$ divisor excepcional

$C = \tilde{f}(E)$. Observemos $C \cdot K_{S'} \leq K_{\tilde{S}} \cdot E = -1$

igualdad <u>ssi</u> E es disjunta de las curvas contraídas por $\tilde{f}$

Sin embargo $K_S \cdot C = 1$ no es posible por minimalidad

$\Rightarrow$ $\boxed{K_S \cdot C \leq -2 \quad \& \quad C^2 \geq 0}$ $\leftarrow$ Esto implica

$P_n = 0.$

Pag. 26

Supongamos $D \in |nK_S| \Rightarrow D \cdot C > 0$

<u>contradicción</u>.

Tenemos dos casos:

$q=0$; Teorema de Castelnuovo implica S es racional, excluido

$q>0$; $\alpha : S \longrightarrow B$ el morfismo de Albanese es suprayectivo en una curva suave de género q.

Notar C está en la fibra de α pues es racional. Más aún, $rC = F := \alpha^{-1}(p)$ para algún $r \in \mathbb{Z}$, $\Rightarrow C^2 = 0$, y por tanto $K_S \cdot C = -2$.

$$g(rC) - 2 = (F + K_S)F$$
$$= -2r$$
$$g(F) = 2(1-r)$$ nunca es negativo

$\Rightarrow$ $r=1$ & $g(F)=0$. $\blacksquare$