

Clasificación de Superficies § 5 NOU

Hoy: S superficie minimal con $K_S^2 < 0$
 $\Rightarrow S$ es reglada.

Demostración: mostramos $F_g = 0$.

Supongamos $P_g \neq 0$. $D \in |K_S|$

efectivo. Sabemos $K \cdot D < 0$,

entonces $K \cdot C_i < 0$; con $D = \sum n_i C_i$

para alguna i . Como $C_i \cdot C_j \geq 0$ $i \neq j$

$$\Rightarrow C_i^2 < 0$$

$$2g(C) - 2 = C_i^2 + C \cdot K$$

$$\Rightarrow g(C) = 0$$

$\Rightarrow C_i$ es excepcional
Contradicción.

Por lo tanto podemos asumir

$$P_g = 0 \quad \& \quad g \geq 1$$

por el criterio de racionalidad de Castelnuovo.

Asumamos S no reglada

Consideramos el morfismo de Albanese

$$p: S \longrightarrow B \quad B = \text{curva de género } g$$

p tiene fibras conexas.

Paso 1: $C \subseteq S$ curva irreducible con

$$C \cdot K < 0 \quad \& \quad |K + C| = \emptyset$$

Entonces, $P_{|C}$ es étale y un isomorfismo si $g \geq 2$. Así $g(C) = g$

Argumento: R.R a $K+C$:

$$0 = h^0(k+c) \geq \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(c^2 + c - k)$$

$$= 1 - g + g(c) - 1$$

$$= g(c) - g$$

$$\Rightarrow \boxed{g(c) \leq g}$$

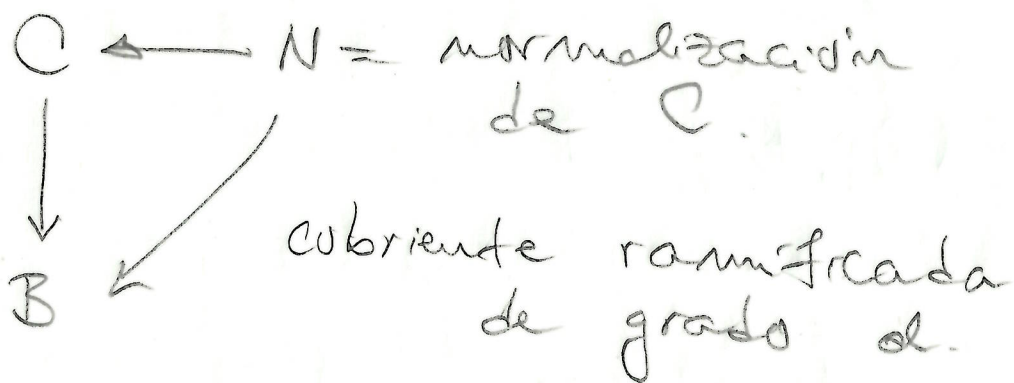
Como S es minimal, $c^2 \geq 0 \Rightarrow$

C no es una fibra de p .

pues entonces S sería reglada por Noether-Enriques.

$\Rightarrow p(C) = B$. Dos casos:

p es íntegro & p es normal



Riemann-Hurwitz (cobiertas)

$$g(N) = 1 + d(g(B) - 1) + \frac{r}{2}$$

$r = \#$ de puntos de ramificación.

$$\Rightarrow \quad g > 1, \quad g(C) \geq g(N) \geq 1 + d(g - 1)$$

$$\Rightarrow \quad d = 1 \quad \text{o} \quad g = 1 \quad \underline{\underline{\quad // \quad}}$$

Fin del argumento.
del caso 1.