Clasificación de superficies: 5 NOV

Hoy: S superficie minimal con $K_S^2 < 0$

$\Rightarrow$ S es reglada.

Demostración: mostraremos $P_g = 0$.

Supongamos $P_g \neq 0$. $D \in |K_S|$ efectivo. Sabemos $K.D < 0$, entonces $K.C_i < 0$, con $D = \sum n_i C_i$ para alguna i. Como $C_i C_j \geq 0$ $i \neq j$

$\Rightarrow$ $\boxed{C_i^2 < 0}$ $\qquad 2g(C) - 2 = C_i^2 + C.K$

$\Rightarrow g(C) = 0$

$\Rightarrow C_i$ es excepcional

contradicción.

Por lo tanto podemos asumir

$$p_g = 0 \quad y \quad q \geq 1$$

por el criterio de racionalidad de Castelnuovo. $\boxed{\text{Asumamos } S \text{ no reglada}}$

Consideramos el morfismo de Albanese

$$p : S \longrightarrow B$$

B = curva de género q

p tiene fibras conexas.

<u>Paso 1</u>: $C \subseteq S$ curva irreducible con

$$C \cdot K < 0 \quad y \quad |K + C| = \emptyset$$

Entonces, $p_{|C}$ es étale y un isomorfismo si $q \geq 2$. Así $g(C) = q$

Argumento: R.R a $K + C$:

$$0 = h^0(K+C) \geq \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(C^2 + C \cdot K)$$

$$= 1 - q + g(C) - 1$$

$$= g(C) - q$$

$\Rightarrow$ $\boxed{g(C) \leq q}$

Como S es minimal, $C^2 \geq 0 \Rightarrow$

C no es una fibra de p.

pues entonces S sería reglada por Noether–Enriques.

$\Rightarrow$ $p(C) = B$. Dos casos:

p étale & p isomorfismo

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d] & N \arrow[l] \arrow[dl] \\ B & \end{tikzcd}$$

$N =$ normalización de C.

cubriente ramificada de grado d.

Riemann-Hurwitz (cubiertas)

$$g(N) = 1 + d(g(B)-1) + \frac{r}{2}$$

$r =$ # de puntos de ramificación.

$$\Rightarrow \quad q \geq g(C) \geq g(N) \geq 1 + d(q-1)$$

$$\Rightarrow \quad d = 1 \quad \text{ó} \quad q = 1$$ //

Fin del argumento del paso 1.